

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Zahradník
Křivky cissoidální

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 3, 183--185

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109124>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1873

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Označíme-li přímkou $\frac{Q_3}{l_3} - \frac{Q_2}{l_2} = 0 = S_1$ a podobně ostatní dvě cyklickou záměnou, a přihlížíme-li k rovnici (2) obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{l_3}{l_2} &= \frac{\sin(Q_3 S_1)}{\sin(Q_2 S_1)}, \\ \frac{l_1}{l_3} &= \frac{\sin(Q_1 S_2)}{\sin(Q_3 S_2)}, \\ \frac{l_2}{l_1} &= \frac{\sin(Q_2 S_3)}{\sin(Q_1 S_3)}.\end{aligned}$$

Součin těchto tří rovnic podává nám geometrickou podmínečnou rovnici pro involuci šesti přímek a sice

$$\lambda = \frac{\sin(Q_3 S_1) \sin(Q_2 S_2) \sin(Q_1 S_3)}{\sin(Q_2 S_1) \sin(Q_1 S_2) \sin(Q_3 S_3)}.$$

Jak již dříve obecně podotknuto, dá se tato rovnice též z rovnice (11) přímo vyvinouti, neb značí nám jednu a tutéž podmínku. Záměnou Q_1 s S_1 neb Q_2 s S_2 neb Q_3 s S_3 obdržíme tři nové rovnice pro tutéž podmínku. *)

(Dokončeni).

Křivky cissoidální.

(Podává *K. Zahradník*).

Dána budiž libovolná kuželosečka K a přímka P (obr. 10.); na kuželosečce volně libovolný bod o za vrchol svazku paprskového a za střed souřadnic. Q budiž paprsek tohoto svazku; i protíná nám kuželosečku K v jediném bodě $m_2(x_2 y_2)$, mimo vrchol o a přímku P v bodě $m_1(x_1 y_1)$. Naneseme-li tětivu $\overline{om_2}$ od bodu m_2 na paprsku Q směrem k o bude $\overline{om_2} = m_3 m_1$ čímž obdržíme bod $m_3(x_3 y_3)$. Každému paprsku Q přísluší určitý jediný bod m_3 a geometrické místo všech bodů m_3 uvedeným zákonem vytvořených jest křivka stupně třetího, již z obdoby vytvoření křivkou cissoidálníou jmenovati chceme.

* Porovnej *Živa* pg. 87.

Odečteme-li od rovnice $om_2 = m_3 m_1$ společnou délku om_1 obdržíme

$$\overline{om_3} = \overline{m_2 m_1} \quad (1)$$

základní to rovnici křivky cissoidální.

Promítneme-li délky $\overline{om_3}$ a $\overline{m_2 m_1}$ do os, obdržíme pomocí souřadnic bodů m_i dvě nové rovnice, které nám rovnici (1) úplně nahraží a sice

$$x_3 = x_1 - x_2 \quad (2)$$

$$y_3 = y_1 - y_2. \quad (3)$$

Souřadnice bodu m_2 a m_1 vypočteme jakožto průseky přímkou Q s kuželosečkou K a přímkou P , jejichž rovnice

$$K \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

$$P \equiv mx + ny + p = 0$$

$$Q \equiv y - ux = 0$$

Řešením plyne:

$$(QP) = m_1 \begin{cases} x_1 = -\frac{p}{m + nu} \\ y_1 = -\frac{pu}{m + nu} \end{cases}$$

$$(QK) = m_2 \begin{cases} x_2 = -\frac{d + eu}{a + bu + cu^2} \\ y_2 = -\frac{(d + eu)u}{a + bu + cu^2} \end{cases}$$

Vložíme-li hodnoty tyto do rovnic (2) a (3) obdržíme

$$x_3 = -\frac{p}{m + nu} + \frac{d + eu}{a + bu + cu^2}$$

$$y_3 = -\left(\frac{p}{m + nu} + \frac{d + eu}{a + bu + cu^2}\right)u. \quad (5)$$

Místo x_3, y_3 jakožto souřadnic bodu proměnného můžeme psát xy . Každé hodnotě za u přísluší určité x a y , tedy určitý bod m na cissoidě. Proměnnou u , pomocí níž můžeme souřadnice libovolného bodu m cissoidy jednoznačně určit, nazýváme parametrem bodu m . Rovnici v souřadnicích rovnoběžných obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (4) a (5) proměnnou veličinu u .

Z (5) plyne $u = \frac{y}{x}$, což vložíme-li do rovnice (4) způsobuje $(ax^2 + bxy + cy^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + ey) = 0$. (6)

Provedeme-li násobení, přejde rovnice tato v rovnici tvaru *)
 $a_1 x^3 + b_1 x^2 y + c_1 x y^2 + d_1 y^3 + e_1 x^2 + f_1 x y + g_1 y^2 = 0$ (7)
 z čehož seznáváme, že každá křivka má bod dvojný.

Všeobecná rovnice křivek stupně třetího s dvojným bodem má tvar (7); vyskytuje se v ní šest konstant, z čehož vysvítá, že křivka stupně třetího dvojným bodem, šesti body a bodem dvojným úplně určená jest. Z vyvinutí vysvítá, že v rovnici křivky cissoidální (7) též šesti libovolnými konstantami vládneme, čtyřmi od $K \equiv 0$, dvě od $P \equiv 0$, z čehož patrně, že každá křivka stupně třetího s dvojným bodem jest křivkou cissoidální. Rovnice cissoidy Dioklesovy obdržíme z rovnice všeobecné, položíme-li

$a = 1, b = 0, c = 1, d = -a, e = 0, n = 0, \frac{m}{p} = -a;$
 ze (6) ve tvaru

$$y = x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

aneb z rovnic (4), (5) vyjadřenou pomocí parametru u ve formě:

$$x = \frac{au^2}{1+u^2}, \quad y = \frac{au^3}{1+u^2}.$$

K rovnicím těmto se v příštím sešitu vrátíme, hodlajíce zevrubně cissoidu Dioklesovu pojednati na základě parametru jednoznačného.

Čtyry poučky o ellipsách a ellipsoidech.

(Sděluje *Fr. Strnad*, technik.)

I.

Budiž dáno n přímek v rovině. Místo bodu, pro který součet čtverců vzdáleností od daných přímek má stálou hodnotu k , jest ellipsa. Různým hodnotám k přísluší ellipsy podobné a podobně rozložené, jejichž společný střed činí součet (k)

*) Viz: Dr. *Em. Weyr*: Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Prag 1870, jakož i jeho „Geometrische Mittheilungen I. II. Sitzungsberichte d. k. Akademie 1870 Wien, kdež p. Weyr přechetné zajímavé vlastnosti křivek 3. stupně s dvojným bodem vyvinuje.