Příklady

ad a) $3^2 = 4 + 5$ tudíž $3^2 + 4^2 = 5^2$

$5^2 = 12 + 13$ „ $5^2 + 12^2 = 13^2$

$7^2 = 24 + 25$ „ $7^2 + 24^2 = 25^2$ a t. d.

ad b) 6 dá $(\frac{6}{2})^2 = 9$ tudíž $6^2 + 8^2 = 10^2$

8 „ $4^2 = 16$ „ $8^2 + 15^2 = 17^2$

10 „ $5^2 = 25$ „ $10^2 + 24^2 = 26^2$ a t. d.

Důkaz:

ad a) $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$

ale $(2n^2+2n) + (2n^2+2n+1) = (2n+1)^2$

ad b) $(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$.

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.*)

(Pokračování.)

Na str. 70., 80. a 144. bylo upotřebeno determinantů, aby se určil obsah trojúhelníku a čtyrstěnu pomocí souřadnic vrcholů neb rovnic útvaru omezujících. Nyní jest nám tedy ještě vyložiti spůsob, jakým se pomocí determinantů určuje obsah trojúhelníku a čtyrstěnu, známe-li délky tuto hran, onde stran.

Značí-li, jako prvé, x_k, y_k souřadnice vrcholu B_k, jest podle vzorce (2) pag. 70. obsah trojúhelníku $B_1\ B_2\ B_3$ vyjádřen vzorcem

$$2\varDelta = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

aneb nahradíme-li determinant tento determinantem stupně čtvrtého,*) vzorcem

$$2\varDelta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_1, & y_1 \\ 0, & 1, & x_2, & y_2 \\ 0, & 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix};$$

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 21.

vyměníme-li v determinantu tomto první dva sloupce, obdržíme podle známé poučky [1])

$$2\Delta = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x_1, & y_1 \\ 1, & 0, & x_2, & y_2 \\ 1, & 0, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

a znásobíme-li obě rovnice tyto podle známého pravidla [2])

$$4\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 1, & 1 & 1 & 1 \\ 1, & x_1 x_1 + y_1 y_1, & x_2 x_1 + y_2 y_1, & x_3 x_1 + y_3 y_1 \\ 1, & x_1 x_2 + y_1 y_2, & x_2 x_2 + y_2 y_2, & x_3 x_2 + y_3 y_2 \\ 1, & x_1 x_3 + y_1 y_3, & x_2 x_3 + y_2 y_3, & x_3 x_3 + y_3 y_3 \end{vmatrix},$$

znásobíme-li prvky všech řádků — 2 a dělíme-li celý determinant 16, nezmění se hodnota jeho [3]), povstane však

$$4\Delta^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0, & -2 & -2 & -2 \\ -2, & -2(x_1^2+y_1^2), & -2(x_2x_1+y_2y_1), & -2(x_3x_1+y_3y_1) \\ -2, & -2(x_1x_2+y_1y_2), & -2(x_2^2+y_2^2), & -2(x_3x_2+y_3y_2) \\ -2, & -2(x_1x_3+y_1y_3), & -2(x_2x_3+y_2y_3), & -2(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix},$$

z čehož jde, dělíme-li prvky prvního řádku a prvního sloupce — 2 a násobíme-li celý determinant tudíž 4,

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1 & 1 & 1 \\ 1, & -2(x_1^2+y_1^2), & -2(x_2x_1+y_2y_1), & -2(x_3x_1+y_3y_1) \\ 1, & -2(x_1x_2+y_1y_2), & -2(x_2^2+y_2^2), & -2(x_3x_2+y_3y_2) \\ 1, & -2(x_1x_3+x_1x_3), & -2(x_2x_3+y_2y_3), & -2(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix};$$

připočteme-li pak k prvkům

$$\left.\begin{matrix}\text{druhého}\\ \text{třetího}\\ \text{čtvrtého}\end{matrix}\right\} \text{ sloupce a řádku } \left\{\begin{matrix} x_1^2+y_1^2 \\ x_2^2+y_2^2 \\ x_3^2+y_3^2 \end{matrix}\right\} \text{ krát}$$

hodnotu prvků prvního sloupce a řádku, čímž se hodnota determinantu nezmění [4]), obdržíme snadno

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1 & 1_1 & 1 \\ 1, & 0 & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2, & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 \\ 1, & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & 0 & (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 \\ 1, & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2, & (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 & 0 \end{vmatrix},$$

z čehož povstane, jmenujeme-li stranu $B_1 B_2$ krátce a, stranu $B_1 B_3$ krátce b a stranu $B_2 B_3$ krátce c a považíme-li, že

[1]) ibid. pag. 22. [2]) ibid pag. 35. [3]) ibid. pag. 24. [4]) ibid. pag. 26.

všeobecně tu $\quad B^2_{pq} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2,$

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2 \\ 1, & a^2, & 0, & c^2 \\ 1, & b^2, & c^2, & 0 \end{vmatrix};$$

znásobíme-li prvky všech sloupců součinem abc a dělíme-li prvky

$$\left.\begin{array}{l}\text{druhého}\\ \text{třetího}\\ \text{čtvrtého}\end{array}\right\}\text{ sloupce a řádku součinem }\left\{\begin{array}{l}ab\\ ac\\ bc\end{array}\right.,$$

obdržíme co konečný vzorec pro určení plochy trojúhelníku

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0, & c, & b, & a \\ c, & 0, & a, & b \\ b, & a, & 0, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix},$$

kdež vyskytuje se tedy souměrný determinant stupně čtvrtého s příčkou prázdnou [1]).

Připočteme-li prvky třech řádků posledních k prvkům řádku prvního, bude $a+b+c$ možná vyloučiti co společného činitele; podobným spůsobem vyloučí se $a+b-c$ atd., čímž se konečně přijde k známému vzorci

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kdež zavedeno označení

$$2s = a+b+c.$$

Co tu o ploše trojúhelníku bylo pověděno, možná provésti i u vzorce vyjadřujícího obsah čtyrstěnu souřadnicemi jeho rohů. Jak známo platí tu vzorec

$$6T = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix},$$

z něhož se známým spůsobem vyvede

$$36T^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & \Sigma x_1^2, & \Sigma x_1x_2, & \Sigma x_1x_3, & \Sigma x_1x_4 \\ 1, & \Sigma x_1x_2, & \Sigma x_2^2, & \Sigma x_2x_3, & \Sigma x_2x_4 \\ 1, & \Sigma x_1x_3, & \Sigma x_2x_3, & \Sigma x_3^2, & \Sigma x_3x_4 \\ 1, & \Sigma x_1x_4, & \Sigma x_2x_4, & \Sigma x_3x_4, & \Sigma x_4^2 \end{vmatrix},$$

[1]) ibid. pag. 26.

zavede-li se označení

$$\Sigma x_p x_q = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q;$$

z tohoto tvaru přijde se příslušným násobením a dělením — 2 konečně k vzorci

$$288\,T^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ 1, & a^2, & 0, & d^2, & e^2 \\ 1, & b^2, & d^2, & 0, & f^2 \\ 1, & c^2, & e^2, & f^2, & 0, \end{vmatrix},$$

kdež $a, b, \ldots, f$ označují délky jednotlivých hran.

Že tu další zkracování neb přeměňování determinantu není možné tak, jak se dělo u výrazu pro plochu trojúhelníkovou, založeno v podstatě věci samy.

O účincích vodičů souměrně uspořádaných.

(Dopis ku komisi Akademie Pařížské stran zařízení hromosvodů.)

(Od prof. *K. V. Zengera.)*

Již dávno známo jest, že statická elektřina vždy jen na povrchu vodičů se shromažďuje. Z toho následuje, že se mohou vodiči i nevodiči uchrániti před účinky elektřiny, prokryjou-li se vodičem, na němž elektřina se nashromaždí, je-li v okamžiku výboje elektrického s tělesem vnitřním ve spojení.

Kdyby totiž byla obě tělesa sesilována, nastal by návod; ale i tento návod jest nullou, má-li jedno těleso podobu koule, poněvadž elektrické částice koule zevnější jsou souměrně rozloženy kolem povrchu koule vnitřní; pročež nemožno znamenati napnutí elektrické při známém pokusu, vzdalujeme-li pokrývající dvě polokoule od koule vnitřní. Veškerá elektřina nachází se pak na těchto zevnitřních polokoulích. Podmínky, aby ani sdělením ani návodem elektrické napnutí nepovstalo na vnitřním tělese, ať si je vodičem čili nic, jsou tedy: Za prvé, že při nabíjení elektřinou obě tělesa se dotýkají neb vodičem spojena jsou; za druhé, aby vodič zevnější souměrně byl položen kolem tělesa vnitřního, by jej chrániti mohl před účinkem elektrickým.