František Machovec

Nový důkaz jisté Steinerovy věty

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 5, 224--227

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109132

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2, \tag{10}$$

cissoidy Diokleovy (obr. 4.). Kružnice $\omega \equiv \omega'$ a ω'' jsou dle bodu B ≡ C souměrně položeny, pročež jest BM = GF = G'F', značí-li GF, G'F' úsečky, z nichž prvou na přímce BM omezuje kružnice ω'' a přímka EF a druhou na téže přímce utíná kružnice ω a asymptota L.

Netřeba podotýkati, že konstrukce tečen i křivek posléze obdržených jest s dřívější konstrukcí tečen totožna, a že geom. místem bodu N ve všech případech jest kardioida.*)

Ku konci budiž ještě podotčeno, že obdobně lze sestrojovati tečny křivek cissoidálných, které vytvoří průsečík M výšek trojúhelníka ABC, když vrchol A pohybuje se v kuželosečce jdoucí pevným vrcholem B tohoto trojúhelníka, kružnice BM'D jest v tomto případě zastoupena kuželosečkou.

Též zajímavy jsou křivky cissoidálné, jež bod M vytvoří, dotýká-li se strana BC trojúhelníka ABC kuželosečky aneb kružnice v bodě B.

Nový důkaz jisté Steinerovy věty.

Podává

F. Machovec, professor v Karlíně.

Jde tu o důkaz věty: „Tečna a normála v libovolném bodě a_1 kuželosečky a obě její osy jsou tečnami paraboly, která se normály dotýká ve středu křivosti místa a_1 oné kuželosečky“.

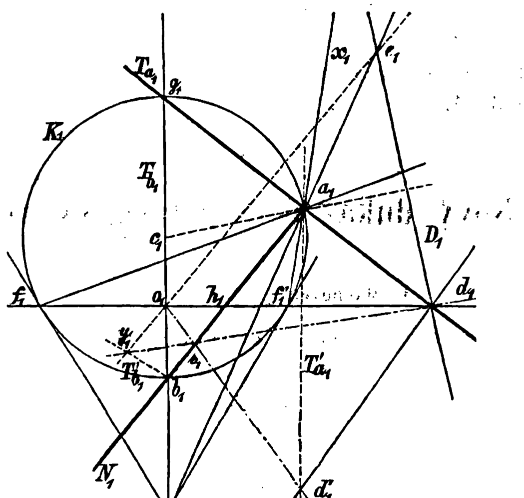
Základní myšlénka, jíž užito bude při důkazu, jest následující:

Kuželosečku E_1 pokládejme za orth. průmět prostorové křivky E. V jednotlivých bodech a... křivky E mysleme si normály N k její promítající ploše válcové. Ty tvoří plochu mimosměrek N. Evoluta kuželosečky E_1 jest obrysem průmětu plochy té. Podél každé přímky N dotýká se plochy N nekonečně mnoho hyperbolických paraboloidů N'. Obrysem průmětu každého toho paraboloidu jest parabola, která se dotýká průmětu přímky N,

*) Touž konstrukci tečen v bodech strofoidy podal V. Tlučhoř, viz „Časopis math. a fysiky,“ roč. XIII, pag. 119.

t. j. normály N_1 kuželosečky E_1 v bodě a_1, v témž místě, ve kterém se jí dotýká evoluta kuželosečky E_1, t. j. ve středu křivosti místa a_1. Průměty čtyř povrchových přímek každého toho paraboloidu jsou tudíž vždy tečnami paraboly, která se normály N_1 dotýká ve středu křivosti s_1 místa a_1. Zvláštní jeden takový paraboloid vede k větě Steinerově.

Vezměme za základ vyšetřování tuto konstrukci tečny a normály v libovolném bodě a_1 kuželosečky: Kružnice K opsaná $\triangle f_1 f_1' a_1$, kdež f_1 a f_1' jsou ohniska kuželosečky, protíná pobočnou osu ve dvou bodech, z nichž jeden určuje s bodem a_1 tečnu a druhý normálu. Při ellipse jest $b_1 a_1$ její normálou N_1 a k tomu případu přihledněme nejprve. Křivku E_1 pokládejme, jak již svrchu bylo uvedeno, za orth. průmět křivky E,



body f_1 a f_1' za průměty přímek F a F' na průmětně M kolmých a kružnice K_1... za průměty kružnic K, protínajících útvary F, F' a E. Kružnice K jsou na jisté ploše K. Plocha tato má s rovinou promítající, která prochází pobočnou osou ellipsy E_1, společnou křivku B, jejíž body b... mají své průměty v b_1... Křivkami E a B a průmětnou M určena jest plocha N. Paraboloid této plochy podél N_a se dotýkající určeme tečnou T_a k

E v bodě a, tečnou T_b k B v bodě b a průmětnou M. Stopou tečny T_a budiž bod d. Stopu tečny T_b určíme potom takto:

Plochy K dotýká se dle kružnice K plocha kuželová, jejíž střed jest průsečníkem rovin tečných plochy K v bodech kružnice K, které mají své průměty v f_1, f_1' a a_1.

Tečné roviny v f a f' jsou kolmy na průmětně a jich stopy jsou tečnami ku K_1 v bodech f_1 a f_1'. Stopou roviny tečné v bodě a jest přímka D, která prochází bodem d a jest kolma na přímce c_1a_1, při čemž c_1 značí střed kružnice K_1. Průmět středu v_1 oné plochy kuželové jest tudíž ve v_1. Rovina promítající, která prochází pobočnou osou ellipsy E_1, protíná tuto plochu kuželovou ve dvou přímkách povrchových, z nichž ta, která prochází bodem b, jest tečnou křivky B v bodě b Poněvadž přímka va oné plochy kuželové má stopu v bodě e, jest stopa přímky $vb \equiv T_b$ na přímce ey, která prochází bodem l a jest rovnoběžná s ab. O této rovnoběžce lze však snadno dokázati, že prochází bodem o_1. Poněvadž totiž body g_1, b_1, o_1 a v_1 jsou harmonické, jest

$$\sphericalangle o_1a_1b_1 = \sphericalangle b_1a_1v_1$$

a poněvadž

$$\sphericalangle f_1a_1g_1 = \sphericalangle g_1a_1x_1,$$

jest i

$$\sphericalangle o_1a_1g_1 = \sphericalangle g_1a_1e_1. \qquad (1)$$

Dále jest

$$\sphericalangle f_1'd_1a_1 = \sphericalangle c_1b_1a_1$$

a

$$\sphericalangle a_1d_1e_1 = \sphericalangle b_1a_1c_1$$

a poněvadž pravé strany obou posledních rovnic jsou stejné, jest

$$\sphericalangle f_1'd_1a_1 = \sphericalangle a_1d_1e_1. \qquad (2)$$

Z 1. a 2. rovnice vyplývá, že

$$a_1e_1 = o_1d_1,$$

z čehož a ze dříve již vytčené rovnosti úhlů $o_1a_1b_1$, a $b_1a_1v_1$ následuje, že $e_1o_1 \parallel a_1b_1$, t. j. že přímka e_1y_1 jest totožná s e_1o_1, čili že e_1y_1 prochází bodem o_1.

I máme nyní již čtyři přímky povrchové hyperbolického paraboloidu N', t. j. přímky T_a, T_b, N_a a přímku od, která jest jeho stopou. Průměty těchto čtyř přímek, t. j. tečna a normála v bodě a_1 kuželosečky a obě její osy, jsou tudíž tečnami paraboly, která se normály N_1 dotýká ve středu křivosti s_1 ellipsy E_1 v místě a_1. Tím jest Steinerova věta dokázána pro ellipsu. Při hyperbole jest postup týž, jen to třeba míti na zřeteli, že body b_1 a g_1 vymění své úlohy a že na místo bodu d_1 nastoupí bod h_1.

Zároveň vyplývá z tohoto vyšetřování, jak lze zobraziti střed křivosti s_1, jakožto průmět bodu, v němž se na průmětně kolmá rovina tečná, procházející přímkou N_a, dotýká plochy N. Voliti jest tu jen místo hyperbolického paraboloidu N′ dosud užitého paraboloid N″, který má útvary řídící T_b, M a tečnu T'_a ku ploše N v bodě a, jejíž promítající rovina jest $\| T_b$ t. j. $T_{a'1} \| T_{b1}$. Poněvadž rovnoběžka s přímkou N bodem d sestrojená jest stopou roviny tečné plochy N v bodě a, jest bod d' stopou přímky T_a' a přímka $d'o$ jest stopou hyperbolického paraboloidu N″. Průsečník s_1 přímek $d_1'o_1$ a N_1 jest tudíž průmětem bodu, v němž se rovina k průmětně kolmá a procházející přímkou N dotýká plochy N, čili s_1 jest středem křivosti místa a_1 kuželosečky E_1. Z toho vyplývá tato konstrukce středu křivosti libovolného místa kuželosečky:

„Z místa a_1 kuželosečky E_1, o jehož střed křivosti jde, spustí se kolmice P na hlavní osu a bodem d_1, v němž tečna kuželosečky v bodě a_1 osu hlavní protíná, vztyčí se na tuto tečnu kolmice R. Na přímce, určené průsečníkem přímek P a R a středem kuželosečky, jest střed křivosti místa a_1."

Hyperbolický paraboloid N‴, jehož útvary řídící jsou T_a, M a tečna T_b' v bodě b k N, pro niž $T_{b1}' \| T_{a1}$, vede k této konstrukci středu křivosti:

„Středem kuželosečky sestrojí se rovnoběžka s normálou N_{a1} a průsekem této normály s osou pobočnou rovnoběžka s tečnou T_{a1}. Bod oběma posledně vytčeným přímkám společný určuje s průsečníkem tečny T_{a1} s osou hlavní přímku, na níž jest střed křivosti místa a_1 dané kuželosečky."

V Karlíně, v únoru 1885.