Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O kruhu devíti bodů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 5, 228–235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109133

O kruhu devíti bodů.

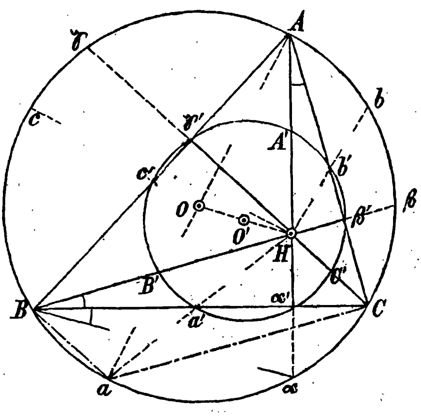
Pro žáky středních škol napsal

V. Jeřábek,

professor v Brně.

V každém trojúhelníku nalézají se středy stran, paty výšek a středy hořejších úseků výšek v kružnici, která slove kružnice devíti bodů.

Důkaz. Budiž H společným bodem výšek $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ trojúhelníka ABC a sestrojme kruh O' *), který jest vzhledem k středu podobnosti H a poměru $\frac{HO'}{HO} = \frac{1}{2}$ podobně položen s kruhem ABC čili O; dokážeme, že O' jest kruhem devíti bodů.**)



Vrcholům A, B, C diametrálně protilehlé body v kružnici ABC nazveme a, b, c. Jelikož HB a $C\alpha$ stojí kolmo na AC, jest $BH \parallel aC$; podobně lze dokázati, že $CH \parallel aB$, pročež jest $BHCa$ rovnoběžníkem, ve kterém úhlopříčny BC a Ha na vzájem v bodě a' se rozpolují. I jest tedy a' středem strany BC, a poněvadž a' jest též rozpolovacím bodem úsečky Ha, jsou a' a a body podobně položenými vzhledem k středu podobnosti H a poměru

*) Pro kruh a jeho střed volíme za příčinou jednoduchosti totéž označení.

**) Viz jiný důkaz „Jacob Steiner's gesammelte Werke, I. Band, p. 491" a v tomto „Časopise" roč. I. článek prof. dra. Em. Weyra na str. 190.

$\frac{H\alpha'}{H\alpha} = \frac{1}{2}$; a že bod α leží v kružnici ABC, musí α' nalézati se též v kružnici O', která jest dle téhož středu H a poměru $\frac{1}{2}$ podobně položená s kružnicí ABC. Totéž platí o středu b' strany CA a středu c' strany AB. Kružnice O' obsahuje tedy středy všech stran trojúhelníka ABC.

Buďtež α, β, γ průsečíky prodloužených výšek $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ s kružnicí ABC, pak jest $\triangle BH\alpha' \cong \triangle B\alpha\alpha'$, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, mají společnou odvěsnu $B\alpha'$ a $\sphericalangle HB\alpha' = \sphericalangle HAC = \sphericalangle \alpha BC$. Ze shodných těchto trojúhelníků plyne $H\alpha' = \alpha'\alpha$, a dle analogie $H\beta' = \beta'\beta$, $H\gamma' = \gamma'\gamma$ aneb

$$\frac{H\alpha'}{H\alpha} = \frac{H\beta'}{H\beta} = \frac{H\gamma'}{H\gamma} = \frac{1}{2},$$

z čehož opět, jako dříve, plyne, že i paty α', β', γ' výšek $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ v kružnici O' se nalézají.

Konečně nazveme A', B', C' středy hořejších úseků AH, BH, CH; tu plyne bezprostředně

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{HB'}{HB} = \frac{HC'}{HC} = \frac{1}{2},$$

z čehož opět poznáváme, že body A', B', C' kružnici O' náležeti musejí.

Drobné zprávy.

Napsal

M. Lerch, v Praze.

(Dokončení.)

P. Stolz došel k tomu výsledku, že předpokládáme-li čtvero axiomů *Eukleidových*, t. j. máme-li na zřeteli soustavu veličin Σ té vlastnosti, že 1. každé dvě její veličiny mohou býti označeny buď jako rovny, aneb jedna z nich jako větší, 2. že se veličiny *sčítají* *) tak jako přirozená čísla, tedy zvlášť, že součet jest

*) Pojem čistě experimentalní, na jehož ostatních okolnostech nám nezáleží.

opět veličinou soustavy, 3. je-li pak $A < B$, má existovati jediná veličina X soustavy naší, aby $A + X = B$, a posléz 4. že mezi každýma dvěma veličinama soustavy nalezá se ještě třetí,*) a vedlé každé přichází veličina ještě menší, takže žádná z nich není nejmenší — kteréžto soustavě propůjčuje se dolní mez nulla jakožto připojená, nevlastní veličina — nemůžeme ani dokázati dělitelnost všech veličin soustavy, ani t. zv. axiom Archimédův, že totiž můžeme každou sebe menší veličinu tak zmnohonásobiti, že násobek převyší jistou veličinu libovolně danou. Poněvadž se nám ale jedná o formalní uvědomění si všech elementarných vlastností délky a přímky, jakož i jiných měřených veličin, musíme se ohlédnouti po dalším nějakém axiomu, který by doplnil uvedené čtyry vlastnosti, tak aby tvořily dostatečný základ pojmu měření.

Takový axiom nalezl p. Stolz ve formulování a supposici *spojitosti* soustavy. Tuto definici zde podati je naším úkolem. Z veličin soustavy Σ lze vybrati jiné, které tvoří soustavu Π_0, jež má tytéž čtyry vlastnosti jako Σ.**) Pak nazýváme *mezerou* (Lücke) každé rozvrhnutí veličin soustavy Π_0 neb některé její části Π ve dvě skupiny následujících vlastností:

1. Každá veličina z Π_0 neb i (Π) náleží jediné skupině; 2. je-li P_1 veličina prvé skupiny, bude jí každá veličina $P < P_1$, a je-li P_2 veličinou skupiny druhé, bude jí též každá $P > P_2$, takže vždy $P_1 < P_2$; 3. je-li $P_1 (P_2)$ veličina skupiny prvé (druhé) nalezá se v této ještě vždy veličina větší (menší). ***) A tu třeba rozeznávati dva případy: buď je rozdíl $P_2 - P_1$ vždy větší než jistá stálá veličina (která ostatně může býti sebe nepatrnější) ze soustavy Π_0, a pak máme mezeru v pravém slova smyslu, *mezeru 1. způsobu*, aneb se může rozdíl tento státi menším než kterákoli veličina daná (a kterou mi může každý, kdykoli si vzpomene, předložiti) a pak sluje mezera *druhého způsobu* či zkrátka *řezem* (dle Dedekinda) soustavy Π_0 neb částky její Π. Tyto dvojí mezery zavdávají podnět k rozvržení soustav Π_0 či

*) Tedy neomezeně mnoho.

**) Takovou skupinu tvoří na př. všecky délky, jež mají k jednotce racionalní poměr.

***) Existence takových mezer a soustav spadá v obor empirismu, musí poznána býti *smysly*. (Ref.)

Π ve dva druhy. Má-li soustava tato pouze řezy, sluje *naskrze kondensovanou* (allenthalben überalldicht), kdežto je naopak toliko *místně kondensovanou* (stellenweise üb.-d.), vyskytují-li se v ní též mezery prvého způsobu. Následující jest nyní ona předůležitá definice spojitosti. „Soustava veličin Σ je v mezích A, B *spojitou* vždy a jen tehdy, mohou-li se z jejích veličin utvořiti soustavy Π v řečených mezích *naskrze kondensované*, a přísluší-li každé mezeře prvého způsobu v těchto soustavách Π nekonečně mnoho veličin S soustavy Σ, z nichž každá je větší než všecka P_1 a menší než všecka P_2 (P_1, P_2 mají řečený význam), kdežto *každému řezu náleží vždy a to pouze jedna veličina S soustavy Σ*.

Pozorujme nyní, jak se chová tato definice vzhledem *k dané skutečnosti*. Soustavu délek Σ představme si vzdálenostmi jednotlivých bodů přímky od počátku libovolně vytknutého O. Každá délka, která stanoví vzdálenosť některého bodu *m* od bodu *o*, pojata buď do naší soustavy Σ, která se nemá z jiných veličin skládati.

Z této soustavy Σ můžeme vždy vyňati soustavy Π v daném intervallu naskrze kondensované,*) můžeme se také přesvědčiti, je-li mezera nějaká řezem neb mezerou prvého způsobu, ale nikomu pod sluncem nepodaří se dokázati, že každému řezu přísluší jediná veličina, která je větší než všecky veličiny P_1, a menší než všecka P_2, t. j. že existuje bod určitý a jediný, jenž separuje nekonečné skupiny bodů P_1 P_2. Nezbývá nic, než přijati tuto větu za správnou, právě tak jako předpokládáme tíži, éther, fluidum! Ale přec dá se *částečně* dokázati, t. j. redukovati na zvláštní případ, na *axiom Cantorův*. Mýlí se tedy p. Stolz, praviv na str. 518, že Cantorův axiom není dokazatelný; kdyby tento nebyl dokazatelným, nesměli bychom považovati axiom Archimedův a dělitelnost délek za dokázané; tím právě, že tyto vlastnosti dokazujeme, předpokládajíce spojitost, předpokládáme axiom Cantorův, a nelze mluviti o tomto jakožto *novém* axiomu, považujeme-li spojitosť za odůvodněnou.

*) Příklad neuvádím, ačkoli jich lze nabyti ve značném počtu cestou ryze geometrickou.

O každé spojité soustavě Σ uvedených vlastností dokázal p. Stolz mimo jiné následující věty:

1. Každou veličinu A ze Σ lze děliti v libovolný počet n rovných dílů, t. j. vždy existuje X tak, aby $n\mathrm{X} = \mathrm{A}$.

2. Každá veličina může dostatečně zmnohonásobena převyšiti každou danou veličinu (stejnorodou).

3. Kondensovaná soustava Π_0 obsahuje veličiny menší než každá daná veličina E soustavy Σ.

III. Vývoj theorie množin.

Množinou bodů neb čísel (Punct- o. Werthmenge, Mannigfaltigkeit, système, ensemble) nazýváme souhrn jistým způsobem definovaných bodů neb čísel. Tak na př. tvoří 20 libovolně vytknutých bodů, všecka racionalní čísla, všecka čísla celistvá neb kmenná množinu. Nauka o množinách děkuje svůj původ pracím pp. *Weierstrassa, Cantora, P. du Bois-Reymonda, Harnacka, Stolze* — v poslední době vynikl p. *Bendixson* — jakož i příbuzným pracím *Liouvillea, Riemanna, Dedekinda* a t. d. Největších zásluh získal si na tomto poli bez odporu p. Cantor. Jeho práce jsou základem tohoto referátu, nehledíme-li k citovaným výše spisům pp. du Bois-Reymonda a Dini-a. Při tom omezím se na zjevy nejzajímavější.

1. Ačkoli je čísel racionalních naproti celistvým nesmírněkrát více, ačkoli tvoří t. zv. množinu naskrze kondensovanou či *pantachickou*, přec dají se všecka sestaviti v jednoduchou nekonečnou řadu tvaru

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_\nu, \ldots$$

která obsahuje vesměs jen čísla racionalní, a v níž také každé takovéto číslo přichází.

Neboť patrně lze každé racionalní číslo psáti ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m, n jsou nesoudělná čísla celistvá; utvořme pak všecka čísla $\frac{m}{n}$, kde $m + n \leqq 10$, a seřaďme je dle velikosti (počet jich je patrně konečný), opatřivše každé znakem $(a_1, a_2, \ldots a_\nu)$; po té utvořme všecka čísla, pro něž $m + n \leqq 100$, a seřaďme ona, která jsou nová; po té sestavme čísla racionalní, pro něž

$m + n \leqq 1000$, atd. Patrně tím vyčerpáme všecka čísla racionalní.

Totéž možno učiniti s čísly algebraickými, která jsou kořeny algebraických rovnic nepřevodných s celistvými koefficienty, t. j. tvaru

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

kde a_1 jsou čísla celistvá.

Nazveme součet absolutních hodnot koefficientů a, zvětšený o $n - 1$ výškou čísla x, t. j. hodnotu $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$, a znamenejme $\varphi(N)$ počet čísel x, jež jsou kořeny rovnic majících tutéž výšku N — počet to patrně konečný; a poněvadž každé x hoví jediné algebraické rovnici nepřevodné, je jím již číslo N jednoznačně dáno. Utvoříme-li čísla x příslušná ku $N = 1, 2, 3, \ldots$, obdržíme skupiny o $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots$ členech, které patrně lze napsati v řadě $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ která se pak skládá ze samých čísel algebraických, která ale jsou v ní také všecka obsažena. Podobných množin existuje množství nesmírné.

Zajímavý je nyní důkaz, že existuje v každém sebe menším intervallu nekonečně mnoho čísel, které nenáležejí množině seřaditelné definované v tomto intervallu.

Mějmež v intervallu (0, 1) definovanou množinu seřaditelnou, tedy vyjádřenou v řadě

(1) $$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_\nu \ldots;$$

máme dokázati, že v každém sebe menším intervallu (α, β) obsaženém v (0, 1) nalezá se bod (a tedy pak nekonečně mnoho takových), jenž není obsažen v řadě (1), a tedy nenáleží množině dané.

Není-li množina v (α, β) pantachickou, rozumí se věc sama sebou; je-li však pantachickou, dokážeme větu následovně: Probíháme-li řadu (1), musíme jednou dospěti k prvému číslu a_{ι_1}, které spadá v intervall (α, β) a patrně též k číslu druhému a_{ι_2}, tamtéž spadajícímu. Poněvadž nevíme a priori, které z čísel těch je větší, znamenejme větší z nich β_1, menší α_1, takže máme pak relaci $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Po té buďte $a_{\iota_3}\, a_{\iota_4}$ prvá dvě čísla řady (1) spadající v intervall (α_1, β_1), a sice znamenejme α_2 menší, β_2 větší z nich, takže $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1$; pak se zajistá vyskytnou prvá dvě čísla $a_{\iota_5}\, a_{\iota_6}$ řady (1), která spadají v intervall (α_2, β_2), a znamenejme α_3 menší, β_3 větší z nich, takže

$\alpha_2 < \alpha_3 < \beta_3 < \beta_2$, atd. Process se patrně neukončí, poněvadž v každém sebe menším intervallu uvnitř (α, β) přicházejí členové řady (1).

O příponách užitých patrně platí $\iota_1 < \iota_2 < \iota_3 < \ldots < \iota_{2\nu} < \ldots$ a poněvadž tyto jsou čísla celistvá, jsou rozdíly sousedních členů $\geqq 1$, a proto, $\iota_{2\nu} \geqq 2\nu$, tedy najisto $\nu < \iota_{2\nu}$.

V intervallu (α_ν, β_ν) omezeném prvky $a_{\iota_{2\nu}}, a_{\iota_{2\nu-1}}, a_{\iota_{2\nu+1}}$ nenalezá se dle definice žádný prvek řady (1) s příponou $< \iota_{2\nu}$, tedy zajisté leží prvek a_ν mimo (α_ν, β_ν). Jelikož $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots$ jsou obsažena v (α, β), existuje číslo určité A*) definované rovnicí $A = \lim\limits_{\nu=\infty} \alpha_\nu$; podobně plyne z vlastnosti čísel $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta_\nu \ldots$, že existuje číslo B dané rovnicí $B = \lim\limits_{\nu=\infty} \beta_\nu$. Patrně tu jest pro každé ν $\alpha_\nu < A \leqq B < \beta_\nu$; případ $A < B$ není možným u množin pantachických, takže zbývá jen $A = B$; toto číslo nenáleží řadě (1), poněvadž nemůže se rovnati číslu a_ν, které dle výše dokázaného nalezá se mimo intervall (α_ν, β_ν), kdežto $A = B$ se uvnitř tohoto nalezati musí. Je tedy $A = B$ číslo, jehož existenci nám bylo dokázati.

Jakožto zvláštní případ máme větu, že se v každém sebe menším intervallu nalezá libovolně mnoho čísel *transcendentních*, která nemohou býti kořeny algebraické rovnice s celistvými koefficienty. Taková čísla jsou na př. e, π, jak pp. *Hermite* a *Lindemann* dokázali.

Zároveň z toho seznáváme, že souhrn všech možných čísel, t. zv. kontinuum čísel nelze uvésti v řadu.

Tím se již naskytá příležitost, tázati se, zda-li lze prvky libovolné množiny linearné neseřaditelné jednoznačně přiřaditi prvkům kontinua. Otázka ta jest příliš důležita, než aby mohla býti zodpověděna bez předeslaných úvah; budu míti později příležitost o tom zvláště pojednati.

Poněvadž se mi o to jedná, podati čtenáři *souvislý* úvod do nauky o množinách, zmíním se ještě toliko o předůležitém pojmu *derivace*. U množin často se vyskytují t. zv. *body hromadné*, které mají tu vlastnost, že se v každém jejich okolí nalezají body množiny dané. Tak je na příklad u množiny

*) Viz o tom definici Cantorovu neb Dedekindovu.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ číslo 0 hromadným; u množiny čísel racionalních je každé číslo bez rozdílu, racionalné neb irracionalné, *hromadným*, jak patrno z definice. Na tomto posledním příkladě seznáváme, že bod hromadný nemusí náležeti množině samé, ale že také je možným případ, že body hromadné jsou zároveň prvky množiny. Má-li množina body hromadné, tvoří tyto o sobě množinu, která může sestávati z konečného neb nekonečného počtu bodů; tato množina sluje *derivací* M′ množiny původní M. Má-li M′ derivaci, znamenáme ji M″ a nazýváme druhou derivací množiny M, atd.

Buď nyní a'' libovolný bod množiny M″, dle definice je a'' hromadným bodem množiny M′, takže v každém jeho okolí nacházejí se body a' množiny M′; poněvadž se v každém okolí bodu a' nalezají dle definice množiny M′ body a množiny M, plyne, že se v každém okolí bodu a'' nalezají body a, t. j. bod a'' náleží prvé derivaci; tudíž veškery prvky derivace druhé jsou zároveň prvky derivace prvé; pravíme, že M″ jest obsaženo v M′.

Každá pantachie má za derivaci kontinuum, jak z výše uvedeného příkladu čísel racionalních vysvitá.

Úlohy.

Řešení úlohy 12.

Zbavena determinantu má rovnice daná podobu

$$\cos^3 x + \sin^3 x - 3 \cos x \sin x = 1,$$

kterou substitucí $\cos x + \sin x = y$ proměníme v

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 1 = 0.$$

Kořeny rovnice této jsou:

$$y_1 = 1, \; y_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Z rovnice $\cos x + \sin x = 1$ obdržíme

$$x_1 = 2n\pi, \; x_2 = \frac{4n+1}{2}\pi;$$