

Václav Obešlo

O logaritmicko-grafickém počítání. [III.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 4-5, 475--486

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109111>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1916

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

v kterých profata jest rovinou vrcholovou $U \parallel S$. V obrazci sestrojena jen jedna asymptota SU před nárysnou pomocí půdorysné stopy U_0U tečné roviny podél povrchové přímky VU_0 , dotýkající se v bodě U_0 průsečné kružnice r kuželové plochy půdorysnou; stopa $S^p \equiv UA$ jest tečnou této kružnice. Křivka k' jest hyperbola mající s hyperbolou k tutěž vedlejší poloosu b , jak patrnó ze vztahu $mn = b^2$, který promítáním přenáší se z prostoru z k na k' . Sestrojíme-li ještě $V'V_0 \perp S'U$, jest

$$UA = UU_0 = V_0V'.$$

Ze shodnosti $\triangle UAS'$ a $V'V_0S'$ plyne, že i $S'U = S'V'$. A ježto U jest průsečík asymptoty $S'U$ hyperboly k' s její vrcholovou tečnou AU , ukázáno, že V' jest vskutku ohniskem hyperboly k' .

O logaritmicko-grafickém počítání.

Napsal Václav Obešlo.

(Dokončení.)

30. Cesta logaritmicko-grafická vede nás též k řešení soustavy **2 rovnic o 2 neznámých**. Postup jest zde ovšem značně zdlouhavější než při rovnici o 1 neznámé³⁶⁾. Uvažujme dvě reálné rovnice

$$f(x, y) = 0. \quad g(x, y) = 0 \quad (1)$$

o neznámých x, y . Pišme rovnice ty ve tvaru

$$f_1(x, y) = f_2(x, y), \quad g_1(x, y) = g_2(x, y) \quad (2)$$

a uvažujme funkce

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y); \quad z = g_1(x, y), \quad z = g_2(x, y) \quad (3)$$

stanovme jejich logaritmické obrazy.

³⁶⁾ Budiž podotknuto, že náš uvažovaný postup řešení rovnic jest pouze jedním z postupů, jež skytá nám nomografie, takže v některých případech bude výhodnější jiný způsob. Viz: V. Láska, Nomografie.

Logaritmickým obrazem funkce $z = \varphi(x, y)$ rozumíme plochu, jež jest vytvořena bodem $(\log x, \log y, \log z)$, kde hodnoty x, y, z splňují danou rovnici. Budeme opět uvažovati speciálně rovnice algebraické. Tu jest především patrné, že logaritmickým obrazem funkce

$$z = ax^m y^n$$

jest rovina

$$\log z = \log a + m \log x + n \log y$$

čili

$$z_1 = \log a + mx_1 + ny_1$$

— při obvyklém způsobu označení, — která protíná osu z v bodě $\log a$, rovinu xz v přímce o směrnici m , rovinu yz v přímce o směrnici n .

Máme-li pak mocninovou funkci

$$z = ax^m y^n + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + \dots,$$

sestrojíme nejprve roviny odpovídající jednotlivým členům a pak provádíme na jednotlivých pořadnicích (kolmých k xy) logaritmické sečítání. Koncové body vytvoří hledanou plochu P . Jde-li nám o tvar této plochy, uvažujme nejprve mnohostěn tvořený uvedenými rovinami; některé stěny jeho jsou otevřeny, t. j. mnohoúhelníky vyfaté na nich ostatními stěnami probíhají v některém směru do nekonečna. Uvážíme-li pak, že v rovinách kolmých k (xy) obdržíme průsečnou křivku s výslednou plochou z průsečnic s rovinami logaritmickým sečítáním, jest z odst. 26. patrné, že každá otevřená stěna mnohostěnu jest asymptotickou rovinou plochy P . Skládá-li se pak naše funkce pouze ze dvou nebo ze tří členů, jsou obě dvě resp. všechny tři stěny mnohoštěnu otevřeny, všechny jsou tedy rovinami asymptotickými. V případě dvou členů jest plocha P válcem rovnoběžným s průsečnicí obou rovin (viz odst. 25. o závislosti BC na AB). Jestliže pak uvažovaná funkce skládá se z členů kladných i záporných, píšme ji ve tvaru

$$f = f_1 - f_2$$

a pořadnice bodů ploch P_1, P_2 logaritmicky odčítejme. Protínají-li se plochy P_1, P_2 v křivce k , jest válec vedený touto křivkou směrem záporné osy z asymptotickým válcem plochy P .

V tomto smyslu jsou logaritmickými obrazy jednotlivých funkcí (3) plochy $F_1, F_2; G_1, G_2$. Plochy F_1, F_2 nechť protnou se v křivce u , plochy G_1, G_2 v křivce v . Sestrojíme průměty obou těchto křivek na rovinu (xy) ; pak jejich vzájemné průsečky určují svými souřadnicemi x, y kladné kořeny rovnic (1). Dvojice kořenů $x < 0, y > 0$ obdržíme jako kladné kořeny rovnic $f(-x, y) = 0, g(-x, y) = 0$, atd.

Příklad (viz obr. 15.). Při praktickém provádění znázorníme si rovinu (xy) na logaritmickém papíře o osách x, y . Jednotlivé body křivek u, v sestrojíme v rovinách rovnoběžných nejjednodušeji s rovinou (xz) tak, že nárys posuneme vůči půdorysu o jednu, případně dvě délky modulu (osa z jest tedy v prodloužení osy y).

V obr. 6. stanoveny kladné kořeny soustavy rovnic

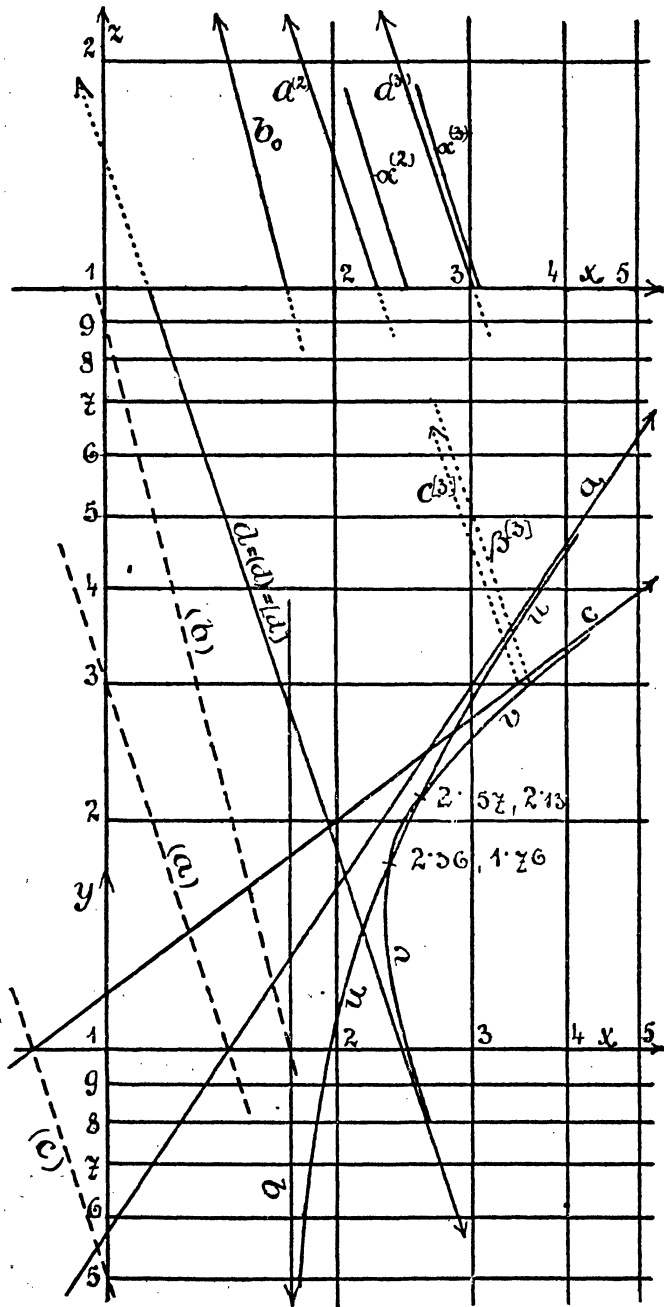
$$\begin{aligned}y^4 - 3xy^2 - 9 &= 0 \\ 2x^3y - y^5 - 30 &= 0.\end{aligned}$$

Pišme ji ve tvaru

$$\begin{aligned}3x^{-3}y^2 + 9x^{-4} &= 1 \\ 0.5x^{-3}y^4 + 15x^{-3}y^{-1} &= 1,\end{aligned}$$

takže pravé strany obou rovnic jsou vyznačeny rovinou (xy) . Půdorysné stopy obrazů členů $3x^{-3}y^2, \dots, 15x^{-3}y^{-1}$ buďte a, b, c, d . Nárysné stopy $(a), (b), (c), (d)$ nakresleny pro zjednodušení čárkovaně do soustavy xy , místo do soustavy xz . (Zde jest $d \equiv (d)$). Roviny $y = 2, y = 3, \dots$ nechť protínají rovinu A v přímkách $a^{(2)}, a^{(3)}, \dots$; rovinu B protínají v přímkách, jichž společným nárysem jest druhý obraz b_0 této roviny. Logaritmickým sečítáním sestrojíme nyní nárysy $a^{(2)}, a^{(3)}, \dots$ křivek, v nichž roviny $2, 3, \dots$ protínají válec, jenž jest obrazem levé strany první rovnice; půdorysné stopy křivek těch vedou nás k bodům křivky u . Stopy a, b asymptotických rovin A, B jsou asymptotami řezu u roviny (xy) s válcem.

Pro druhou rovnici máme případ jednodušší, neboť válec levé strany jest rovnoběžný s rovinou xz (jak plyne odtud, že mocnitéle při x obou členů jsou stejné, rovny -3 ; kdyby takový případ nastal vzhledem k y , jest nejlépe zaměnění v obou



Obr. 15.

rovnících x a y ³⁷⁾). Zde jest stanoven bod křivky v v rovině $y = 3$ a to pro jednoduchost tak, že nárysná osa x posunuta přímo do přímky $y = 3$. Obraz $\beta^{[3]}$ povrchové přímky válce plyne logarithmickým sečítáním z obrazů $c^{[3]}$ resp. $[d] \equiv d \equiv (d)$ průsečných přímek roviny $y = 3$ s rovinami C, D . Průsečík přímky $\beta^{[3]}$ s přímkou $y = 3$ jest již bodem křivky v . Tak najdeme též body této křivky na př. na přímkách 2·5, 2, 1·6. Křivky u, v protínají se ve dvou bodech, jejichž souřadnice

$$x_1 = 2·36, y_1 = 1·76; x_2 = 2·57, y_2 = 2·13$$

vedou nás ke kladným kořenům daných rovnic.

31. Zavedením **pohyblivých soustav** dospějeme i při rovnicích o 2 neznámých k mechanickému řešení. Budiž dán logarithmický obraz mocninové funkce

$$z = \pm ax^m y^n \pm a_1 x^{m_1} y^{n_1} \pm \dots \pm a_k x^{m_k} y^{n_k}$$

a posuňme jej o délky $\log \alpha, \log \beta, \log \gamma$ měřené ve směru os x, y, z . Pak bod $(\log x, \log y, \log z)$ plochy měl před posunutím souřadnice

$$\log x - \log \alpha = \log \frac{x}{\alpha}, \log y - \log \beta = \log \frac{y}{\beta},$$

$$\log z - \log \gamma = \log \frac{z}{\gamma},$$

takže posunutá plocha jest logarithmickým obrazem funkce

$$z = \pm \frac{a\gamma}{\alpha^m \beta^n} x^m y^n \pm \frac{a_1 \gamma}{\alpha^{m_1} \beta^{n_1}} x^{m_1} y^{n_1} \pm \frac{a_2 \gamma}{\alpha^{m_2} \beta^{n_2}} x^{m_2} y^{n_2} \pm \dots$$

Poněvadž disponujeme zde třemi proměnnými α, β, γ , hledejme takové posunutí, aby tři koeficienty poslední rovnice byly rovny jedné; tedy

$$\frac{a\gamma}{\alpha^m \beta^n} = 1, \frac{a_1 \gamma}{\alpha^{m_1} \beta^{n_1}} = 1, \frac{a_2 \gamma}{\alpha^{m_2} \beta^{n_2}} = 1$$

čili

$$\begin{aligned} m \log \alpha + n \log \beta - \log \gamma &= \log a \\ m_1 \log \alpha + n_1 \log \beta - \log \gamma &= \log a_1 \\ m_2 \log \alpha + n_2 \log \beta - \log \gamma &= \log a_2. \end{aligned}$$

Obraz dané funkce nutno tedy v tomto případě posunouti tak, aby počátek přešel do průsečíka tří rovin odpovídajících příslušným členům, jak bylo předem zřejmo.

³⁷⁾ K tomu jest tedy třeba vzíti zřetel dříve než započneme konstrukci!

Průsečíkem jest jediný bod v konečnu, jestliže determinant

$$\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \\ m_2 & n_2 & 1 \end{vmatrix}$$

soustavy posledních tří rovnic není roven nule. — Je-li roven nule, jsou všechny tři roviny rovnoběžny; neprocházejí-li při tom touž přímkou, možno je posunouti jen tak, aby dvě z nich procházely počátkem; jsou-li pak všechny tři roviny navzájem rovnoběžny, může pouze jedna z nich procházeti počátkem. V těchto případech mohou tedy jen dva resp. jen jeden z koeficientů příslušných přejíti v jednu.

32. Předpokládejme ³⁸⁾, že jedna z daných dvou rovnic o 2 neznámých skládá se jen ze *tří členů*. Pak možno jí dáti tvar

$$\pm ax^ky^l \pm bx^my^n = c \quad (1)$$

Pravá strana jest zobrazena rovinou rovnoběžnou k (xy) , levá strana plochou válcovou, kterou možno získati určitým posunutím rovnoběžným k rovině (xy) z válcové plochy, jež jest obrazem funkce

$$z = \pm x^ky^l \pm x^my^n \quad 39)$$

Ježto pak všechny k rovině (xy) rovnoběžné řezy tohoto válce jsou navzájem shodny, má křivka u pro každou hodnotu mocnitelů k, l, m, n rovnice (1) konstantní tvar a s různými hodnotami koeficientů a, b mění se pouze poloha této křivky, kterou jsme si nanесли na průsvitný papír.

Má-li jedna z obou rovnic *čtyři členy*, uvedme ji na tvar

$$\pm ax^hy^i \pm bx^ky^l \pm cx^my^n = d \quad (2)$$

Levá strana jest zde zobrazena plochou, která vznikne posunutím logaritmického obrazu funkce

$$z = \pm x^hy^i \pm x^ky^l \pm x^my^n.$$

Vodorovné řezy této plochy, z nichž jeden vede ke křivce u dané rovnice (2), tvoří soustavu α , křivek, kterou jest tedy zde

³⁸⁾ *Mehmke*: Neues Verf. zur Best. der reellen Wurzeln zweier numer. alg. Gleichung mit zwei Unbekannten. (Zeitschr. für Math. u. Physik XXXV.)

³⁹⁾ Posuneme tak, až průsečnice rovin ax^ky^l, bx^my^n prochází počátkem.

nutno nanésti na průsvitný papír. Geometrický názor vede nás pak snadno ke správnému posunutí této soustavy odpovídajícímu danému případu rovnice (2).

Z toho vidíme, že ke **graficko-mechanickému řešení** dvou rovnic určitého tvaru o 2 neznámých jest při naší logaritmické metodě třeba dvou jednotlivých křivek nebo jedné křivky a jedné soustavy α^1 křivek nebo dvou soustav, dle toho, mají-li obě rovnice tři členy nebo jedna tři členy a jedna čtyři členy nebo obě čtyři členy.

33. Jestliže přesnost kořenů rovnic, s jakou plynou nám methodou grafickou, nestačí, použijeme těchto přibližných výsledků k výpočtu výsledků dostatečně přesných. Pro rovnici o 1 neznámé budiž zde kromě známých způsobů citován způsob uvedený ve článku: *Mehmke*, Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln reeller algebraischer oder transcendenten numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten. (Teubner, Dresden 1890). Pro 2 rovnice o 2 neznámých možno k tomuto účelu užítí metody, již uvedl *Scheffler* ve spise: Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen (Braunschweig, Verlag der Schulbuchhandlung, 1859), str. 71; metoda tato jest obdobná známé metodě *Horner*-ově pro rovnici o 1 neznámé.

Logarithmicko grafickou methodu stanovení reálných kořenů rovnice o 1 neznámé zavedl *Mehmke* v článku: Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten grafisch aufzulösen. (Der Civilingenieur 35, 1889, str. 629.) V článku tom udává též způsob přesnějšího hledání bodů křivky znázorňující funkci o členech kladných a záporných v okolí vertikální asymptoty. Ke konci pak ukazuje na příkladě, jak možno při často se opakujících úlohách docílit vhodného zařízení k mechanickému určování neznámých veličin. (Zabývá se úlohou stanovití průměr potrubí, při čemž základem jest rovnice $12 \frac{J}{Q^2} x^8 = 6 \cdot 0199x + 0 \cdot 000508$.)

Uvažovanou methodu stanovení reálných kořenů rovnic o reálných koef. možno rozšířiti též na určování **komplexních kořenů** rovnic o reálných koeficientech, jakož i na rovnice o koeficientech komplexních. Pišme uvažovanou rovnici $f(x) = 0$

opět ve tvaru $f_1(x) - f_2(x) = 0$. Nyní převedme proměnnou x i funkci $f_1(x)$ na obvyklý tvar veličin komplexních:

$$x = re^{i\varphi}, f_1(x) = \varrho e^{i\delta}$$

a uvažujme plochy P_1, Q_1 , z nichž prvá jest místem bodů majících pravouhlými souřadnicemi hodnoty

$$\log r, \varphi, \log \varrho$$

a druhá místem bodů o pravouhlých souřadnicích

$$\log r, \varphi, \delta.$$

— Budiž tu podotknuto, že je-li funkce $z = f_1(x)$ tvaru $z = ax^n$, kde a značí nějaké číslo komplexní (zahrnuta jsou tu tedy čísla reálná i imaginární) a n číslo reálné, jsou obě plochy P_1, Q_1 rovinami. Je-li dále z součtem několika členů tvaru ax^n , možno plochy P_1, Q_1 konstruovati na základě rovin příslušných jednotlivým členům tímž způsobem, jako jsme činili při logaritmicko-grafickém určování reálných kořenů dvou reálných rovnic o 2 neznámých, pouze s tím rozdílem, že zde nepoužíváme známé nám křivky addiční, nýbrž „addičních logaritmů čísel komplexních“ (viz: W. von Dyck, Kathalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente, Nachtrag (Dodatek), München 1893, str. 31, viz také: *Mehmke*, Zeitschrift f. Mathem. u. Phys. 40 (1895) str. 15). —

Obdobně uveďme funkci $f_2(x)$ na tvar

$$f_2(x) = \varrho' e^{i\delta'},$$

a uvažujme plochy P_2, Q_2 , jež jsou místy bodů

$$\log r, \varphi, \log \varrho'$$

resp.

$$\log r, \varphi, \delta'.$$

Je-li nyní křivka p průmětem na rovinu komplexních čísel x^{40} , průsečné křivky ploch P_1, P_2 a křivka q obdobně odpovídá plochám Q_1, Q_2 , stanoví souřadnice $\log r, \varphi$ každého průsečíka křivek p, q jeden kořen $x = re^{i\varphi}$ dané rovnice.

Jako pak vedla nás naše logaritmicko-grafická metoda k mechanicko-grafickému určování reálných kořenů reálných rovnic, jest možno též *mechanicko-grafické* určování imaginárních

⁴⁰⁾ Možno zde užití log. papíru druhu β .

kořenů *trinomických rovnic* o koeficientech reálných, jakož i trinomických rovnic o koeficientech komplexních (*Mehmke*, W. von Dyck, Katalog, Nachtrag, str. 16); provádí se vzájemným přesouváním dvou průsvitných papírů, z nichž jeden nese soustavu křivek a druhý soustavu os, příslušně kotovaných.

d) *Další aplikace log. papírů.*

Logarithmické papíry vyráběny byly původně jen tu a tam v Anglii a v Americe. V Německu i u nás nebylo tudíž jejich užití jak v přírodovědeckých tak i v technických kruzích téměř známo. Teprve v poslední době nastal v té příčině obrat, když známá firma *Carl Schleicher & Schüll* in Düren (Rheinland) počala s jejich výrobou a uvedla je za přiměřené ceny do obchodu.

Tehdy Dr. Ing. *A. Schreiber* poukázal v několika člancích (*Logarithmenpapiere*, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909; *Über Logarithmenpapiere und ihre Anwendung in der Meteorologie*, Meteorologische Zeitschrift, 1910; *Über Logarithmenpapiere und deren Anwendung*, Zeitung für Vermessungswesen, 1910) na výborné služby, které tyto papíry skýtají při různých grafických znázorněních, při aplikacích grafického počítání i nomografie. V mnohých z těchto případů vedou log. papíry k dalekosáhlému zjednodušení, ba při jejich užití jeví se mnohý obrat a závislost se zcela nového hlediska a vyplývají zde nové metody zobrazení a řešení úloh, oplývající největší přehledností a elegancí.

Popudem první práce uvedené objevil se v „*Elektrotechnische Zeitschrift*“, 1910, článek: *O. Weisshaar*, *Über Logarithmenpapiere und ihre Anwendung in der Elektrotechnik, besonders bei Eisenuntersuchungen*. Rovněž zdařilou aplikaci skýtá článek: *Dr. Paul Schreiber*, *Beiträge zur Ermittlung der Tragkraft und Bewegung eines Freiballons mit Hilfe von Logarithmenpapier*, *Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft „Isis“ in Dresden*, 1910.

Jako logarithmický papír v obou směrech logarithmicky dělený*) skýtá největší zjednodušení, jde-li o grafické znázornění

*) Bývá nazýván papírem druhu *B*.

nějakého průběhu, vyjádřeného funkcí mocninovou

$$y = ax^k,$$

kde k jest libovolné číslo reálné, tak papír druhu A , dělený v jednom směru lineárně a ve druhém směru logaritmicky, doporučuje se nejlépe tehdy, kdy jde o nějaký průběh vázaný zákonem exponenciálním. Každá exponenciální křivka daná rovnicí

$$y = ae^{kx} \quad (1)$$

jeví se totiž na papíře tomto jako *přímka*, jestliže lineárně dělenou osu nazveme osou z .

Jest totiž

$$\log \text{ nat } y = \log \text{ nat } a + kx$$

čili

$$\log y = \log a + \frac{1}{M} kx.$$

Přímka ta protíná tedy logaritmicky dělenou osu v bodě označeném a , majíc směrnici danu číslem k , jež nutno pro určitý druh papíru násobiti určitým konstantním faktorem, jenž jest závislý na modulu obyčejných logaritmů a na měřítku, v němž stupnice nanášíme.

Na základě této okolnosti možno užiti tohoto papíru k tomu, abychom se přesvědčili, zdali nějaká závislost (na př. změna tlaku s výškou) dána jest přesně nebo přibližně zákonem exponenciálním. Znázorníme-li uvažovaný průběh příslušným způsobem na našem papíře a dá-li se odpovídající mu křivka nahraditi s dostatečnou přesností *vyrovnávací přímkou*, plynou nám zároveň z tohoto obrazce konstanty náš zákon charakterisující.

Že uvažovaná závislost dána jest zákonem exponenciálním, možno souditi tehdy, jestliže při obyčejném geometrickém jejím znázornění příslušná křivka nemá maxima a minima ani bodů inflexních.

A. Schreiber uvádí aplikaci této okolnosti v praxi technické se zřetelem k oboru pojišťování a úvah statistických o vzrůstu dopravy, jež jsou nutny na př. v praxi železniční.

Rovnice (1) dává na obyčejném millimetrovém papíře křivku, jež jest konvexní k ose x . Máme-li však křivku opět bez maxim

a minim a inflexních bodů, která však jest konkávní k ose x , přichází v úvahu rovnice

$$y = K \log \text{nat} \frac{x}{A} \dots, \quad (2)$$

kteřá jest patrně obrácením rovnice (1), položíme-li $K = \frac{1}{k}$, $A = a$. Geometricky obdržíme křivku ku (2) příslušnou, jestliže křivku (1) zrcadlíme na symetrále os $+x$, $+y$. Na logaritmickém papíře znázorněna jest rovnice (2) přímkou, jestliže x jest osou logaritmicky, y osou lineárně dělenou. Zde jsou možny četné aplikace v oboru barometrického měření výšek.

Další aplikace v tomto i v jiných oborech plynou z té okolnosti, že vyjadřuje-li křivka na tomto papíře vyznačená veličinu y jako funkci x , jest plocha omezená křivkou, logaritmicky dělenou osou x a dvěma pořadnicemi odpovídajícími hodnotám x_0 , x_1 dána integrálem

$$\int_{x_0}^{x_1} y \frac{dx}{x},$$

jehož vyčíslení jest zde tedy možno provésti planimetrickým změněním plochy té.*)

A. Schreiber poukazuje ve svém posledně jmenovaném článku zvláště k tomu, že při studiu určité závislosti, která není dána mathematickým výrazem, jest mnohdy lépe vzítí za základ zákon exponenciální (což jest užitím log. papíru snadno možné, jak jsme seznali) nežli pracovati s funkcí mocninovou a užívati metody nejmenších čtverců bez ohledu k tomu, že přesnost úlohy nevyžaduje tak subtilní metody vyrovnávací. (Příkladem uvádí tarování hydrometrických křidel.)

Papíru druhu B uijeme, jak již řečeno, vždy ke znázornění křivky, probíhající buďto úplně nebo aspoň v jisté své části dle zákona mocninového. Hlavně a v první řadě užívá se však tohoto papíru ke znázorňování isoplet. K jejich konstrukci není

*) Při papíru B platí totéž o integrálu

$$\int_{x_0}^{x_1} \log y \frac{dx}{x}.$$

ovšem nutno, aby uvažovaná funkcionální závislost

$$z = f(x, y)$$

byla skutečně dána analytickým výrazem; stačí, aby pro dostatečný počet dvojic (x, y) byla známa příslušná hodnota z , na př. na základě pozorování. Takovéto isoplety přicházejí často ve fyzice, meteorologii atd. Tak kreslíme na př. thermoisoplety, které udávají nám na první pohled pro každý měsíc v roce a pro každou hodinu denní střední teplotu určitého místa.

(Uvedená firma vyrábí papíry v různých rozměrech a prodává je v blocích, jak z cenníku logaritmických papírů jest patrné. K praktickému použití doporučuje Logarithmenblock No. 377 $\frac{1}{2}$, obsahující po 12 listech čtyř různých druhů; cena M 450 a Düren.)

Vědecké podklady moderního válečnictví.

Pro žáky středních škol píše prof. Dr. Boh. Kučera.

(Dokončení.)

Dříve než se zmíníme o některých výsledcích vnější ballistiky, již náš článek jest po výtce věnován, jest nutno poněkud se poohlédnouti po historickém vývoji tvaru projektilu. Jehož se nyní všeobecně užívá.*)

Do padesátých let minulého století měly střely vesměs tvar koule, buď plné, jako u střel ručnicových i dělových, nebo duté a explozivní látkou vyplněné, jako u *bomb* a *granátů*, které se vrhají z děl (kusů) nebo hmoždířů a houfnic. Explosivní látkou byl tehdá výhradně černý prach, od časů mnicha *Bertholda Schwarze* sestávající ze 75 dílů sanytru (ledku či dusičňanu draselnatého KNO_3), 11 $\frac{1}{2}$ dílů síry a 13 $\frac{1}{2}$ dílů dřevěného uhlí (nyní užívá se směsi 78 : 3 : 19). Aby se uvnitř granátu vznítil a střelu roztrhl, byl vnitřek duté koule železný spojen s vnějším trubičkou rovněž prachem naplněnou (obr. 1.), obyčejně

*) Tato stat jest zpracováním mé přednášky: »Moderní válečnictví a fyzika«, uveřejněné v »České Revui«, roč. 1915 str. 193 - 201 a 263—272, kde jsou mnohá data o moderních zbraních.