Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

Konstrukce tečen křivek cissoidálných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 5, 218--224

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109131`

Tato čísla vlastnosti β) tvoří jistou soustavu $\underset{\delta=0}{L}\left(\frac{q}{v}\right)$, kterou chci nazývati *soustavou densitalní* uvažované hmoty v bodě a. Obsahuje-li tato soustava jediné číslo, jest to ono, jež sluje *hustotou* oné hmoty v místě a. Zajisté mohou v přírodě existovati tělesa, která nemají v žádném svém bodě určité hustoty, za to ale určitou soustavu densitalní. Zkušenost zdá se ukazovati, že body soustavy densitalní nacházejí se v jistých dosti úzkých mezích.

Konstrukce tečen křivek cissoidálných.

Napsal

V. Jeřábek,

professor v Brně.

V následujících řádcích vyvineme konstrukci tečen křivek stupně třetího, které velmi úzce souvisí s Queteletovou fokálou všeobecného kužele stupně druhého, strofoidou a cissoidou Diokleovou.

K účelu tomu budiž dán trojúhelník ABC (obr. 1.), jehož strana BC jest pevna, a jehož vrchol A pohybuje se v kružnici ABD jdoucí bodem B. Dokážeme, že geom. místem průsečíku M výšek AM, BM, CM trojúhelníka ABC jest křivka stupně třetího.

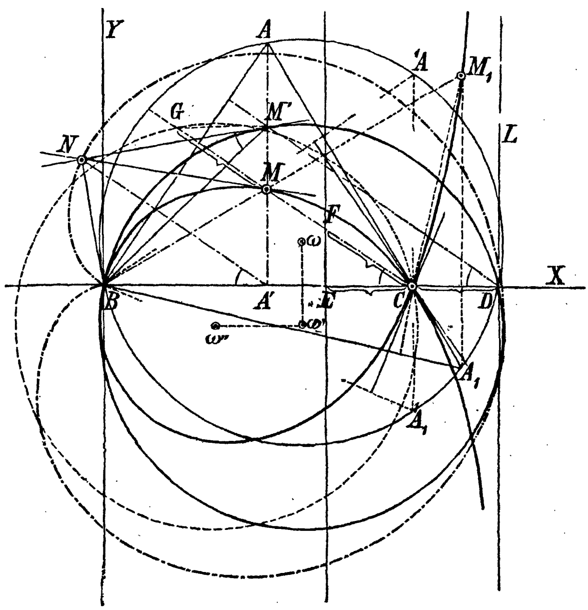
Prodloužená strana AC protíná kružnici ABD ve vrcholu A_1 druhého trojúhelníka A_1BC, jehož výšky A_1M_1, BM_1, CM_1 protínají se v druhém bodě M_1 místa geometrického. Otáčí-li se přímka AA_1 kolem bodu C, vytvoří výšky CM, CM_1 involuční svazek paprskový; jelikož BA, BA_1 též takový svazek vytvoří. Svazek výšek (BM) jest prométný s involučním svazkem paprsků (CM, CM_1), a proto jest výtvarem obou svazků křivka K stupně třetího.

Otočí-li se AA_1 do kolmice ${}^1A\,{}^1A_1$ vztyčené v bodě C na BC, sjednotí se body M, M_1 s bodem C, který za příčinou tou jest dvojným bodem křivky K, a mezní polohy sečen CM, CM_1 jsou tečnami bodu dvojného. Že však výšky CM, CM_1 stále stojí kolmo na hybných stranách BA, BA_1, musejí i tečny bodu dvojného státi kolmo na B 'A, B $'A_1$, z čehož plyne jednoduchá konstrukce tečen v bodě dvojném, která, jak později uvidíme, velmi důležita jest pro sestrojování tečen v jiných bodech křivky K.

Též rovnici křivky K lze snadno obdržeti. K tomu cíli zvolme bod B za počátek a BC za osu X pravoúhlé soustavy souřadnic.

Rovnice přímky jdoucí body A (α, β), C $(a, 0)$ jest

$$\beta x - (\alpha - a) y - a\beta = 0;$$



Obr. 1.

pro kolmici spuštěnou s bodu B (0, 0) na přímku AC obdržíme rovnici

$$\alpha x + \beta y = ax, \tag{1}$$

výšku AM vyjadřuje rovnice

$$x = \alpha, \tag{2}$$

a že bod A (α, β) na kružnici ABD se nalézá, která má bod ω (p, q) za střed, obdržíme podmínku

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2p\alpha - 2q\beta = 0. \tag{3}$$

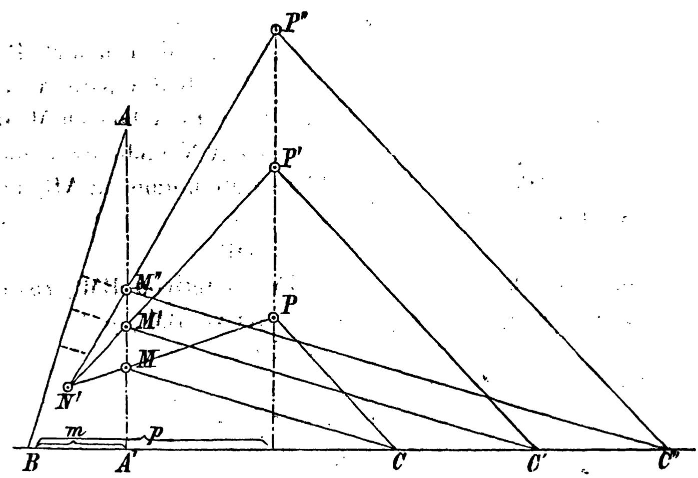
Vyloučíme-li α, β z rovnic (1), (2), (3), obdržíme po krátkém zjednodušení rovnici

$$x(x^2+y^2)-2(ax^2+py^2)+a^2x-2qy(a-x)=0, \quad (4)$$

která též vyjadřuje, že geom. místem bodu M (x, y) jest křivka cyklická stupně třetího.

Je-li a proměnný parametr, t. j. pohybuje-li se vrchol C v ose X, vyjadřuje rovnice (4) soustavu křivek K, K′, K″. . ., a zajímavo jest, že tečny křivek těchto v bodech M, M′, M″, jimž náleží táž úsečka $x=m$, protínají se v témž bodě N. Vlastnosť tuto lze snadno dokázati takto:

Body křivek K, K′, K″ pro $x=m$ a $x=p$ buďtež M, M′, M″ a P, P′, P″ (obr. 2.). Jelikož výšky CM, C′M′, C″M″



Obr. 2.

stojí kolmo na AB, jest CM || C′M′ || C″M″, a z podobné příčiny máme CP || C′P′ || C″P″, pročež

$$\frac{MM'}{M'M''}=\frac{CC'}{C'C''}, \quad \frac{PP'}{P'P''}=\frac{CC'}{C'C''},$$

tedy

$$\frac{MM'}{M'M''}=\frac{PP'}{P'P''},$$

z čehož soudíme, že MP, M′P′, M″P″ protínají se v témž bodě N′. Pro $m=n$ splynou body P, P′, P″ s body M, M′, M″, jejichž tečny jeví se jako mezní polohy sečen MP, M′P′, M″P″, a proto protínají se v témž bodě N.*)

Splyne-li bod C s bodem D, je-li tedy $a = 2p$, obdržíme z rovnice (4)

$$x = 2p \text{ a } x^2 + y^2 - 2px + 2qy = 0, \tag{5}$$

což značí, že v soustavě křivek K, K′, K″,... jedna křivka rozpadá se v přímku rovnoběžnou s osou Y a v kružnici BM′D (obr. 1.) souměrně sdruženou s kružnicí ABD dle osy X. Totéž snadno lze stvrditi geometricky, neboť splyne-li bod C s bodem D, jest trojúhelník ABC vepsán do kruhu ABD, a proto jest geom. místem průsečíku M′ výšek trojúhelníka ABD kružnice BM′D.

Na základě výsledků obdržených a na základě poznámky dříve učiněné o konstrukci tečen v bodě dvojném křivky K stvrdíme, že geom. místem bodu N jest kardioida.

V soustavě křivek K, K′, K″,... budiž K′ kružnicí BM′D, a křivku K″ zvolme tak, aby měla dvojný bod v patě A′ výšky AM. Pro $x = m$ protnou se, jak známo, tečny v bodech M, M′, A′ křivek K, K′, K″ v témž bodě N. Tečna A′N bodu dvojného A′, jakož i výška DM′ trojúhelníka ABD stojí kolmo na AB, pročež jest A′N ‖ DM′ a tedy

$$\sphericalangle BA'N = \sphericalangle BDM'.$$

Poněvadž úhel, který svírá tečna NM′ s tětivou BM′, rovná se úhlu obvodovému, jenž stojí na téže tětivě BM′, jest

$$\sphericalangle BM'N = \sphericalangle BDM'.$$

Z rovnic těchto plyne dále

$$\sphericalangle BA'N = \sphericalangle BM'N,$$

t. j. body A′BNM′ leží v téže kružnici, a protože $\sphericalangle BA'M' = 90^0$, jest i $\sphericalangle BNM' = 90^0$, což dokazuje, že geom. místem bodu N jest úpatnice kružnice BM′D pro pol B, která slove kardioida.

Konstrukce tečny v bodě M křivky K zakládá se tedy na sestrojení bodu N, jenž s bodem M určuje tečnu MN tohoto bodu. Bod N jest však patou kolmice spuštěné s bodu B na tečnu M′N, aneb jest průsečíkem kolmice spuštěné s bodu A′ na AB s tečnou M′N; v obou tedy případech lze bod N a tím i tečnu bodu M sesrojiti. Nyní též snadno lze poznati, že kol-

*) Poněvadž vedení důkazu tohoto na tvaru křivky jest nezávislé, platí vlastnosť dokázaná o každé soustavě křivek, které body M, M′, M″ vytvoří, když vrchol A pohybuje se po křivce jakékoliv.

mice vztyčená v bodě D na osu X jest společnou asymptotou křivek K, K′, K″. . .

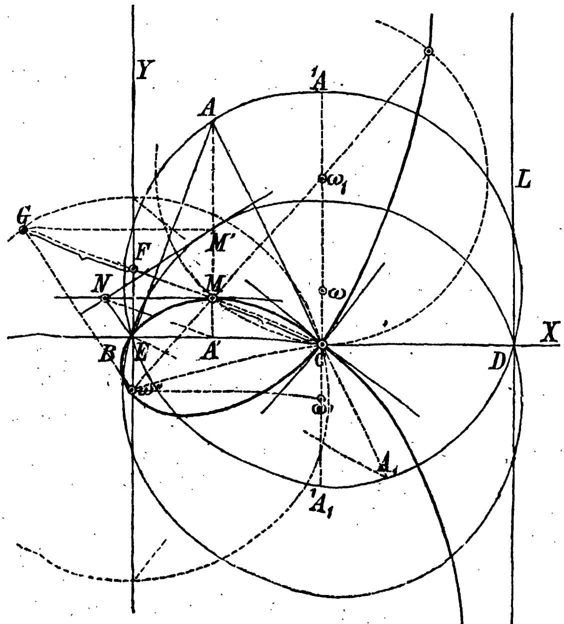
Nyní ještě dokážeme, že K jest křivkou cissoidálnou.

Pošiňme kružnici BM′D čili ω' do polohy ω'' ve směru DC a o délku DC, při čemž bod M′ pošine se do bodu G, sestrojme dále přímku EF, která dle bodu C s asymptotou L jest souměrně sdružena. Přímka EF protíná osu X v bodě E a přímku CM v bodě F. Ze shodných trojúhelníků CEF, GM′M plyne, že MG $=$ CF, což připomíná nám známou vlastnost cissoidy Diokleovy, a proto mohli bychom křivku K nazvati všeobecnou cissoidou.

Abychom nyní k souvislosti křivky K s Queteletovou křivkou fokální, strofoidou a cissoidou Diokleovou poukázali, položme nejdříve v rovnici (4) $a = p$, i obdržíme rovnici

$$x(x^2+y^2) - 2p(x^2+y^2) + p^2x - 2qy(p-x) = 0. \quad (6)$$

V případě tomto (obr. 3.) sjednocuje se totiž přímka EF s osou Y, a střed ω'' pošinuté kružnice přijde též do osy Y. Spojíme-li



Obr. 3.

ω'' s bodem M, protne přímka ω''M přímku $\omega\omega'$ v bodě ω_1, tak že ze shodných trojúhelníků ω''CM, ω''GF plyne, že $\omega''F = \omega''M$. Jelikož rovnoramenný trojúhelník ω''FM jest podoben trojúhelníku ω_1CM, jest $\omega_1 M = \omega_1 C$, což jest známá vlastnosť křivky fokální.

Položíme-li v rovnici (4) $a = o$, obdržíme

$$x(x^2 + y^2) - 2py^2 + 2qxy = 0. \qquad (7)$$

Je-li BD průměrem kruhu BM'D čili ω, jest $q = 0$, z kteréžto příčiny kružnice ω' sjednotí se s kružnicí ω, jejíž poloměr $r = p$. Dosadíme-li hodnoty uvedené do rovnice (4), obdržíme rovnici křivky K dle osy X souměrně položené

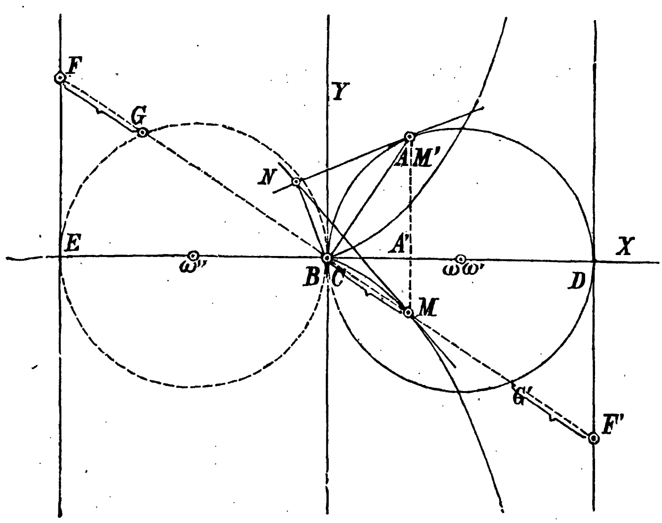
$$x(x^2 + y^2) - 2(ax^2 + ry^2) + a^2x = 0 \text{ *)}. \qquad (8)$$

Položíme-li v rovnici této $a = r$, aneb v rovnici (6) $a = r$, $q = o$, obdržíme rovnici

$$x(x^2 + y^2) - 2r(x^2 + y^2) + r^2x = 0 \qquad (9)$$

Queteletovy fokální křivky válce, čili strofoidy.

Z rovnice (8) pro $a = 0$ aneb z rovnice (7) pro $p = r$ a $q = 0$ plyne rovnice



Obr. 4.

*) Pro $a = \frac{3r}{2}$ rovnice tato značí trisektorii, o které pojednal řed. J. Lošťák v „Časopise math. a fysiky," ročník XIV, pag. 38.

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2, \qquad (10)$$

cissoidy Diokleovy (obr. 4.). Kružnice $\omega \equiv \omega'$ a ω'' jsou dle bodu $B \equiv C$ souměrně položeny, pročež jest BM = GF = G'F', značí-li GF, G'F' úsečky, z nichž prvou na přímce BM omezuje kružnice ω'' a přímka EF a druhou na téže přímce utíná kružnice ω a asymptota L.

Netřeba podotýkati, že konstrukce tečen i křivek posléze obdržených jest s dřívější konstrukcí tečen totožna, a že geom. místem bodu N ve všech případech jest kardioida.*)

Ku konci budiž ještě podotčeno, že obdobně lze sestrojovati tečny křivek cissoidálných, které vytvoří průsečík M výšek trojúhelníka ABC, když vrchol A pohybuje se v kuželosečce jdoucí pevným vrcholem B tohoto trojúhelníka, kružnice BM'D jest v tomto případě zastoupena kuželosečkou.

Též zajímavy jsou křivky cissoidálné, jež bod M vytvoří, dotýká-li se strana BC trojúhelníka ABC kuželosečky aneb kružnice v bodě B.

Nový důkaz jisté Steinerovy věty.

Podává

F. Machovec, professor v Karlíně.

Jde tu o důkaz věty: „Tečna a normála v libovolném bodě a_1 kuželosečky a obě její osy jsou tečnami paraboly, která se normály dotýká ve středu křivosti místa a_1 oné kuželosečky".

Základní myšlénka, jíž užito bude při důkazu, jest následující:

Kuželosečku E_1 pokládejme za orth. průmět prostorové křivky E. V jednotlivých bodech $a \ldots$ křivky E mysleme si normály N k její promítající ploše válcové. Ty tvoří plochu mimosměrek N. Evoluta kuželosečky E_1 jest obrysem průmětu plochy té. Podél každé přímky N dotýká se plochy N nekonečně mnoho hyperbolických paraboloidů N'. Obrysem průmětu každého toho paraboloidu jest parabola, která se dotýká průmětu přímky N,

*) Touž konstrukci tečen v bodech strofoidy podal V. Tluchoř, viz „Časopis math. a fysiky," roč. XIII, pag. 119.