Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Drobnosti z geometrie. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 4-5, 353–417

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109109

Volíme-li pak v příslušném paraboloidu površku jdoucí bodem A tak, že její průmět procházející bodem A_1 jest rovnoběžný s osou Y, dospějeme ke konstrukci: Bodem B_1 veď kolmici ku normále a bodem A_1 ku průvodiči. Průsečík D_1 těchto přímek spoj se středem křivosti K; přímka D_1K protne OB_1 v bodě B' i jest pak

$$OB' = \frac{u}{v} \varrho'';$$

vedeme-li bodem B' rovnoběžku s $A'B_1$, protne tato OA_1 v bodě L i jest opět

$$OL = -\varrho''.$$

Drobnosti z geometrie.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

(Dokončení.)

Steinerovy trojúhelníky jsou charakterisovány elementárně geometricky jakožto vepsané trojúhelníky maximálního obsahu, a doplňkový bod z_0 jako čtvrtý průsek ellipsy s opsanou kružnicí.

Na kruhu (a) pro bod Θ_0 příslušný affinně k bodu z_0 na ellipse bezprostřední geometrická interpretace chybí; jeho definice je čistě metrická: $\Theta_0 = -3\Theta$, značí-li Θ úhlový parametr kteréhokoli z vrcholů rovnostranného trojúhelníka $\Theta' \Theta'' \Theta'''$.

Obsah trojúhelníka rovnostranného vepsaného do kruhu (a) jest

$$\frac{a^2}{4} 3\sqrt{3};$$

obrazec affinní má plochu zmenšenou v poměru $b : a$, takže trojúhelníky Steinerovy mají obsah

$$\frac{ab}{4} 3\sqrt{3}.$$

Týž výraz vychází ovšem též ze vzorce (9*) čl. 3.; zde totiž

$$\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{2} = \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{2} = 60^0, \quad \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{2} = 120^0,$$

a pravá strana řečeného vzorce bude

$$\Delta = 2ab \sin^3 60^0 = \frac{ab}{4} 3\sqrt{3}.$$

Rovnici kruhu opsaného o Steinerův trojúhelník obdržíme dle (8^2) a (8^4) čl. 2., klademe-li $\Theta^{(\nu)}$ za Θ_ν. Jest

$$\frac{1}{2}\mathfrak{f}_2 = \cos\left(2\Theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 2\Theta + \cos\left(2\Theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

dále

$$\Sigma \cos \Theta^{(\nu)} = 0 = \Sigma \sin \Theta^{(\nu)},$$

takže souřadnice středu budou

$$p = \frac{c^2}{4a} \cos 3\Theta, \quad q = \frac{c^2}{4b} \sin 3\Theta \tag{35^0}$$

a rovnice opsaného kruhu tedy

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qx = \frac{d^2}{2}. \tag{35}$$

Při tom jest parametr bodu doplňkového

$$z_0 = e^{-3i\Theta},$$

takže máme též

$$p = \frac{c^2}{8a} \frac{1 + z_0^2}{z_0}, \quad q = \frac{c^2}{8bi} \frac{1 - z_0^2}{z_0},$$

a rovnici kruhu (35) lze psáti

$$c^2\left(\frac{x}{a} + \frac{iy}{b}\right) z_0^2 - 4\left(x^2 + y^2 - \frac{d^2}{2}\right) z_0 + c^2\left(\frac{x}{a} - \frac{iy}{b}\right) = 0. \tag{35*}$$

Obalová čára těchto kružnic odpovídá dvojnásobným kořenům z_0 a její rovnice se obdrží anulováním diskriminantu:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{d^2}{2}\right)^2 = \frac{c^4}{4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{36}$$

Tato obalová čára Steinerových (opsaných) kruhů, jejíž rovnici v odchylném poněkud tvaru podal K. Zahradník*), je zvláštní Perseova spirika. Jak známo a bez obtíží se dá ukázati,

---

*) Osculationstripel am Kegelschnitte. Archiv Math. u Phys. sv. 69. (1883) str. 419. a násl.

má ona v nekonečně vzdálených bodech kruhových body dvojné s tečnami různými (tedy nikoli body vratné), které se po dvou protínají ve dvou realných bodech osy Oy

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{c^3}{4ab}.$$

Body, v nichž se kruh (35) obalové čáry dotýká, hoví rovnici, jež vznikne derivováním dle Θ; ježto

$$\frac{\partial p}{\partial \Theta} = -\frac{3c^2}{4a} \sin 3\Theta = -3q \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Theta} = \frac{3c^2}{4b} \cos 3\Theta = 3p \cdot \frac{a}{b},$$

soudíme, že hledané body leží na přímce

$$\frac{qx}{a^2} - \frac{py}{b^2} = 0 \quad \text{či} \quad \frac{x}{a} \sin 3\Theta - \frac{y}{b} \cos 3\Theta = 0. \qquad (35^1)$$

Každý ze Steinerových kruhů se tedy dotýká spiriky (36) ve dvou bodech, jež leží na *průměru ellipsy* (35^1).

Tento průměr přiřazený oskulační trojici příslušné k bodu z_0, ($z_0 = e^{-3i\Theta}$), obsahuje bod

$$x = a \cos 3\Theta, \; y = b \sin 3\Theta,$$

příslušný k úhlu $+ 3\Theta$, jehož parametr zní $\frac{1}{z_0}$. Průměr ten je tedy souměrně položen s průměrem bodu doplňkového z_0 vůči Ox. Odtud vychází jednoduchá konstrukce obalové spiriky.

Střed Steinerova kruhu opsaného (35^0) opisuje patrně ellipsu

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1, \quad a_0 = \frac{c^2}{4a}, \quad b_0 = \frac{c^2}{4b};$$

středy zakřivení ellipsy ve vrcholech mají souřadnice

$$\pm 4a_0, \text{ resp. } \pm 4b_0.$$

Jsou tedy vrcholy ellipsy středů Steinerových kružnic čtyřikráte bližší středu ellipsy než vratné body evoluty.

Obalová čára opsaných kruhů je zvláštní případ spirik, jež mají dvojí anallagmatii*) s realnou mocností. Jejich rovnice zní

$$(A) \qquad (x^2 + y^2 - m)^2 = 4a_1^2 x^2 + 4b_1^2 y^2;$$

zaveďme polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi;$$

máme nejprve

$$r^2 - m = \pm 2r\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}$$

a odtud posléze

$$(A') \qquad r = \pm\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi} \pm \sqrt{a_2^2\cos^2\varphi + b_2^2\sin^2\varphi},$$

$$a_2^2 = a_1^2 + m,\quad b_2^2 = b_1^2 + m.$$

Odtud vychází konstrukce čáry jako cissoidály dvou Boothových lemniskat, jež jsou úpatnice dvou konfokálních ellips**). Odtud úvahou pak vychází konstrukce čáry jako cissoidály dvou kruhů, což ukážeme přímo.

Uvažujme dva kruhy se středy na Ox

$$x^2 + y^2 - 2p_1x + n_1 = 0,\quad x^2 + y^2 - 2p_2x + n_2 = 0;$$

jejich polární rovnice jsou

$$r_1 = p_1\cos\varphi \pm \sqrt{p_1^2\cos^2\varphi - n_1},$$
$$r_2 = p_2\cos\varphi \pm \sqrt{p_2^2\cos^2\varphi - n_2}.$$

Rovnice (A') pak bude tvaru

$$r = r_1 - r_2,$$

je-li splněna podmínka $p_1 = p_2$, t. j. jsou-li uvažované kruhy soustředné.

Podobný výsledek vyjde, leží-li společný střed kruhů na Oy. V předešlém případě máme***)

$$a_1^2 = p_1^2 - n_1,\quad b_1^2 = -n_1;\quad a_2^2 = p_2^2 - n_2,\ b_2^2 = -n_2$$

takže při daných a_ν^2, b_ν^2 určujeme

$$n_1 = -b_1^2,\quad n_2 = -b_2^2$$
$$p_1^2 = a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2.$$

*) t. j. nemění se při jisté inversi. Pro křivky (A) existuje jedna anallagmatie s mocností m, druhá s mocností $-m$, obě pro pól O.

**) Tyto jsou t. zv. deferenty anallagmatií.

***) Nevzpíráme se záporným hodnotám veličin a_ν^2, b_ν^2, poněvadž se tu vyskytují pouze jich čtverce.

Střed kruhu leží na Ox, je-li $a_1^2 > b_1^2$, v opačném případě leží na Oy; vždy jest tento střed jedním z obou (kterýmkoli) ohnisek deferenty

$$(d) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Křivka (A) jest cissoidála ($r = r_1 - r_2$) dvou kruhů z pólu O, jichž společný střed leží v ohnisku deferenty (d), a které mají v pólu O mocnosti $-b_1^2$, resp. $-b_2^2$, leží-li ohniska na Ox, ale mají mocnosti $-a_1^2$, $-a_2^2$ v případě, že ohniska jsou na Oy.

U čáry (36) máme

$$a_1^2 = \frac{c^4}{16a^2}, \quad b_1^2 = \frac{c^3}{16b^2}, \quad a_1^2 < b_1^2;$$

ohniska leží na Oy, u vzdálenosti

$$\sqrt{b_1^2 - a_1^2} = \frac{c^3}{4ab},$$

řídící kruhy soustředné (r_1) a (r_2) protínají Ox v bodech

$$x_1 = a_1 = \frac{c^2}{4a}, \quad \text{resp. } x_2 = a_2 = \sqrt{a_1^2 + \frac{d^2}{2}} = a - x_1,$$

čímž jsou určeny.

Při této konstrukci čáry také tečny se obdrží přímo na základě polárních subnormál.

Charakteristický průměr (35') protíná Steinerovu kružnici, opsanou ve dvou bodech, v nichž se tato kružnice dotýká obalové spiriky. Průsek tečen kruhu v těchto bodech nazveme *pólem* oskulační trojice příslušné; je to patrně pól charakteristického průměru (35') vůči kruhu Steinerovu, a leží na kruhové poláře bodu O, t. j. na přímce

$$(\alpha) \qquad -px - qy = \frac{d^2}{2},$$

mimo to leží na kruhovém průměru kolmém k přímce (35'), jehož rovnice zní

$$(\beta) \qquad (x - p)\, a \cos 3\Theta + (y - q)\, b \sin 3\Theta = 0,$$

s hodnotama (35'') pro p a q. Průsečík přímek (α) a (β) je tedy pól trojice.

Po dosazení hodnot za p a q znějí tyto rovnice

$$(\alpha') \qquad \frac{\cos 3\Theta}{a} x + \frac{\sin 3\Theta}{b} y = -\frac{2d^2}{c^2},$$

$$(\beta') \qquad a \cos 3\Theta \,.\, x + b \sin 3\Theta \,.\, y = \frac{c^2}{4},$$

a řešíme-li je vůči neznámým $x \cos 3\Theta$, $y \sin 3\Theta$, vyjde pro souřadnice pólu Steinerovy trojice

$$x = \frac{a_1}{\cos 3\Theta}, \quad y = -\frac{b_1}{\sin 3\Theta}, \tag{37}$$

kde psáno

$$a_1 = a\left(\frac{a^2 + 3b^2}{c^2}\right)^2, \quad b_1 = b\left(\frac{b^2 + 3a^2}{c^2}\right)^2. \tag{37^0}$$

Geometrické místo pólů Steinerových trojic je tedy *čára křížová*

$$\frac{a_1^2}{x^2} + \frac{b_1^2}{y^2} = 1. \tag{38}$$

Pólem trojice vedený průměr St. kruhu — je kolmý na charakteristický průměr — má rovnici (β') čili

$$\frac{x \cos 3\Theta}{a_0} + \frac{y \sin 3\Theta}{b_0} = 1$$

t. j. je tečnou k ellipse středů Steinerových kružnic.

Uvažujme dvě Steinerovy trojice příslušné k úhlům Θ a Θ_1; příslušné opsané kružnice se protnou ve dvou bodech položených na přímce (chordále)

$$\frac{\cos 3\Theta - \cos 3\Theta_1}{a} x + \frac{\sin 3\Theta - \sin 3\Theta_1}{b} y = 0.$$

Tato protne ellipsu v bodě

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

takže

$$(\cos 3\Theta - \cos 3\Theta_1) \cos \varphi + (\sin 3\Theta - \sin 3\Theta_1) \sin \varphi = 0,$$

t. j.

$$\cos(3\Theta - \varphi) - \cos(3\Theta_1 - \varphi) = 0$$

aneb pro krácení na

$$\sin\frac{3\Theta - 3\Theta_1}{2},$$

$$\sin\left(\frac{3\Theta + 3\Theta_1}{2} - \varphi\right) = 0, \quad \varphi = \frac{3\Theta + 3\Theta_1}{2}.$$

Chordála kružnic opsaných Steinerovým trojicím (Θ) *a* (Θ_1) *jest průměr ellipsy vedený bodem o úhlovém parametru*

$$\varphi = \frac{3\Theta + 3\Theta_1}{2}.$$

Znamenáme-li

$$\frac{\Theta + \Theta_1}{2} = \delta,$$

máme $\varphi = 3\delta$, a tedy *chordála splyne s charakteristickým průměrem oskulační trojice* (δ), která tvoří jaksi arithmetický střed trojic (Θ) a (Θ_1).

Dále:

Strany Steinerových trojúhelníků (Θ) a (Θ_1) protnou se navzájem v devíti bodech rozložených na třech průměrech, jež stanoví na ellipse tři páry bodů, které dohromady tvoří dvě oskulační trojice Steinerovy (δ) a $(\delta + \pi)$.

Průměr bodu δ je sdružený se směrem tětivy spojující body Θ a Θ_1. Tyto vlastnosti se verifikují snadno pro pravidelné trojúhelníky vepsané témuž kruhu a přenesou se na ellipsu promítnutím.

Dle (35*) prochází daným bodem x, y dvé kružnic Steinerových trojin. Znamenejme z', z'' komplexní parametry doplňkových bodů jejich (výše z_0); ty hoví rovnici (35*) o neznámé z_0. Rovnice ta dává pro souměrné úkony kořenů

$$z' + z'' = \frac{4}{c^2}\,\frac{x^2 + y^2 - \frac{d^2}{2}}{\frac{x}{a} + \frac{iy}{b}}, \quad z'z'' = \frac{\frac{x}{a} - \frac{iy}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{iy}{b}}.$$

Spojivá přímka bodů z' z'' má rovnici (18^1) čl. 7.

$$\xi\,\frac{1 + z'z''}{a} + i\eta\,\frac{1 - z'z''}{b} = z' + z'',$$

jež po dosazení hodnot zní

$$(\Pi) \qquad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = \frac{2}{c^2}\left(x^2 + y^2 - \frac{d^2}{2}\right).$$

Tato přímka protíná ellipsu ve dvou bodech z', z'', jež jsou doplňkovými body Steinerových trojic, pro něž opsané kruhy procházejí bodem (x, y). Opisuje-li tento bod kruh soustředný s ellipsou, obaluje přímka Π určitou ellipsu.

Podržme dále bod (ξ, η) přímky Π jako pevný, otáčejíce tuto kolem něho; každé poloze přímky odpovídají dva kruhy Steinerovy, jichž průseky hoví rovnici (Π), která je rovnicí kruhu; jeho střed má souřadnice

$$\frac{c^2\xi}{4a^2}, \quad \frac{c^2\eta}{4b^2},$$

a jeho mocnost pro bod O je stálá $-\dfrac{d^2}{2}$.

„*Opsané kruhy Steinerových trojic na ellipse, jichž doplňkové body tvoří páry involuce na této čáře, protínají se ve dvou bodech na pevném kruhu.*"

Osa involuce (polára středu involuce vůči ellipse) protíná tento kruh ve dvou bodech kružnice vrcholové $x^2 + y^2 = a^2$.

Abychom stanovili průsek normál ve vrcholech Steinerova trojúhelníka příslušného k bodu z_0, doplňme trojici $z'z''z'''$ bodem $-z_0$ na čtveřinu. Poznamenáme-li souměrně úkony prvků $z^{(\nu)}$ literami φ_ν, souměrné úkony čtveřiny $-z_0$, $z'z''z'''$ literami $\mathfrak{f}_\nu$, máme jednak

$$z^3 - \frac{1}{z_0} = 0, \quad \varphi_1 = 0 = \varphi_2, \quad \varphi_3 = \frac{1}{z_0},$$

jednak

$$\mathfrak{f}_4 = -z_0\varphi_3 = -1, \quad \mathfrak{f}_2 = \varphi_2 - z_0\varphi_1 = 0$$

čímž podmínky (33') splněny, dále

$$\mathfrak{f}_1 = \varphi_1 - z_0 = -z_0, \quad \mathfrak{f}_3 = \varphi_3 - z_0\varphi_2 = \frac{1}{z_0}, \quad z_0 = e^{-3i\Theta},$$

tedy

$$\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = 2i \sin 3\Theta, \quad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = -2 \cos 3\Theta$$

a rovnice (33^2) podávají souřadnice hledaného průseku normál ve tvaru

$$x = -\frac{c^2}{2a}\cos 3\Theta,\quad y = -\frac{c^2}{2b}\sin 3\Theta$$

čili dle (35^0)

$$x = -2p,\quad y = -2q.$$

Střed opsaného kruhu Steinerova trojúhelníka leží s průsekem normál na témž průměru ellipsy, a sice na opačné straně středu O a v poloviční vzdálenosti od něho.

Těžisko bodů Θ' Θ'' Θ''' na kruhu (a) leží ve středu kruhu, a tedy těžisko vrcholů maximálního trojúhelníka splývá se středem ellipsy. Pro čtveřinu $-z_0$, z' z'' z''' je tedy těžisko v čtvrtině vektoru $(O, -z_0)$ t. j.

$$X = \frac{1}{4}a\cos(\pi - 3\Theta),\quad Y = \frac{1}{4}b\sin(\pi - 3\Theta),$$

t. j.

$$X = -\frac{a}{4}\cos 3\Theta,\quad Y = \frac{b}{4}\sin 3\Theta$$

a výše podané vztahy

$$x = \frac{2c^2}{a^2}X,\quad y = -\frac{2c^2}{b^2}Y$$

podávají průsek normál

$$x = -\frac{c^2}{2a}\cos 3\Theta,\quad y = -\frac{c^2}{2b}\sin 3\Theta$$

bezprostředně.

Značí-li dále X', Y' těžisko čtyř bodů soukružných, máme pro střed kruhu dle čl. 2.

$$p = \frac{c^2}{a^2}X',\quad q = -\frac{c^2}{b^2}Y'.$$

Avšak body z' z'' z''' a z_0 jsou soukružné, těžisko prvních tří je v bodě O, tedy

$$X' = \frac{1}{4}a\cos 3\Theta,\quad Y' = -\frac{1}{4}b\sin 3\Theta,$$

z čehož plyne

$$p = \frac{c^2}{4a}\cos 3\Theta,\quad q = \frac{c^2}{4b}\sin 3\Theta$$

jako výše.

Apolloniova hyperbola (33^3) určená body $z'\,z''\,z'''$ a $-z_0$,

$$xy - \frac{\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3}{4i} bx - \frac{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3}{4} ay = 0$$

má vzhledem k udaným výše hodnotám výrazu $\mathfrak{k}_1 \pm \mathfrak{k}_3$ rovnici

$$xy - \frac{bx}{2} \sin 3\Theta + \frac{ay}{2} \cos 3\Theta = 0,$$

čili

$$\left(x + \frac{a}{2} \cos 3\Theta\right)\left(y - \frac{b}{2} \sin 3\Theta\right) = -\frac{ab}{4} \sin 3\,\Theta \cos 3\,\Theta.$$

Její střed půlí poloměr bodu $-z_0\,(\pi - 3\,\Theta)$, jenž je čtvrtý průsek hyperboly s ellipsou.

Zavedeme-li parametr $t = e^{3i\Theta}$, obdržíme jako rovnici této hyperboly

$$4t\,xy + (ay + ibx)\,t^2 + (ay - ibx) = 0;$$

Apolloniovy hyperboly určené Steinerovými trojicemi tedy obalují *čáru křížovou*

$$4x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \quad \text{t. j.} \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4.$$

Dotykové body její s hyperbolou (Θ) leží na přímce

$$\frac{x \cos 3\Theta}{a} + \frac{y \sin 3\Theta}{b} = 0,$$

rovnoběžné s tečnou ellipsy v místě 3Θ. Parametrické vyjádření čáry křížové je tu

$$x = -\frac{a}{2 \cos 3\Theta}, \quad y = \frac{b}{2 \sin 3\Theta}.$$

---

15. *Metrické vlastnosti Steinerových trojúhelníků.*

Vrcholy Steinerova trojúhelníka znamenejme $M_0\,M_1\,M_2$, úhlové parametry jejich $\Theta_0\,\Theta_1\,\Theta_2$, souřadnice (x_ν, y_ν) pro bod M_ν, *čtverce* stran pak $\sigma_0\,\sigma_1\,\sigma_2$.

Při tom píšeme též $\Theta_{-1} = \Theta_2$, $\Theta_3 = \Theta_0$, vůbec $\Theta_\mu = \Theta_{\mu+3}$. Máme pak obecně

$$\Theta_{\nu+1} - \Theta_\nu = 120^0, \quad \frac{\Theta_\nu + \Theta_{\nu+1}}{2} = \Theta_{\nu-1} + \pi,$$

$$x_{\nu+1} - x_\nu = a(\cos \Theta_{\nu+1} - \cos \Theta_\nu) = +\,2a \sin 60^0 \sin \Theta_{\nu-1}$$

$$y_{\nu+1} - y_\nu = b(\sin \Theta_{\nu+1} - \sin \Theta_\nu) = -\,2b \sin 60^0 \cos \Theta_{\nu-1}$$

a tedy pro čtverec strany $M_\nu\ M_{\nu+1}$

$$\sigma_{\nu-1} = (x_{\nu+1} - x_\nu)^2 + (y_{\nu+1} - y_\nu)^2$$
$$= 3(a^2 sin^2 \Theta_{\nu-1} + b^2 cos^2 \Theta_{\nu-1})$$

t. j.

$$\sigma_\nu = 3(a^2 sin^2 \Theta_\nu + b^2 sin^2 \Theta_\nu) = 3F(\Theta_\nu), \tag{39}$$

píšeme-li k vůli stručnosti

$$F(\Theta) = a^2 sin^2 \Theta + b^2 cos^2 \Theta.$$

Rovnice tečny ellipsy v bodě Θ zní

$$b\xi\ cos\ \Theta + a\ \eta\ sin\ \Theta - ab = 0,$$

a její Hesseův normální tvar

$$\frac{b\xi\ cos\ \Theta + a\eta\ sin\ \Theta - ab}{\sqrt{F(\Theta)}} = 0,$$

takže máme pro úhel α sevřený normálou ellipsy a osou Ox vztahy

$$cos\ \alpha = \frac{b\ cos\ \Theta}{\sqrt{F(\Theta)}},\quad sin\ \alpha = \frac{a\ sin\ \Theta}{\sqrt{F(\Theta)}}. \tag{40}$$

Buď Θ' libovolný další bod na ellipse, α' úhel jeho normály s osou Ox, γ pak úhel sevřený oběma normálama; bude dle (40)

$$sin\ \gamma = sin\ (\alpha' - \alpha) = \frac{ab\ sin\,(\Theta' - \Theta)}{\sqrt{F(\Theta)\ F(\Theta')}}. \tag{40a}$$

Trojúhelník Steinerův $M_0\ M_1\ M_2$ má strany rovnoběžné s tečnami ve vrcholech a tedy jsou jeho vnitřní úhly zároveň úhly normál ve vrcholech. Znamenáme-li tedy $\gamma_0\ \gamma_1\ \gamma_2$ vnitřní úhly trojúhelníka, určíme $sin\ \gamma_\nu$ podle (40^a) při

$$\Theta = \Theta_{\nu-1},\ \Theta' = \Theta_{\nu+1};$$

to jest

$$sin\,(\Theta' - \Theta) = \pm\ sin\ 120^0 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\ ,$$

a tedy

$$sin\ \gamma_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{ab}{\sqrt{F(\Theta_{\nu+1})\ F(\Theta_{\nu-1})}}$$

čili vůči (39)

$$sin\ \gamma_\nu = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{ab}{\sqrt{\sigma_{\nu+1}\ \sigma_{\nu-1}}}. \tag{41}$$

Jako verifikaci stanovme plochu trojúhelníka:

$$\varDelta = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{\nu+1}\,\sigma_{\nu-1}}\,sin\,\gamma_\nu = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab,$$

jako výše.

Znamenáme-li R poloměr kruhu opsaného, máme dle obecné věty planimetrické

$$\frac{\sqrt{\sigma_\nu}}{sin\,\gamma_\nu} = 2R, \tag{42}$$

takže dosadíme-li sem hodnotu (41) za $sin\,\gamma_\nu$, vyjde

$$R = \frac{\sqrt{\sigma_\nu}\,.\,\sqrt{\sigma_{\nu+1}\,\sigma_{\nu-1}}}{3\sqrt{3}\,ab} = \frac{\sqrt{\sigma_0\sigma_1\sigma_2}}{3\sqrt{3}ab}$$

čili

$$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = 27\,(abR)^2, \tag{43}$$

kde σ_ν jsou čtverce stran Steinerova trojúhelníka, R poloměr opsaného kruhu.

Pro veličiny σ_ν jsme vytkli právě geometrický význam součinu; vyšetříme ještě jich součet a součet čtverců.

Rovnici (39) lze psáti po dosazení hodnot

$$2\,sin^2\,\Theta = 1 - cos\,2\,\Theta,\quad 2\,cos^2\,\Theta = 1 + cos\,2\,\Theta$$

ve tvaru

$$(\alpha)\qquad \frac{2}{3}\sigma_\nu = d^2 - c^2\,cos\,2\,\Theta_\nu,$$

a odtud plyne

$$\frac{4}{9}\sigma_\nu^2 = d^4 - 2\,c^2d^2\,cos\,2\,\Theta_\nu + c^4\,cos^2 2\,\Theta_\nu$$

čili

$$(\beta)\qquad \frac{8}{9}\sigma_\nu^2 = c^4 + 2d^4 - 4c^2\,d^2\,cos\,2\,\Theta_\nu + c^4\,cos\,4\,\Theta_\nu.$$

V našem případě oskulační trojice $\Theta_0\,\Theta_1\,\Theta_2$ platí však

$$\Sigma\,cos\,2\,\Theta_\nu = 0 = \Sigma\,cos\,4\,\Theta_\nu,$$

a tedy vychází ze vzorců (α) a (β) sečtením:

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{9}{2}d^2,\quad \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{27}{8}(c^4 + 2d^4).$$

Odtud se určí souměrný úkon

$$\sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_0 = \frac{(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2)^2 - (\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}$$

a obdržíme tak rovnice

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = A_1 = \frac{9}{2} d^2 \\ &\sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_0 = A_2 = \frac{27}{16}(4d^4 - c^4) \\ &\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = A_3 = 27(ab\,R)^2. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Čtverce stran Steinerova trojúhelníka na ellipse jsou kořeny rovnice třetího stupně

$$\sigma^3 - A_1\sigma^2 + A_2\sigma - A_3 = 0, \qquad (44^*)$$

v níž pouze jeden součinitel

$$A_3 = 27(ab\,R)^2 = \frac{27}{2} a^2b^2d^2 + \frac{27}{16} c^4 F(3\,\Theta)$$

je proměnný, a sice závisí na poloměru kruhu opsaného.

Každá veličina vyjadřitelná jako racionální souměrná funkce čtverců stran bude vyjadřitelná racionálně pomocí veličiny R; a veličiny vyjadřitelné pouze jako funkce veličin

$$A_1 = \Sigma\sigma, \quad A_2 = \Sigma\,\sigma_\alpha\sigma_\beta,$$

jsou konstanty.

Tak na př. pro plochu trojúhelníka máme dle věty Carnotovy

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_1 - 2\cos\gamma_2\sqrt{\sigma_0\sigma_1},$$

tedy

$$\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2 = 2\cos\gamma_2\sqrt{\sigma_0\sigma_2}$$

a odtud

$$4\,\sigma_0\sigma_2 - 16\,\Delta^2 = (\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2)^2,$$

tedy

$$16\,\Delta^2 = 4(\sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_0) - (\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2)^2 = 4A_2 - A_1^2$$

je veličina stálá.

Výraz pro poloměr křivosti ellipsy v bodě Θ uvedený ve článku 7.

$$\varrho = \frac{(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{F(\Theta)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

podává
$$\sqrt{F(\Theta)} = (ab\varrho)^{\frac{1}{3}} \tag{45}$$
tedy dle (39)
$$\sqrt{\sigma_\nu} = \sqrt{3}(ab\varrho_\nu)^{\frac{1}{3}}, \tag{45*}$$
značí-li ϱ_ν poloměr křivosti v bodě M_ν.

Násobením plyne odtud
$$\sqrt{\sigma_0\sigma_1\sigma_2} = 3\sqrt{3}\,ab(\varrho_0\varrho_1\varrho_2)^{\frac{1}{3}}$$
tedy vzhledem k (43)
$$R = (\varrho_0\varrho_1\varrho_3)^{\frac{1}{3}}, \quad \varrho_0\varrho_1\varrho_2 = R^3,$$
t. j. *součin poloměrů křivosti ve vrcholech maximálního trojúhelníka rovná se třetí mocnosti poloměru opsané kružnice.**)

Podobně podávají hodnoty $\Sigma\sigma_\nu$, $\Sigma\sigma_\nu^2$ vzorce:
$$\Sigma\varrho^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\,\frac{d^2}{(ab)^{\frac{2}{3}}}, \quad \Sigma\varrho^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}\,\frac{c^4+2d^4}{(ab)^{\frac{4}{3}}}. \tag{46}$$

Uvažujme nyní trojúhelník tečen v bodech oskul. trojice $M_0M_1M_2$, který znamenejme $T_0T_1T_2$, takže M_ν leží na straně $T_{\nu-1}T_{\nu+1}$. Průsek normál N je průsek výšek trojúhelníka (M) a poněvadž body M_ν půlí strany $T_{\nu-1}T_{\nu+1} \parallel M_{\nu-1}M_{\nu+1}$, je bod N středem kruhu opsaného o trojúhelník tečen (T).

Střed kruhu opsaného o Steinerův trojúhelník (M) znamenejme S; je pak důsledkem podobnosti obrazců, že *normální paprsek* NM_ν rovná se dvojnásobné vzdálenosti středu S od $M_{\nu-1}M_{\nu+1}$.

Jsou-li v nějakém trojúhelníku α_ν vnitřní úhly, a'_ν vzdálenosti stran od středu opsaného kruhu, r jeho poloměr, platí vztah
$$a'_\nu = r\cos\alpha_\nu.$$

V našem trojúhelníku tečen (T) jest
$$\alpha_\nu = \gamma_\nu, \quad r = 2R, \quad a'_\nu = NM_\nu,$$

---

*) J. J. A. Mathieu v Nouv. Annales d. M. sv. 11. (2. ser.) 1872.

kde jako dosud R je poloměr kruhu opsaného o Steinerův trojúhelník (M).

Máme tedy

$$NM_\nu = 2R \cos \gamma_\nu,$$

aneb

$$n_\nu = 2R \cos \gamma_\nu,$$

značí-li n_ν délku normálního paprsku NM_ν.

Odtud a z rovnice (42)

$$R \sin \gamma_\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_\nu}$$

vychází

$$n_\nu^2 = 4R^2 - \sigma_\nu. \tag{47}$$

Odtud vzhledem k (44)

$$\Sigma n_\nu^2 = 12 R^2 - \frac{9}{2} d^2,$$

$$\Sigma n_\nu^4 = \Sigma(16 R^4 - 8 R^2 \sigma_\nu + \sigma_\nu^2)$$

$$= 48 R^4 - 36 d^2 R^2 + \frac{27}{8} (c^4 + 2 d^4),$$

podobně nalezneme

$$\left(\frac{n_0 n_1 n_2}{R}\right)^2 = 64 R^4 - 72 d^2 R^2 + \frac{81}{4} d^4.$$

Střed křivosti K_ν ellipsy v bodě M_ν má souřadnice

$$x_\nu = \frac{c^2}{4a} (\cos 3\,\Theta_\nu + 3 \cos \Theta_\nu)$$

$$y_\nu = \frac{c^2}{4b} (\sin 3\,\Theta_\nu - 3 \sin \Theta_\nu),$$

střed opsaného kruhu S pak

$$p = \frac{c^2}{4a} \cos 3\,\Theta, \quad q = \frac{c^2}{4b} \sin 3\,\Theta$$

a ježto se $3\,\Theta_\nu$ od $3\,\Theta$ liší jen o periodu $2k\pi$, máme

$$x_\nu - p = \frac{3}{4} \frac{c^2}{a} \cos \Theta_\nu, \quad y_\nu - q = -\frac{3}{4} \frac{c^2}{b} \sin \Theta_\nu \tag{48}$$

takže

$$\Sigma(x_\nu - p)^2 = \frac{9}{16}\frac{c^4}{a^2}\Sigma\cos^2\Theta_\nu = \frac{27}{32}\frac{c^4}{a^2},$$

$$\Sigma(y_\nu - p)^2 = \frac{9}{16}\frac{c^4}{b^2}\Sigma\sin^2\Theta_\nu = \frac{27}{32}\frac{c^4}{b^2};$$

odtud vychází

$$\Sigma\overline{SK}_\nu^2 = \frac{27}{32}\frac{c^4 d^2}{a^2 b^2}. \tag{49}$$

„*Součet čtverců vzdáleností středů zakřivení v trojici Steinerově od středu opsaného kruhu je stálý.*“

Výrazy (48) jsou složky vektoru SK_ν; poněvadž mají nullové součty, vychází *vektorielní rovnice*

$$\sum_\nu \text{vekt.}\ \overline{SK}_\nu = 0. \tag{48*}$$

Tyto početní výsledky připouští ještě další interpretaci, zavede-li se průsek normál N, jehož souřadnice jsou

$$x = -\frac{c^2}{2a}\cos 3\Theta,\quad y = -\frac{c^2}{2b}\sin 3\Theta.$$

Barycentrické rovnice

$$N + 2K_\nu = 3N_\nu \tag{50}$$

definují na normálách bodů M_ν další tři body $N_0 N_1 N_2$; souřadnice bodu N_ν jsou pak

$$x'_\nu = \frac{c^2}{2a}\cos\Theta_\nu,\quad y'_\nu = -\frac{c^2}{2b}\sin\Theta_\nu, \tag{50'}$$

a z rovnic

$$\Sigma x'_\nu = 0 = \Sigma y'_\nu$$

vychází, že těžiště trojice $N_0 N_1 N_2$ jest ve středu ellipsy O.

Dále

$$\Sigma\overline{ON}_\nu^2 = \frac{3}{8}\frac{c^4 d^2}{a^2 b^2}.$$

Mimo to je zřejmo dle napsaných hodnot x_ν, y_ν, že těžiště středů zakřivení splývá se středem S opsaného kruhu.

Plochu trojúhelníka středů zakřivení Δ' určíme dle vzorce

$$2\Delta' = \pm \begin{vmatrix} x_0 - p, & y_0 - q, & 1 \\ x_1 - p, & y_1 - q, & 1 \\ x_2 - p, & y_2 - q, & 1 \end{vmatrix}, \quad x_\nu - p = \frac{3c^2}{4a} \cos \Theta_\nu, \quad y_\nu - q = -\frac{3c^2}{4b} \sin \Theta_\nu,$$

a sice plyne

$$2\Delta' = \mp \frac{9c^4}{16ab} \begin{vmatrix} \cos \Theta_\nu, & \sin \Theta_\nu, & 1 \end{vmatrix}$$

Determinant poslední má hodnotu

$$\pm \frac{2\Delta}{ab} = 2\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

a tedy

$$\Delta' = \frac{27\sqrt{3}}{64} \frac{c^4}{ab}.$$

Steinerův kruh oskul. trojice (Θ)

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = \frac{d^2}{2},$$

$$p = \frac{c^2}{4a} \cos 3\Theta, \qquad q = \frac{c^2}{4b} \sin 3\Theta$$

má poloměr R určený rovnicí

$$R^2 = p^2 + q^2 + \frac{d^2}{2} = \frac{c^4}{16}\left(\frac{\cos^2 3\Theta}{a^2} + \frac{\sin^2 3\Theta}{b^2}\right) + \frac{d^2}{2}$$

t. j.

$$R^2 = \frac{d^2}{2} + \frac{c^4}{32a^2b^2}(d^2 - c^2 \cos 6\Theta). \qquad (51^0)$$

Rovnici předposlední lze též psáti

$$R^2 = \frac{d^2}{2} + \frac{c^4}{16a^2b^2} F(-3\Theta).$$

Značí-li P *poloměr zakřivení ellipsy v bodě* z_0 (doplňku St. trojice), máme dle (45)

$$\sqrt{F(-3\Theta)} = (abP)^{\frac{1}{3}},$$

a tedy náš výsledek zní

$$R^2 = \frac{d^2}{2} + \frac{c^4}{16a^2b^2}(ab\,P)^{\frac{2}{3}}$$

t. j.

$$R^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{c^4}{16(ab)^{\frac{4}{3}}} P^{\frac{2}{3}} \tag{51}$$

čili

$$P = a^2b^2\left(\frac{4}{c^2}\sqrt{R^2 - \frac{1}{2}d^2}\right)^3. \tag{51*}$$

Značí-li Q bod $(-3\,\Theta)$ doplňkový Steinerovy trojice M_0 M_1 M_2, nalezneme bez obtíží

$$\Sigma \overline{QM_\nu}^2 + 3(ab\,P)^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}d^2 \,.^{*)}$$

---

16. *Frégierův bod a jiné vlastnosti normál.*

Spojivá přímka dvou bodů ellipsy $z_0 z_1$, jichž komplexní parametry jsou

$$z_0 = e^{i\Theta_0}, \quad z_1 = e^{i\Theta_1}$$

při libovolných hodnotách úhlů Θ_0 a Θ_1, má Plückerovské souřadnice (18[1])

$$u_1 = -\frac{1}{a}\,\frac{1 + z_0 z_1}{z_0 + z_1}, \quad v_1 = -\frac{i}{b}\,\frac{1 - z_0 z_1}{z_0 + z_1},$$

podobně pro přímku $\overline{z_0 z_2}$

$$u_2 = -\frac{1}{a}\,\frac{1 + z_0 z_2}{z_0 + z_2}, \quad v_2 = -\frac{i}{b}\,\frac{1 - z_0 z_2}{z_0 + z_2}.$$

---

*) Pro literaturu oskulačních trojic viz
F. Unferdinger, Arch. M. Ph. 51 (1870),
J. J. Walker, Educ. Times 15. (1871).
C. M. Piuma, Giorn. di Mat. 22 (1883), 26 (1888).
G. Fazzari, ib. 25 (1887).
V. Janni, Ann. di Mat. 4 (1861).
Em. Weyr, Časopis 2 (1873).
S. Kantor, Zeitschr. M. Ph. 23 (1878).
A. Schwarz, Monatsh. 10 (1899), 13 (1902).
K. Zahradník, Věstník král. čes. spol. nauk 1910; Časopis 41 (1912).

Aby přímky $\overline{z_0 z_1}$, $\overline{z_0 z_2}$ stály na sobě kolmo, musí

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0,$$

tedy po dosazení hodnot

$$\frac{1}{a^2}(1 + z_0 z_1)(1 + z_0 z_2) - \frac{1}{b^2}(1 - z_0 z_1)(1 - z_0 z_2) = 0$$

čili po krátké redukci

$$c^2 z_0^2 z_1 z_2 - d^2 z_0 (z_1 + z_2) + c^2 = 0. \qquad (52)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi body $z_1 z_2$, v nichž ramena pravého úhlu s vrcholem z_0 na ellipse (a, b) protínají tuto ellipsu. Bilineární a souměrná tato rovnice vyjadřuje patrně involuci.

Spojivé přímky sdružených bodů involuce $\overline{z_1 z_2}$ mají souřadnice u, v a platí

$$\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 + z_2} = -au, \quad \frac{z_1 z_2 - 1}{z_1 + z_2} = -ibv.$$

Z rovnic těch vypočteme

$$z_1 + z_2 = -\frac{2}{au - ibv}, \quad z_1 z_2 = \frac{au + ibv}{au - ibv};$$

tyto hodnoty dosadíme do rovnice (52); vyjde

$$c^2 z_0^2 (au + ibv) + c^2 (au - ibv) + 2 d^2 z_0 = 0$$

čili

$$\frac{c^2}{d^2} \frac{z_0^2 + 1}{2 z_0} au - \frac{c^2}{d^2} \frac{z_0^2 - 1}{2 i z_0} bv + 1 = 0 \qquad (53)$$

aneb

$$\frac{c^2}{d^2}(a \cos \Theta_0 \,.\, u - b \sin \Theta_0 \,.\, v) + 1 = 0. \qquad (53^*)$$

Tato rovnice odpovídá bodu o pravoúhlých souřadnicích x, y (bod Frégierův)

$$x = \frac{c^2}{d^2} x_0, \quad y = -\frac{c^2}{d^2} y_0, \qquad (54)$$

kde $x_0 y_0$ značí pravoúhlé souřadnice bodu z_0.

Tím dokázána věta Frégierova:

Otáčí-li se pravý úhel kolem svého vrcholu (x_0, y_0) *na* *ellipse, protínají jeho ramena ellipsu v dalších bodech $z_1 z_2$, jichž spojivá přímka prochází pevným bodem (54).**)

Tento Frégierův bod leží na normále v bodě $(x_0\, y_0)$ vedené.

Body Frégierovy příslušné k různým bodům ellipsy (a, b) naplňují soustřednou a homothetickou ellipsu (a', b') s poloosama

$$a' = \frac{c^2}{d^2}\, a, \quad b' = \frac{c^2}{d^2}\, b.$$

Uvažujme nyní normálu MN v bodě $M\,(x, y)$ o souřadnicích

$$x = a \cos \Theta, \quad y = b \sin \Theta;$$

její rovnice zní

$$N \equiv aX \sin \Theta - bY \cos \Theta - \frac{c^2}{2} \sin 2\Theta = 0. \tag{55}$$

Střed zakřivení leží na přímce

$$\frac{\partial N}{\partial \Theta} = 0,$$

t. j.

$$P \equiv aX \cos \Theta + bY \sin \Theta - c^2 \cos 2\Theta = 0, \tag{56}$$

kterou nazveme *střednicí* bodu M.

Střednice obsahuje též bod

$$(M_1) \qquad X_1 = \frac{c^2}{a} \cos \Theta, \quad Y_1 = -\frac{c^2}{b} \sin \Theta,$$

mimo to je kolma na průměr $\overline{OM}$.

Bod M_1 probíhá ellipsu E_1, jejíž vrcholy splývají se středy zakřivení původní ellipsy (a, b) ve vrcholech; její ohniska leží na Oy u vzdálenosti $\pm \dfrac{c^3}{ab}$.

Úseky normály na osách jsou

$$ON = \frac{c^2 \cos \Theta}{a} = X_1,$$

$$ON' = -\frac{c^2 \sin \Theta}{b} = Y_1;$$

*) Věta samozřejmě platí pro všecky kuželosečky.

tedy máme větu:

Bod M_1 (na střednici P) má za souřadnice úseky, jež normála bodu M stanoví na osách.

Střed křivosti ellipsy v bodě M leží pak na přímce (střednici) $M_1S \perp OM$.

Frégierova přímka slujž přímka vedená Frég. bodem F rovnoběžně s tečnou bodu M. Její rovnici

$$\left(X-\frac{c^2}{d^2}a\cos\Theta\right)b\cos\Theta+\left(Y+\frac{c^2}{d^2}b\sin\Theta\right)a\sin\Theta=0$$

lze psáti

$$(Fr) \qquad bX\cos\Theta+aY\sin\Theta=\frac{abc^2}{d^2}\cos 2\Theta.$$

Souřadnice Frégierova bodu F znamenejme x', y', průsek Frégierovy přímky s průvodičem OM měj souřadnice x'', y''; patrně

$$x''=at\cos\Theta,\quad y''=bt\sin\Theta,$$

a dosazením do rovnice (Fr.) plyne

$$t=\frac{c^2}{d^2}\cos 2\Theta,$$

načež

$$x''=\frac{ac^2}{d^2}\cos\Theta\cos 2\Theta=\frac{ac^2}{2d^2}(\cos 3\Theta+\cos\Theta)$$

$$y''=\frac{bc^2}{d^2}\sin\Theta\cos 2\Theta=\frac{bc^2}{2d^2}(\sin 3\Theta-\sin\Theta).$$

Tu jest

$$x'=\frac{ac^2}{d^2}\cos\Theta,\quad y'=-\frac{bc^2}{d^2}\sin\Theta$$

Frégierův bod příslušný k parametru Θ, dále

$$x_3=\frac{ac^2}{d^2}\cos 3\Theta,\quad y_3=\frac{bc^2}{d^2}\sin 3\Theta$$

je Frégierův bod příslušný k parametru -3Θ, t. j. k bodu Q, v němž oskulační tětiva bodu M protne ellipsu (a, b), a který jsme nazvali oskulačním doplňkem bodu M.

Máme pak

$$x'' = \frac{x' + x_3}{2}, \quad y'' = \frac{y' + y_3}{2};$$

nazveme-li patu M začátkem, doplněk Q koncem oskulační tětivy, můžeme výsledek náš takto vyjádřiti:

„Jsou-li M, Q začátek a konec oskulační tětivy na ellipse (a, b), a M', Q' příslušné jim body Frégierovy, je (Frégierova) přímka $M'Q'$ rovnoběžna s tečnou bodu M a střed délky $M'Q'$ leží na průměru OM.

Přímka Frégierova je tedy oskulační tětivou ellipsy Frégierovy (a', b'); její souřadnice jsou skutečně

$$u = -\frac{\cos\Theta}{a' \cos 2\Theta}, \quad v = -\frac{\sin\Theta}{b' \cos 2\Theta},$$

a vzniknou z (19^0) výměnou a, b, Θ za a', b', $-\Theta$.

Stanoví-li nějaká přímka na osách úseky α, β, nazveme její *protějškem* bod o souřadnicích α, β. Tak jest v našem případě bod M_1 protějšek normály bodu M.

Protějšek normály bodu $M(\Theta)$ jest

$$M_1\left(\frac{c^2}{a}\cos\Theta, \quad -\frac{c^2}{b}\sin\Theta\right),$$

a protějšek normály bodu $Q(-3\Theta)$, oskulačního doplňku pro M, jest

$$Q_1\left(\frac{c^2}{a}\cos 3\Theta, \quad \frac{c^2}{b}\sin 3\Theta\right).$$

Vektor $3\overline{OM_1} + \overline{OQ_1}$ má složky

$$\frac{c^2}{a}(\cos 3\Theta + 3\cos\Theta), \quad \frac{c^2}{b}(\sin 3\Theta - 3\sin\Theta),$$

které splývají se čtvernásobnými hodnotami souřadnic středu křivosti S; máme tedy vektoriální vztah

$$3\overline{OM_1} + \overline{OQ_1} = 4\,OS$$

čili barycentricky

$$Q_1 + 3M_1 = 4S. \tag{57}$$

„Přímka spojující protějšky $M_1 Q_1$ normál ellipsy (a, b), na koncích oskulační tětivy vedených, je kolmá na průměr OM jdoucí patou oskulační tětivy, a střed křivosti S k patě M příslušný dělí délku $M_1 Q_1$ v poměru 1 : 3.

Buď nyní $M' M'' M'''$ Steinerova oskulační trojice na ellipse, Q její doplněk. Bod Q_1 bude pro všecky prvky trojice týž, protějšky normál $M'_1 M''_1 M'''_1$ tvoří opět Steinerův trojúhelník na ellipse E_1, s doplňkem Q_1. Jeho oskulační tětivy $M_1^{(\nu)} Q_1$ protínají normály trojúhelníka původního ve středech zakřivení K_ν příslušných vrcholům $M^{(\nu)}$.

Podle (57) jest

$$Q_1 + 3 M_1^{(\nu)} = 4 K_\nu. \tag{57a}$$

Střed S kruhu opsaného o trojúhelník $M' M'' M'''$ souvisí s bodem Q_1 rovnicí vektoriální

$$4\overline{OS} = \overline{OQ_1} \quad \text{či} \quad Q_1 + 3O = 4S. \tag{58}$$

Tedy „střed opsaného kruhu Steinerova dělí poloměr OQ_1 ellipsy E_1 v poměru 1 : 3."

Z (57ᵃ) a (58) plyne

$$3\overline{OM^{(\nu)}} = 4\overline{SK_\nu}, \tag{59}$$

t. j. rovnoběžnost vektorů $\overline{OM_1^{(\nu)}}$ a $\overline{SK_\nu}$, a jich číselný poměr 4 : 3.

Těžiště středů zakřivení K_ν je bod S, těžiště bodů $M_1^{(\nu)}$ jest střed ellipsy; sečteme-li tedy (57ᵃ) pro $\nu = 1, 2, 3$ máme

$$Q_1 + 3O = 4S,$$

t. j. právě rovnici (58).

Pro průsek normál N ve Steinerově trojúhelníku známe rovnici vektorialní

$$\overline{ON} = -2\overline{OS},$$

tedy dle (58)

$$\overline{ON} = -\frac{1}{2}\overline{OQ_1} \tag{59}$$

čili

$$2N + Q_1 = 3O. \tag{59*}$$

Průsek normál ve vrcholech Steinerova trojúhelníku leží tedy na průměru OQ_1', a sice na opačné straně bodu Q_1 od počátku, u vzdálenosti poloviční.

---

17. Nechť normála bodu $M(\Theta)$ na ellipse (a, b) protne osy Ox, Oy v bodech N, N'; tu pak jsou

$$\frac{b^2}{a} \cos\Theta, \quad b \sin\Theta \text{ složky vektoru } NM,$$

$$a\cos\Theta, \quad \frac{a^2}{b}\sin\Theta, \text{ složky vektoru } N'M,$$

takže při dosavadním významu symbolu $F(\Theta)$ máme

$$\overline{MN}^2 = \frac{b^2}{a^2} F(\Theta), \quad \overline{MN'}^2 = \frac{a^2}{b^2} F(\Theta)$$

$$\overline{NN'}^2 = \frac{c^4}{a^2 b^2} F(\Theta).$$

Poloměr křivosti v bodě M jest

$$\varrho = \frac{F(\Theta)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

tedy máme vztahy

$$\left.\begin{aligned} \overline{MN} = \frac{b}{a}(ab\varrho)^{\frac{1}{3}}, \quad \overline{MN'} = \frac{a}{b}(ab\varrho)^{\frac{1}{3}} \\ \overline{NN'} = \frac{c^2}{ab}(ab\varrho)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

a z nich bezprostředně plynou

$$\left.\begin{aligned} \overline{MN} \,.\, \overline{MN'} \,.\, \overline{NN'} = c^2\varrho \\ a^2\, \overline{MN} = b^2\, \overline{MN'} \\ \frac{\overline{NN'}^2}{\overline{MN}\,.\,\overline{MN'}} = \frac{c^4}{a^2b^2} \end{aligned}\right\} \quad (60')$$

Znamenejme n, n' úseky normály na osách, t, t' pak úseky tečny; koncové body úseků těch jsou N, N' (poslední označení) pro normálu, a T, T' pro tečnu; platí

$$t = \frac{a}{\cos\Theta}, \quad t' = \frac{b}{\sin\Theta},$$

$$n = \frac{c^2}{a}\cos\Theta, \quad n' = -\frac{c^2}{b}\sin\Theta;$$

rovnice

$$tn = c^2, \quad t'n' = -c^2$$

vyjadřují známé involutorní vlastnosti tečny a normály vůči osám kuželosečky.

Přímky $\overline{TN'}$ a $\overline{NT'}$ stojí na sobě kolmo *), jak plyne z hodnot jich souřadnic Plückerovských

$$\left(-\frac{\cos\Theta}{a}, \ \frac{b}{c^2 \sin\Theta}\right), \ \text{resp.} \ \left(-\frac{a}{c^2 \cos\Theta}, \ -\frac{\sin\Theta}{b}\right)$$

a obalují racionální čáry 4. třídy **).

Průsečík těchto přímek má souřadnice

$$x' = \frac{ac^2 \cos\Theta (b^2 + c^2 \sin^2\Theta)}{a^2b^2 + c^4 \sin^2\Theta \,.\, \cos^2\Theta}$$

$$y' = -\frac{bc^2 \sin\Theta (b^2 + c^2 \sin^2\Theta)}{a^2b^2 + c^4 \sin^2\Theta \cos^2\Theta}$$

aneb, ježto jmenovatel má hodnotu

$$(a^2 - c^2 \sin^2\Theta)(b^2 + c^2 \sin^2\Theta)$$

$$x' = \frac{ac^2 \cos\Theta}{a^2 - c^2 \sin^2\Theta}, \quad y' = -\frac{bc^2 \sin\Theta}{a^2 - c^2 \sin^2\Theta}. \tag{61}$$

Geometrické místo bodu tohoto je racionální čára stupně 4.

Ze vztahu

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b}{a} tg\,\Theta = -\frac{y}{x}$$

plyne, že bod $x'y'$ leží na průměru bodu $(x, -y)$.

Abychom vyloučili Θ z rovnic (61), znamenejme

$$\frac{x'}{ac} = \xi, \quad \frac{y'}{bc} = \eta, \quad a^2 - c^2 \sin^2\Theta = N;$$

máme pak

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{c^2}{N^2}, \quad \eta^2 = \frac{a^2 - N}{N^2},$$

---

*) Zvláštní to případ věty o čtyřúhelnících orthogonálních.

**) První z nich má parametrické vyjádření

$$x = \frac{a \cos\Theta}{\cos 2\Theta}, \quad y = \frac{c^2}{b} \frac{\sin^3\Theta}{\cos 2\Theta}.$$

tedy

$$a^2\frac{\xi^2+\eta^2}{c^2}-\eta^2=\frac{1}{N}=\frac{a^2\xi^2+b^2\eta^2}{c^2}$$

a odtud zmocněním

$$c^2(\xi^2+\eta^2)=(a^2\xi^2+b^2\eta^2)^2$$

t. j.

$$(x^2+y^2)^2=c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right). \tag{61*}$$

„Geometrické místo průseku přímek NT', $N'T$ jest Boothova lemniskata, středová úpatnice ellipsy E_1.

Ellipsa E_1 má totiž polouosy $\frac{c^2}{a}$, $\frac{c^2}{b}$, a prochází středy zakřivení ellipsy (a, b) ve vrcholech.

Znamená-li dále S, S' průseky oskulační tětivy bodu M s osama Ox, Oy, mají přímky TS', ST' souřadnice

$$\left(-\frac{\cos\Theta}{a}, \frac{\sin\Theta}{b\cos 2\Theta}\right), \text{ resp. } \left(\frac{-\cos\Theta}{a\cos 2\Theta}, \frac{-\sin\Theta}{b}\right),$$

a rovnice jich průseku zní

$$\begin{vmatrix} au & bv & 1 \\ -\cos\Theta\cos 2\Theta & \sin\Theta & \cos 2\Theta \\ -\cos\Theta & -\sin\Theta\cos 2\Theta & \cos 2\Theta \end{vmatrix}=0$$

čili

$$(2a\cos\Theta\, u-2b\sin\Theta\, .\, v)\cos 2\Theta+(1+\cos^2 2\Theta)=0,$$

takže při označení

$$V=\frac{\cos 2\Theta}{1+\cos^2 2\Theta}$$

máme pro souřadnice našeho průseku

$$x=2a\cos\Theta\, .\, V,\ y=-2b\sin\Theta\, .\, V. \tag{62°}$$

Tyto výrazy jsou vůči proměnné $z=e^{i\Theta}$ racionální funkce stupně 8., tak že průsek přímek ST' a TS' probíhá racionální čáru stupně osmého.

Její rovnici obdržíme, klademe-li do výrazu

$$V=\frac{(\cos^2\Theta-\sin^2\Theta)(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta)}{(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta)^2+(\cos^2\Theta-\sin^2\Theta)^2}$$

t. j. do

$$2V = \frac{\cos^4\Theta - \sin^4\Theta}{\cos^4\Theta + \sin^4\Theta}$$

na pravé straně hodnoty

$$\cos\Theta = \frac{x}{2aV}, \quad \sin\Theta = -\frac{y}{2bV},$$

a v levo hodnotu

$$2V = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}};$$

výsledek zní

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \frac{\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}}{\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}}.$$

Zmocněním dvěma a odstraněním činitele

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

vyjde pak

$$\left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \tag{62}$$

jakožto rovnice uvažované křivky.

Ježto z (62^0) plyne

$$\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}\,tg\,\Theta,$$

máme zajímavý detail:

Průsečíky $(ST', S'T)$ *a* $(NT', N'T)$ *leží na témž průměru ellipsy* (a, b), *a ten je symetrický s průměrem* OM *vůči ose* Ox.

Mají-li T, M, N týž význam jako posledně, tvoří body TMN trojúhelník pravoúhlý; chceme uvažovati kruh Γ tomuto trojúhelníku opsaný. Jeho střed leží uprostřed délky TN na ose Ox, tedy máme pro úsečku p jeho středu a pro jeho poloměr r vztahy

$$2p = t + n = \frac{a}{\cos\Theta} + \frac{c^2}{a}\cos\Theta,$$

$$\pm 2r = t - n = \frac{a}{\cos\Theta} - \frac{c^2}{a}\cos\Theta,$$

a odtud

$$p^2 - r^2 = tn = c^2,$$

Rovnice kruhu Γ tedy zní

$$x^2 + y^2 - 2px + c^2 = 0; \quad 2p = \frac{a^2 + c^2 \cos^2 \Theta}{a \cos \Theta}. \quad (63)$$

Měníme-li bod M, t. j. Θ, probíhá kruh Γ svazek, jehož vrcholy jsou imaginární body na Oy:

$$x = 0, \quad y = \pm ci$$

t. j. t. z. imaginární ohniska ellipsy, předpokládáme-li $a > b$; je-li však $a < b$, jsou vrcholy svazku reálné, a sice jsou to ohniska ellipsy (ležící na Oy).

Tečny vedené ze středu O ke kruhům Γ mají stálou délku c.

Průměr kruhu Γ

$$2r = \frac{a^2 - c^2 \cos^2 \Theta}{\pm a \cos \Theta}$$

se na základě výrazů platných pro fokální průvodiče

$$\varrho_1 = a - c \cos \Theta, \quad \varrho_2 = a + c \cos \Theta$$

vyjádří ve tvaru

$$2r = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\pm x},$$

kde x je první souřadnice bodu M.

Rovnice kruhu Γ' opsaného o trojúhelník $T'MN'$ zní podobně

$$x^2 + y^2 - 2qy - c^2 = 0, \quad 2q = \frac{b^2 - c^2 \sin^2 \Theta}{b \sin \Theta}$$

a pro jeho poloměr r' platí

$$2r' = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\pm y},$$

při čemž y značí pořadnici bodu M.

Chordála kruhů Γ, Γ'

$$qy - px + c^2 = 0$$

protne ellipsu v dalším bodě φ, pro nějž

$$\frac{b^2 - c^2 \sin^2 \Theta}{\sin \Theta} \sin \varphi - \frac{a^2 + c^2 \cos^2 \Theta}{\cos \Theta} \cos \varphi + 2c^2 = 0$$

čili

$$c^2 \sin 2\Theta + b^2 \sin\varphi \cos\Theta - a^2 \cos\varphi \sin\Theta$$
$$- c^2 \sin\Theta \cos\Theta \cos(\varphi - \Theta) = 0.$$

Klademe-li $\varphi - \Theta = \psi$, máme

$$(b^2 \cos^2\Theta + a^2 \sin^2\Theta) \sin\psi + c^2 \sin 2\Theta \,.\, (1 - \cos\psi) = 0,$$

a odtud

$$tg\,\frac{\psi}{2} = -\frac{a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta}{c^2 \sin 2\Theta}. \tag{64}$$

Chordála kruhů Γ, Γ' majíc souřadnice

$$u = -\frac{p}{c^2},\quad v = \frac{q}{c^2},$$

které se komplexním parametrem $z = e^{i\Theta}$ vyjadřují jako racionální funkce stupně 6., obaluje racionální čáru 6. třídy, jejíž rovnici lze psáti

$$a^2\left(u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{c^2}}\right)^2 + b^2\left(v + \sqrt{v^2 + \frac{1}{c^2}}\right)^2 = 1.$$

Rovnice přímky $\overline{PQ}$, která spojuje středy kruhů Γ, Γ', zní

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1;$$

její průsek $\mathfrak{N}$ s normálou

$$ax \sin\Theta - by \cos\Theta = c^2 \sin\Theta \cos\Theta$$

hoví rovnici

$$\left(a - \frac{c^2 \cos\Theta}{p}\right) x \sin\Theta - \left(b + \frac{c^2 \sin\Theta}{q}\right) y \cos\Theta = 0,$$

Je však

$$2(ap - c^2 \cos\Theta) = \frac{a^2 - c^2 \cos^2\Theta}{\cos\Theta},$$

$$2(bq + c^2 \sin\Theta) = \frac{b^2 + c^2 \sin^2\Theta}{\sin\Theta},$$

krátíme-li tedy výrazem

$$a^2 - c^2 \cos^2\Theta = b^2 + c^2 \sin^2\Theta,$$

vyjde

$$\frac{x \sin\Theta}{p \cos\Theta} - \frac{y \cos\Theta}{q \sin\Theta} = 0$$

čili

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \frac{b^2 - c^2 \sin^2\Theta}{a^2 + c^2 \cos^2\Theta} tg\,\Theta$$

aneb, znamenáme-li směrnici přímky $O\mathfrak{N}$ literou m,

$$m = \frac{a}{b} \frac{b^2 + (b^2 - c^2) tg^2\Theta}{a^2 + c^2 + a^2 tg^2\Theta} tg\,\Theta. \tag{65}$$

Bodům diametrálně protilehlým odpovídá táž přímka $O\mathfrak{N}$.

Danému směru přímky $O\mathfrak{N}$ odpovídají tři páry bodů protilehlých $(\Theta, \Theta + \pi)$; směry jejich normál tvoří kubickou involuci při proměnném m.

Ve zvláštním případě $a = b\sqrt{2}$ je $b = c$ a involuce přejde v kvadratickou; v parametru $tg\,\Theta = t$ se vyjádří vztahem

$$t_1 t_2 = \frac{3}{2}.$$

Tečna v bodě Θ má směrnici

$$-\frac{b \cos\Theta}{a \sin\Theta} = \frac{b \sin 2\Theta - 0}{a \cos 2\Theta - a},$$

jež splývá se směrnicí přímky spojující bod 2Θ s vrcholem $(a, 0)$ o parametru 0. Tedy normály vedené v protilehlých bodech Θ a $\Theta + \pi$ jsou kolmé na přímku $(0, 2\Theta)$ (což nám již známo).

Znamenejme A vrchol $x = a, y = o$ příslušný k parametru $\Theta = 0$, dále M bod na ellipse příslušný k úhlovému parametru 2Θ; kubická rovnice (65) přiřazuje takto k danému m tři body M_v o parametrech $2\Theta_v$, a tangentách $t_v = tg\,\Theta_v$. Normály ellipsy kolmé na přímky AM_1, AM_2, AM_3 mají tu vlastnost, že příslušné jim body $\mathfrak{N}$ leží na témž průměru ellipsy, jehož směrnice je právě veličina m.

Při označení

$$t = tg\,\Theta$$

lze involuci (65) psáti

$$(b^2 - c^2) t^3 + b^2 t = \frac{bm}{a} (a^2 t^2 + a^2 + c^2); \tag{65*}$$

znamenáme-li tedy

$$\varphi_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \varphi_2 = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1, \quad \varphi_3 = t_1 t_2 t_3$$

základní úkony symetrické kořenů t_1, t_2, t_3, máme vztahy

$$\varphi_2 = \frac{b^2}{b^2 - c^2}, \quad (a^2 + c^2)\varphi_1 = a^2 \varphi_3. \qquad (65^a)$$

---

18. *Kubické involuce na ellipse.*

Nechť kořeny rovnice stupně třetího

$$t^3 - \varphi_1 t^2 + \varphi_2 t - \varphi_3 = 0$$

jsou tangentové parametry tří bodů $M_1\, M_2\, M_3$ na ellipse:

$$t = tg \frac{\Theta}{2},$$

$$x = a\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1 + t^2}.$$

Rovnice kruhu K opsaného o trojúhelník $M_1 M_2 M_3$ bude ve tvaru determinantním

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & \frac{x}{a}, & \frac{y}{2b}, & 1 \\ a^2\,(1 - t^2)^2 + 4b^2 t^2, & 1 - t^4, & t + t^3, & (1 + t^2)^2 \end{vmatrix} = 0$$

při čemž poslední tři řádky naznačeny schematicky jediným, v němž třeba postupně klásti $t = t_1$, t_2, t_3 (kořeny rovnice kubické).

Operujeme-li na *sloupcích,* jak naznačuje schema

$$(2) + (4), \quad (1) - a^2(4),$$

obdržíme

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - a^2 & \frac{x + a}{2a} & \frac{y}{2b} & 1 \\ -4c^2 t^2 & 1 + t^2 & t + t^3 & 1 + 2t^2 + t^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomocí rovnice

$$t^3 = \varphi_1 t^2 - \varphi_2 t + \varphi_3, \quad t^4 = (\varphi_1^2 - \varphi_2)t^2 + (\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2)t + \varphi_1\varphi_3$$

obdržíme

$$t + t^3 = \alpha + \beta t + \gamma t^2, \quad 1 + 2t^2 + t^4 = \alpha' + \beta' t + \gamma' t^2,$$

$$(a) \begin{cases} \alpha = \varphi_3, & \beta = 1 - \varphi_2, & \gamma = \varphi_1 \\ \alpha' = \varphi_1\varphi_3 + 1, & \beta' = \varphi_3 - \varphi_1\varphi_2, & \gamma' = 2 + \varphi_1^2 - \varphi_2, \end{cases}$$

takže náš determinant bude zníti

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-a^2 & \dfrac{x+a}{2a} & \dfrac{y}{2b} & 1 \\ -4c^2t_1^2 & 1+t_1^2 & \alpha+\beta t_1+\beta t_1^2 & \alpha'+\beta' t_1+\gamma' t_1^2 \\ -4c^2t_2^2 & 1+t_2^2 & \alpha+\beta t_2+\gamma t_2^2 & \alpha'+\beta' t_2+\gamma' t_2^2 \\ -4c^2t_3^2 & 1+t_3^2 & \alpha+\beta t_3+\gamma t_3^2 & \alpha'+\beta' t_3+\gamma' t_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Na *řádcích* tohoto determinantu provedeme operace

$$\frac{(3)-(2)}{t_2-t_1}, \quad \frac{(4)-(2)}{t_3-t_1},$$

a ve výsledku ještě

$$\frac{(4)-(3)}{t_3-t_2};$$

tím vznikne

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-a^2 & \dfrac{x+a}{2a} & \dfrac{y}{2b} & 1 \\ -4c^2t_1^2 & 1+t_1^2 & \alpha+\beta t_1+\gamma t_1^2 & \alpha'+\beta' t_1+\gamma' t_1^2 \\ -4c^2(t_1+t_2) & t_1+t_2 & \beta+\gamma(t_1+t_2) & \beta'+\gamma'(t_1+t_2) \\ -4c^2 & 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Zde vypadnou ve třetím řádku členy t_1+t_2, a po té ve druhém řádku členy t_1 a t_1^2; zbude

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-a^2 & \dfrac{x+a}{2a} & \dfrac{y}{2b} & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha' \\ 0 & 0 & \beta & \beta' \\ -4c^2 & 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

jakožto rovnice kruhu K.

Zde třeba vyšetřiti determinanty

$$A \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' \\ 0 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix}, \quad B \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{x+a}{2a} & \dfrac{y}{2b} & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha' \\ 0 & \beta & \beta' \end{vmatrix},$$

načež rovnice kruhu K bude zníti

$$A(x^2+y^2-a^2)+4c^2B=0. \qquad (66)$$

Tu jest

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_3 & 1 + \varphi_1\varphi_3 \\ 0 & 1 - \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_1\varphi_2 \\ 1 & \varphi_1 & 2 + \varphi_1^2 - \varphi_2 \end{vmatrix}$$

tedy

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_3 & 1 \\ 0 & 1 - \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_1 \\ 1 & \varphi_1 & 2 - \varphi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_3 - \varphi_1 & \varphi_2 - 1 \\ 0 & 1 - \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_1 \\ 1 & \varphi_1 & 2 - \varphi_2 \end{vmatrix}$$

t. j.

$$A = (1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2. \tag{66^a}$$

Determinant B

$$B = \begin{vmatrix} \frac{x + a}{2a} & \frac{y}{2b} & 1 \\ 1 & \varphi_3 & 1 + \varphi_1\varphi_3 \\ 0 & 1 - \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_1\varphi_2 \end{vmatrix}$$

má po rozvinutí hodnotu

$$\begin{aligned} B = (\varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2 - 1)\frac{x + a}{2a} + \\ (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3)\frac{y}{2b} + (1 - \varphi_2) \end{aligned} \tag{66^b}$$

Rovnice kruhu K tedy zní

$$\begin{aligned} &[(1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2](x^2 + y^2 - a^2) \\ &- \frac{2c^2}{a}(1 - \varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 - \varphi_3^2)(x + a) - \frac{2c^2}{b}(\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2)y \\ &+ 4c^2(1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned} \tag{66^c}$$

Učiníme nyní uvažovanou rovnici kubickou homogenní kladouce

$$\varphi_\nu = \frac{\psi_\nu}{\psi_0},$$

tedy

$$\psi_0 t^3 - \psi_1 t^2 + \psi_2 t - \psi_3 = 0, \tag{67}$$

a položíme za ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 celistvě lineární funkce parametru λ, čímž obdržíme v (67) nejobecnější kubickou involuci.

Rovnice opsaného kruhu o trojici involuce příslušnou k parametru λ pak zní dle (66⁰)

$$
\begin{aligned}
&[(\psi_0-\psi_2)^2+(\psi_1-\psi_3)^2](x^2+y^2-a^2)\\
&-\frac{2c^2}{a}(\psi_0^2-\psi_0\psi_2+\psi_1\psi_3-\psi_3^2)(x+a)\\
&-\frac{2c^2}{b}(\psi_0\psi_3-\psi_1\psi_2)\,y+4c^2\psi_0(\psi_0-\psi_2)=0.
\end{aligned}
\tag{67^1}
$$

Z tvaru této rovnice vychází, že kruhy opsané trojinám kubické involuce na ellipse probíhají řadu druhého stupně

$$K_0+2\lambda K_1+\lambda^2K_2=0 \tag{67^2}$$

při označení

$$K_\nu\equiv c_\nu(x^2+y^2)+l_\nu x+m_\nu y+n_\nu.$$

Středy těchto kruhů probíhají kuželosečku, neboť mají souřadnice

$$p=-\frac{1}{2}\frac{l_0+2\lambda l_1+\lambda^2 l_2}{c_0+2\lambda c_1+\lambda^2c_2},\quad q=-\frac{1}{2}\frac{m_0+2\lambda m_1+\lambda^2 m_2}{c_0+2\lambda c_1+\lambda^2 c_2}$$

a kruhy samy obalují bicirkulární čáru 4. stupně (Darbouxovu cykliku)

$$K_1^2-K_0K_2=0. \tag{67^3}$$

Kruhy (67^2) mají své středy na kuželosečce a protínají orthogonálně určitý kruh Σ, jehož střed je v průseku chordál kruhů $K_0\,K_1K_2$; poloměr je společná délka tečen z něho k těmto kruhům vedených.

Levou stranu (67^3) rovnice obalové čáry $F(x, y)$ lze na nekonečně mnoho způsobů psáti ve tvaru

$$F(x,y)\equiv\Phi^2(x,y)-G(x,y)\,H(x,y), \tag{67^4}$$

kde Φ, G, H jsou výrazy druhého stupně. A sice odpovídá takový rozklad každé kuželosečce $G=0$, která se čáry F dotýká ve 4 bodech v její průsecích s kuželosečkou $\Phi=0$. Zejména existují takové rozklady obecně tři, v nichž čáry Φ, G, H jsou kruhy (po případě z části přímky); tyto případy však vylučme z následující úvahy.

Uvažujme kuželosečku $G=0$, a vyjadřme x, y jako racionální funkce parametru t. Řešme rovnici (67^2) vůči λ, považujíce x, y za bod čáry G; poněvadž zde $K_1^2 - K_0 K_2 = F = \Phi^2$, obdržíme

$$\lambda = -\frac{K_1 \pm \Phi}{K_2},$$

takže vycházejí pro λ dvě hodnoty λ_1, λ_2, které jsou racionální funkce parametru t. Řada kruhů (67^2) stanovených body na kuželosečce G se rozpadá ve dvě řady I a II.

Libovolným bodem M_0 čáry G veďme kruh Γ řady I; jeho zbývající tři průseky s čarou G buďte $M' M'' M'''$. Kruhy řady I z těchto bodů vycházející (parametry těchto bodů prostřednictvím funkce λ_1 určené) se obecně liší od Γ; bude tedy pro tyto body $M^{(\nu)}$ kruh Γ náležeti řadě II. Pro parametry $t' t'' t'''$ bodů $M^{(\nu)}$ má pak funkce $\lambda_2(t)$ hodnotu společnou, jest $\lambda_2(t)$ zlomek dvou celistvých funkcí třetího stupně, kdežto $\lambda_1(t)$ je lineární.

Máme tak na kuželosečce G involuci kubickou trojic M' M'' M''', ke každé trojici přísluší kruhový doplněk M_0, od prvků trojiny vyznačený tím, že jím určený kruh řady II se od kruhu čtveřiny liší.

Každá anallagmatie (jichž obecně jest čtvero) cykliky F dává tímto způsobem podnět ke kubické involuci na kuželosečce G (po případě ke dvěma involucím obyčejným spolu prométným).

V komplexním parametru

$$z = e^{i\Theta}$$

vyjádří se výsledky předešlé podobně; možno ostatně převésti vzorce předešlé substitucí

$$t = i\frac{1-z}{1+z}$$

ke vzorcům o komplexním parametru. Zejména vyjádří se involuce (67) takto

$$\overline{\psi_0}\, z^3 - \overline{\psi_1}\, z^2 + \overline{\psi_2}\, z - \overline{\psi_3} = 0, \tag{68}$$
$$\overline{\psi_0} = i(\psi_0 - \psi_2) + (\psi_1 - \psi_3)$$
$$\overline{\psi_1} = i(3\psi_0 + \psi_2) + (\psi_1 + 3\psi_3)$$
$$\overline{\psi_2} = i(3\psi_0 + \psi_2) - (\psi_1 + 3\psi_3)$$
$$\overline{\psi_3} = i(\psi_0 - \psi_2) - (\psi_1 - \psi_3).$$

Je-li $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ trojice involuční, bude

$$x_\nu = \frac{a}{2}\left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu}\right), \quad y_\nu = \frac{b}{2i}\left(z_\nu - \frac{1}{z_\nu}\right)$$

a souřadnice *hmotného středu* trojice

$$\xi = \frac{1}{3}\Sigma x_\nu, \quad \eta = \frac{1}{3}\Sigma y_\nu$$

se na základě vztahů

$$\Sigma z_\nu = \overline{\psi_1} : \overline{\psi_0}, \quad \Sigma \frac{1}{z_\nu} = \overline{\psi_2} : \overline{\psi_3}$$

vyjádří takto:

$$\xi = \frac{a}{6}\left(\frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_0}} + \frac{\overline{\psi_2}}{\overline{\psi_3}}\right), \quad \eta = \frac{b}{6i}\left(\frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_0}} - \frac{\overline{\psi_2}}{\overline{\psi_3}}\right). \tag{69}$$

Výrazy ty jsou vůči parametru λ lomené funkce kvadratické o společném jmenovateli a tedy

„těžiska skupin kubické involuce na ellipse probíhají kuželosečku."

Veličiny

$$\frac{\overline{\psi_1}}{\overline{\psi_0}} = \frac{(\psi_1 + 3\psi_3) + i(3\psi_0 + \psi_2)}{(\psi_1 - \psi_3) + i(\psi_0 - \psi_2)},$$

$$\frac{\overline{\psi_2}}{\overline{\psi_3}} = \frac{(\psi_1 + 3\psi_3) - i(3\psi_0 + \psi_2}{(\psi_1 - \psi_3) - i(\psi_0 - \psi_2)}.$$

jsou komplexní sdružené a bude lze na místě (69) psáti

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{a}{3}\,\frac{(\psi_1 + 3\psi_3)(\psi_1 - \psi_3) + (3\psi_0 + \psi_2)(\psi_0 - \psi_2)}{(\psi_1 - \psi_3)^2 + (\psi_0 - \psi_2)^2} \\ \eta &= \frac{b}{3}\,\frac{(3\psi_0 + \psi_2)(\psi_1 - \psi_3) - (\psi_1 + 3\psi_3)(\psi_0 - \psi_2)}{(\psi_1 - \psi_3)^2 + (\psi_0 - \psi_2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{69'}$$

Při reálných funkcích ψ_ν vymizí výraz

$$(\alpha) \qquad (\psi_0 - \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_3)^2$$

pro reálné λ jen když současně $\psi_0 = \psi_2$, $\psi_1 = \psi_3$, což je možno pouze v případě

$$(\beta) \qquad \frac{\psi_1 - \psi_3}{\psi_0 - \psi_2} = \text{konst.};$$

pak ale nullová místa našeho výrazu splynou. Obecně tedy veličiny (α) mizí pouze pro dvě komplexní λ a z toho soudíme, že *kuželosečka těžiští jest obecně ellipsa,* pouze v případě (β) parabola.

Zbývá ještě výjimečný případ, kdy rozdíly

$$\psi_0 - \psi_2, \ \psi_1 - \psi_3$$

jsou nezávislé na λ; tu křivka těžiští jest parabola.

Z typografických příčin pišme $\mathfrak{g}_\nu$ místo $\overline{\psi}_\nu$, takže (68) zní

$$\mathfrak{g}_0 z^3 - \mathfrak{g}_1 z^2 + \mathfrak{g}_2 z - \mathfrak{g}_3 = 0, \qquad (68^*)$$

a při tom

$$\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{g}'_\nu + \lambda \mathfrak{g}''_\nu,$$

kde $\mathfrak{g}'_\nu$ a $\mathfrak{g}''_\nu$ jsou konstanty.

Kruh K skupiny $z_1 z_2 z_3$ protne ellipsu v *doplňkovém* čtvrtém bodě z_0, jehož parametr jest

$$z_0 = \frac{1}{z_1 z_2 z_3} = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3}.$$

Je-li z_0 dán, jest rovnicí

$$\mathfrak{g}_0 - z_0 \mathfrak{g}_3 = 0$$

parametr λ určen ve tvaru

$$\lambda = \frac{\mathfrak{g}'_0 - \mathfrak{g}'_3 z_0}{\mathfrak{g}''_3 z_0 - \mathfrak{g}''_0}$$

i možno zavésti z_0 jako parametr na místě λ, předpokládaje, že veličina

$$z_0 = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3}$$

není stálá. Rovnice kubická pak obdrží tvar

$$\begin{aligned} z_0 [(\mathfrak{g}'_0 \mathfrak{g}''_3 - \mathfrak{g}''_0 \mathfrak{g}'_3) z^3 - (\mathfrak{g}'_1 \mathfrak{g}''_3 - \mathfrak{g}''_1 \mathfrak{g}') z^2 + (\mathfrak{g}'_2 \mathfrak{g}''_3 - \mathfrak{g}''_2 \mathfrak{g}'_3) z] \\ - (\mathfrak{g}'_0 \mathfrak{g}''_1 - \mathfrak{g}''_0 \mathfrak{g}'_1) z^2 + (\mathfrak{g}'_0 \mathfrak{g}''_2 - \mathfrak{g}''_0 \mathfrak{g}'_2) z \\ - (\mathfrak{g}'_0 \mathfrak{g}''_3 - \mathfrak{g}''_0 \mathfrak{g}'_3) = 0. \end{aligned}$$

Zůstaňme však u tvaru (68*) a doplňme involuční trojici na čtveřinu o bod z_0. Souměrné úkony pak jsou

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_0} + z_0, \quad \mathfrak{f}_3 = \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} + z_0 \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_0}, \quad \mathfrak{f}_2 = \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_0} + z_0 \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_0}$$

tedy po dosazení hodnoty

$$z_0 = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3}$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_3}, \quad \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = \frac{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3}$$

$$\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = \frac{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_0 - \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3},$$

načež rovnice opsaného kruhu K zní dle (8^2)

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \frac{c^2}{4}\left(\frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_3}\right) - \frac{d^2}{2} = 0 \qquad (70)$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2}{8a}\left(\frac{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3}\right) \\ q &= \frac{c^2 i}{8b}\left(\frac{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_0 - \mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (70^0)$$

Dosazením uvedených výše hodnot $\mathfrak{g}_\nu = \overline{\psi_\nu}$ vycházejí hodnoty:

$$p = \frac{c^2}{a}\,\frac{\psi_3(\psi_1 - \psi_3) + \psi_0(\psi_0 - \psi_2)}{(\psi_0 - \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_3)^2},$$

$$q = \frac{c^2}{b}\,\frac{\psi_0\psi_3 - \psi_1\psi_2}{(\psi_0 - \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_3)^2},$$

$$\frac{c^2}{4}\left(\frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_3}\right) - \frac{d^2}{2} = 2c^2\,\frac{\psi_0^2 + \psi_3^2 - \psi_0\psi_2 - \psi_1\psi_3}{(\psi_0 - \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_3)^2} - a^2,$$

které se kryjí s rovnicí (67^1).

Střed S opsaného kruhu K má souřadnice (70^0), doplněk M_0 pak má souřadnice

$$x_0 = \frac{a}{2}\left(\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3} + \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0}\right), \quad y_0 = \frac{b}{2i}\left(\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3} - \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0}\right).$$

Souřadnice přímky $\overline{M_0 S}$ jsou racionální funkce 4. stupně parametru λ, a tedy tato přímka obaluje racionální čáru 4. třídy.

Souřadnice těžiska skupiny T jsou dle (69)

$$\xi = \frac{a}{6}\left(\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_0} + \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3}\right), \quad \eta = \frac{b}{6i}\left(\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_0} - \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3}\right),$$

a přímka M_0T má rovnici

$$(G)\qquad \begin{vmatrix} \frac{x}{a}+\frac{iy}{b}, & \frac{x}{a}-\frac{iy}{b}, & 1 \\ \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3} & \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} & 1 \\ \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_0} & \frac{\mathfrak{g}_2}{\mathfrak{g}_3} & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tedy též přímka (G) spojující těžiště skupiny s doplňkem M_0 obaluje racionální čáru 4. třídy.

Ve zvláštním případě, kdy z_0 nezávisí na λ, t. j.

$$\frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_0} = \text{konst.}$$

tvoří opsané kruhy K svazek, jehož jeden vrchol je $M_0(z_0)$.

V tom případě má determinant (G) v druhém řádku konstanty, ve třetím po násobení $\mathfrak{g}_0$ lineárné výrazy, takže (G) probíhá obyčejný svazek, jak samozřejmo.

V případě Steinerovy involuce oskulačních trojic

$$z_0 z^3 - 1 = 0 \quad (\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = 0,\ \ \mathfrak{g}_3 = 1,\ \ \mathfrak{g}_0 = z_0)$$

se (G) redukuje na

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a}+\frac{iy}{b}, & \frac{x}{a}-\frac{iy}{b} \\ z_0 & \frac{1}{z_0} \end{vmatrix} = 0,$$

kterážto přímka probíhá svazek s vrcholem v počátku O. Těžiště S oskulačních skupin skutečně leží v počátku.

Poloměr opsaného kruhu vedený doplňkem má v případě Steinerových trojic rovnici (M_0S)

$$\begin{vmatrix} x & , y & , 1 \\ \frac{a}{2}\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right), & \frac{b}{2i}\left(z_0-\frac{1}{z_0}\right), & 1 \\ \frac{c^2}{8a}\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right), & \frac{c^2 i}{8b}\left(z_0-\frac{1}{z_0}\right), & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili po substituci $z_0 = e^{i\Theta_0}$,

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\cos\Theta_0} & \frac{y}{\sin\Theta_0} & 1 \\ a & b & 1 \\ \frac{c^2}{a} & -\frac{c^2}{b} & 4 \end{vmatrix} = 0 = \frac{4b^2+c^2}{b\cos\Theta_0}x - \frac{4a^2-c^2}{a\sin\Theta_0}y - \frac{c^2d^2}{ab}$$

Tato přímka (H) má tedy souřadnice

$$(H^1) \qquad u = -a\frac{a^2+3b^2}{c^2d^2}\cdot\frac{1}{\cos\Theta_0}, \quad v = +b\frac{b^2+3a^2}{c^2d^2}\,\frac{1}{\sin\Theta_0}$$

Klademe-li na okamžik

$$\frac{c^2d^2}{a(a^2+3b^2)} = \alpha, \quad \frac{c^2d^2}{b(b^2+3a^2)} = \beta,$$

máme souřadnice naše

$$(H^2) \qquad u = -\frac{1}{\alpha\cos\Theta_0}, \quad v = \frac{1}{\beta\sin\Theta_0} \qquad (\Theta_0 = -3\Theta)$$

a obalová čára 4. třídy přímky (H) má tangenciální rovnici

$$(H^*) \qquad \frac{1}{\alpha^2u^2} + \frac{1}{\beta^2v^2} = 1,$$

i jest patrně (srov. 33°) evoluta ellipsy mající osy položené na osách původní ellipsy (a, b) a za polouosy veličiny

$$a' = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}, \quad b' = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}.$$

Vzhledem k identitě

$$\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\beta} = \frac{(a \pm b)^3}{c^2d^2}$$

plyne

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{(a^2-b^2)^3}{c^4d^4} = \frac{c^2}{d^4},$$

tedy

$$a' = \frac{ad^2(d^2+2b^2)}{c^4}, \quad b' = \frac{bd^2(d^2+2a^2)}{c^4}.$$

To jsou délky polouos ellipsy (a', b'), jejíž normály jsou přímky spojující ve Steinerových trojicích střed opsaného kruhu s bodem doplňkovým.

Patrně

$$c'^2 = a'^2 - b'^2 = \frac{d^4}{c^2},$$

a rovnice (H^1) znějí

$$(H) \qquad u = -\frac{a'}{c'^2 \cos\Theta_0}, \quad v = \frac{b'}{c'^2 \sin\Theta_0}.$$

Normála ellipsy (a', b') *v bodě* M'_0, *příslušném k témuž úhlovému parametru* Θ_0 *jako doplněk* M_0 *Steinerovy trojice oskulační na ellipse* (a, b), *prochází tímto doplňkem* M_0 *a středem opsaného kruhu.*

Obraťme se k případu

$$z_0 = \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_3} = \text{konst.};$$

opsané kruhy K tvoří svazek, jehož jeden vrchol je z_0; středy S těchto kruhů a těžiště T involučních trojic probíhají přímky, i jsou zároveň v souvislosti promětné; přímky ST obalují tedy kuželosečku, což ostatně plyne též z jich rovnic

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a(\mathfrak{g}_1 + z_0\mathfrak{g}_2) & -ib(\mathfrak{g}_1 - z_0\mathfrak{g}_2) & 6\mathfrak{g}_0 \\ \frac{c^2}{a}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 + z_0\mathfrak{g}_0 + z_0\mathfrak{g}_2), & \frac{ic^2}{b}(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3 + z_0\mathfrak{g}_0 - z_0\mathfrak{g}_2), & 8\mathfrak{g}_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{71}$$

---

19. *Kubické involuce pat normál.*

Z proměnného bodu z' na ellipse vedené normály mají paty $z_1 z_2 z_3$, jichž souměrné úkony znamenejme $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$; připojíme-li k nim prvek z', vznikne čtveřina, která dle čl. 13. hoví vztahům

$$\mathfrak{f}_4 = -1, \quad \mathfrak{f}_2 = 0, \quad \mathfrak{f}_1 = \frac{2ax - 2iby}{c^2}, \quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{2ax + 2iby}{c^2}$$

značí-li

$$x = \frac{a}{2}\left(z' + \frac{1}{z'}\right), \quad y = \frac{b}{2i}\left(z' - \frac{1}{z'}\right)$$

souřadnice bodu z'.

Z první rovnice vychází

$$\varphi_3 = z_1 z_2 z_3 = -\frac{1}{z'},$$

z druhé plyne

$$\varphi_2 = -\varphi_1 z',$$

třetí pak podává

$$\varphi_1 + z' = \mathfrak{f}_1 = \frac{a^2}{c^2}\left(z' + \frac{1}{z'}\right) - \frac{b^2}{c^2}\left(z' - \frac{1}{z'}\right) = z' + \frac{d^2}{c^2 z'},$$

tedy

$$\varphi_1 = \frac{d^2}{c^2 z'}.$$

Máme tedy na konec pro paty normál z bodu z' ellipsy spuštěných souměrné úkony

$$\varphi_1 = \frac{d^2}{c^2 z'},\quad \varphi_2 = -\frac{d^2}{c^2},\quad \varphi_3 = -\frac{1}{z'},$$

a veličiny $z_1\, z_2\, z_3$ jsou kořeny rovnice

$$z'(c^2 z^3 - d^2 z) = d^2 z^2 - c^2, \tag{72}$$

takže tvoří při proměnném z' kubickou involuci.

Srovnáním s (68*) máme

$$\mathfrak{g}_0 = c^2 z',\quad \mathfrak{g}_1 = d^2,\quad \mathfrak{g}_2 = -d^2 z',\quad \mathfrak{g}_3 = -c^2; \tag{72⁰}$$

těžisko trojice pat normál má souřadnice (69)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{ad^2}{6c^2}\left(z' + \frac{1}{z'}\right) = \frac{ad^2}{3c^2}\cos\Theta' \\ \eta &= -\frac{bd^2}{6c^2 i}\left(z' - \frac{1}{z'}\right) = -\frac{bd^2}{3c^2}\sin\Theta', \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

při čemž

$$z' = e^{i\Theta'}.$$

Těžiště pat normál spuštěných s bodu xy na ellipse má souřadnice

$$(T) \qquad \xi = \frac{d^2}{3c^2}x,\quad \eta = -\frac{d^2}{3c^2}y.$$

Ježto souřadnice příslušného bodu Frégierova znějí

$$(F) \qquad x_0 = \frac{c^2}{d^2}x,\quad y_0 = -\frac{c^2}{d^2}y,$$

plyne

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{y}{x},$$

$$x_0\xi = \frac{x^2}{3}, \quad y_0\eta = \frac{y^2}{3}, \quad x_0\xi + y_0\eta = \frac{x^2+y^2}{3}.$$

Těžiště T pat normál vedených z bodu M na ellipsu leží na průměru bodu Frégierova F; oba body T a F jsou harmonicky sdruženy vůči kruhu se středem O a poloměrem $\frac{OM}{\sqrt{3}}$:

$$OT \,.\, OF = \frac{1}{3}\overline{OM}^2.$$

Patní kruh normál K má střed [(70⁰) a (72⁰)]

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{4a}\left(z' + \frac{1}{z'}\right) = \frac{b^2}{2a}\cos\Theta' \\ q &= \frac{a^2}{4bi}\left(z' - \frac{1}{z'}\right) = \frac{a^2}{2b}\sin\Theta', \end{aligned}\right\} \quad (74^1)$$

jenž probíhá ellipsu o poloosách

$$\frac{b^2}{2a}, \quad \frac{a^2}{2b}.$$

Rovnice kruhu K zní

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2x}{a}\cos\Theta' - \frac{a^2y}{b}\sin\Theta' = d^2; \qquad (74^2)$$

dosadíme-li sem výrazy komplexní za $\sin\Theta'$ a $\cos\Theta'$, shledáme, že kruhy ty tvoří řadu 2. stupně, jejíž obalová čára — zvláštní spirika Perseova — se určí bez obtíží.

Přímka (L) spojující body M_0 a střed S kruhu K má zde rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a\cos\Theta', & -b\sin\Theta', & 1 \\ \frac{b^2}{a}\cos\Theta', & \frac{a^2}{b}\sin\Theta', & 2 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} \frac{ax}{\cos\Theta'} & \frac{by}{\sin\Theta'} & 1 \\ a^2 & b^2 & -1 \\ b^2 & a^2 & 2 \end{vmatrix} \equiv (2b^2 + a^2)\frac{ax}{\cos\Theta'} - (2a^2 + b^2)\frac{by}{\sin\Theta'}$$

$$+ c^2d^2 = 0,$$

takže její Plückerovské souřadnice mají hodnoty

$$u = \frac{a(a^2 + 2b^2)}{c^2d^2} \frac{1}{\cos\Theta'}, \quad v = -\frac{b(b^2 + 2a^2)}{c^2d^2} \frac{1}{\sin\Theta'},$$

které po zavedení úhlu $\Theta_0 = \Theta' + \pi$, jemuž přísluší *doplněk* M_0 trojice pat, lze psáti

$$u = -\frac{a(d^2 + b^2)}{c^2d^2 \cos\Theta_0}, \quad v = \frac{b(d^2 + a^2)}{c^2d^2 \sin\Theta_0}.$$

Položí-li se

$$a'' = \frac{ad^2(b^2 + d^2)}{a^4 + a^2b^2 + b^4}, \quad b'' = \frac{bd^2(a^2 + d^2)}{a^4 + a^2b^2 + b^4},$$

nacházíme, že

přímka $L \equiv M_0S$ *je normála ellipsy* (a'', b') *v bodě, jehož úhlový parametr* Θ_0 *je týž jako pro bod* M_0 *na ellipse* (a, b).

Jinými slovy:

Obalová čára přímky L, *která spojuje kruhový doplněk pat normál se středem opsané kružnice, jest evoluta ellipsy* (a'', b'').

Přímka $M'S$, která spojuje východisko $M'(z')$ normál se středem kruhu K, má rovnici

$$\begin{vmatrix} \frac{ax}{\cos\Theta'} & \frac{by}{\sin\Theta'} & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 2 \end{vmatrix} = (2b^2 - a^2) \frac{ax}{\cos\Theta'} - (2a^2 - b^2) \frac{by}{\sin\Theta'} + c^2d^2 = 0$$

a její souřadnice

$$u = -\frac{a(2b^2 - a^2)}{c^2d^2 \cos\Theta_0}, \quad v = \frac{b(2a^2 - b^2)}{c^2d^2 \sin\Theta_0}$$

ukazují, že její obalová čára jest evolutou určité ellipsy mající osy v osách ellipsy (a, b).

Obalová čára přímky $M'T$ spojující východisko normál s těžištěm involuční skupiny určí se podobně; rovnice přímky této jest dle (73)

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a\cos\Theta'}, & \frac{y}{b\sin\Theta'}, & 1 \\ 1 & -1 & \frac{3c^2}{d^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(M'T) \qquad -\frac{2a^2-b^2}{ad^2\cos\Theta'}x - \frac{2b^2-a^2}{bd^2\sin\Theta'}y + 1 = 0.$$

Je-li zvláště $a = b\sqrt{2}$, mají přímky $M'S$ a $M'T$ směr stálý Ox, resp. Oy; rovněž M_0T je v tomto případě rovnoběžno s Ox.

Mimo tento výjimečný případ je také obálka přímek $M'T$ evoluta jisté ellipsy souosé s danou ellipsou (a, b).

Podmínky, aby normály v bodech $z_1 z_2 z_3$ procházely bodem z' na ellipse, zněly

$$\varphi_1 = \frac{d^2}{c^2 z'}, \quad \varphi_2 = -\frac{d^2}{c^2}, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{z'},$$

tedy vyloučí-li se z'

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = -\frac{d^2}{c^2}. \tag{75}$$

Tyto podmínky vyjadřují, že normály v bodech, jichž parametry $z = e^{i\Theta}$ hoví rovnici

$$z^3 - \varphi_1 z^2 + \varphi_2 z - \varphi_3 = 0,$$

protínají se na ellipse.

Při parametru tangentovém

$$t = tg\frac{\Theta}{2}$$

znějí podmínky (75)

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{a^2+c^2}{b^2}; \quad \prod_1^3 (t + t_\nu) = \sum_0^3 \varphi_\nu t^{3-\nu}, \quad \varphi_0 = 1. \tag{76}$$

V tangentovém parametru zní podmínka soukružnosti čtyř bodů

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3;$$

znamenáme-li t_0 bod doplňkový bodů $t_1\, t_2\, t_3$ na čtveřinu kruhovou, máme tedy

$$\varphi_1 + t_0 = \varphi_3 + t_0\varphi_2,$$

t. j.

$$t_0 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{1 - \varphi_2}, \quad \varphi_1 = \varphi_2\varphi_3,$$

tedy

$$t_0 = \varphi_3,$$

pro případ, že normály $t_1\, t_2\, t_3$ tvoří svazek.

Znamenáme li souměrné úkony veličin $t_1\, t_2\, t_3$ literami φ_1, φ_2, φ_3,

$$t_\nu = tg\, \frac{\Theta_\nu}{2},$$

jest rovnice

$$\varphi_1 = \varphi_2\varphi_3$$

dostatečnou i nutnou podmínkou, aby normály v bodech Θ_1, Θ_2, Θ_3 procházely společným bodem; pro

$$\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 0$$

je Θ_0 bod doplňkový na čtveřinu kruhovou a jest

$$tg\, \frac{\Theta_0}{2} = \varphi_3.$$

Je-li průsek normál na ellipse, máme dle podmínek (76) při označení

$$k = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{2a^2 - b^2}{b^2}$$

rovnici kubickou

$$t^3 + kt = \varphi_3\,(kt^2 + 1). \tag{76^a}$$

Pro reálná řešení t je patrně $\varphi_3 : t$ kladné, tedy má t totéž znamení jako $\varphi_3 = t_0$, takže paty reálných normál leží na téže straně velké osy jako bod M_0, tudíž na opačné straně bodu M', z něhož jsou normály na ellipsu spuštěny. Což ostatně názor podává bezprostředně.

Rovnici (76^a) pišme

$$\varphi_3 = f(t), \quad f(t) = \frac{t^3 + kt}{kt^2 + 1};$$

derivace

$$f'(t) = \frac{kt^4 - (k^2 - 3)t^2 + k}{(kt^2 + 1)^2}$$

vymizí pro hodnoty t hovící podmínce

$$(\alpha) \qquad \frac{t^2 + t^{-2}}{2} = \frac{k^2 - 3}{2k};$$

pro reálná t je levá strana větší jedné, i musí býti splněna podmínka

$$k^2 - 3 > 2k \quad \text{t. j.} \quad k > 3,$$

má-li derivace měniti znamení. To znamená, že tu musí

$$a^2 > 2b^2.$$

Není-li tato podmínka splněna, má derivace $f'(t)$ znamení stálé a funkce $f(t)$ se mění jednotvárně, takže pouze jednou projde hodnotou danou φ_3.

„*U ellipsy* (a, b) *v případě* $a \leqq b\sqrt{2}$ *vychází z každého bodu jejího pouze jedna reálná její normála.*“

V opačném případě $(a > b\sqrt{2})$ protíná evoluta ellipsu ve čtyřech reálných bodech, jimiž dělí se ellipsa na čtyři oblouky (po dvou symetrické); z bodů na dvou těchto obloucích vycházejí jen reálné normály, z bodů na druhých obloucích vedené normály jsou dvě pomyslné a jedna reálná.

Ustanovme obalovou čáru přímek, jež spojují paty normál ellipsy (a, b), spuštěných z jejích různých bodů.

Znamenejme

$$-\frac{d^2}{c^2} = m,$$

rovnice (75) platné pro trojici takových normál (v komplexním parametru) znějí

$$\varphi_2 = m, \quad \varphi_1 = m\varphi_3.$$

Znamenejme parametry pat z, z_1, z_2, a kladme

$$z_1 + z_2 = \mathfrak{f}_1, \quad z_1 z_2 = \mathfrak{f}_2;$$

bude

$$\varphi_2 = \mathfrak{f}_2 + z\mathfrak{f}_1, \quad \varphi_1 = z + \mathfrak{f}_1, \quad \varphi_3 = z\mathfrak{f}_2,$$

tedy rovnice naše znějí

$$\mathfrak{z}\mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2 - m) = 0, \quad z(1 - m\mathfrak{f}_2) + \mathfrak{f}_1 = 0,$$

takže po vyloučení z je

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{f}_1^2 - (\mathfrak{f}_2 - m)(1 - m\mathfrak{f}_2) = 0.$$

Značí-li u, v Plückerovské souřadnice přímky $\widehat{z_1 z_2}$, máme

$$(\beta) \qquad \mathfrak{f}_1 = -\frac{2}{au - ibv}, \quad \mathfrak{f}_2 = \frac{au + ibv}{au - ibv};$$

tyto hodnoty dosadíme do rovnice (α), čímž vyjde

$$4 - [au(1 - m) + ibv(1 + m)] \cdot [au(1 - m) - ibv(1 + m)] = 0$$

jakožto rovnice obalové čáry přímek $z_1 z_2$.

Poněvadž

$$1 - m = \frac{2a^2}{c^2}, \qquad 1 + m = -\frac{2b^2}{c^2},$$

zní tato rovnice

$$a^6 u^2 + b^6 v^2 = c^4, \tag{77}$$

a v souřadnicích bodových

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{c^4}. \tag{77*}$$

„*Paty normál spuštěných z různých bodů ellipsy* (a, b) *jsou vrcholy trojúhelníků této ellipse vepsaných a o ellipsu* $\left(\frac{a^3}{c^2}, \frac{b^3}{c^2}\right)$ *opsaných.*"

Uvažujme nyní normály spuštěné z různých bodů pevné normály $z_0 = e^{i\omega}$; zbývající tři normály mějte paty $z, z_1 z_2$, a pišme

$$\mathfrak{g}_1 = z_1 + z_2, \quad \mathfrak{g}_2 = z_1 z_2.$$

Podmínky platné o čtveřině pat normál ze společného bodu t. j.

$$\mathfrak{f}_2 = 0, \quad \mathfrak{f}_4 = -1$$

dávají pak

$$z z_0 \mathfrak{g}_2 = -1, \quad z_0 z + \mathfrak{g}_2 + (z_0 + z)\mathfrak{g}_1 = 0,$$

čili po vyloučení z

$$-1 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 z_0 - \frac{\mathfrak{g}_1}{z_0} = 0.$$

Veličiny $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ nastupují na místo $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ v rovnicích (β), značí-li opět u, v souřadnice přímky $\overline{z_1 z_2}$ spojující paty normál; dosazením těchto výrazů do poslední rovnice vychází

$$4abiuv - 2(au + ibv)e^{i\omega} + 2(au - ibv)e^{-i\omega} = 0$$

čili

$$abuv - au \sin\omega - bv \cos\omega = 0. \tag{78}$$

Vrcholy trojúhelníků ellipse (a, b) vepsaných a této parabole (78) opsaných mají vlastnost, že normály ellipsy v nich vedené se protínají na normále ellipsy v hodě $\Theta = \omega$.

Parabola dotýká se os Ox, Oy v bodech $x = -\dfrac{a}{\cos\omega}$, resp. $y = -\dfrac{b}{\sin\omega}$, v nichž tečna ellipsy v bodě $\omega + \pi$ (diametrálním) vedená tyto osy protíná.

Směr osy paraboly obdrží se jako rovnice pólu přímky $(0, 0)$ ve tvaru

$$au \sin\omega + bv \cos\omega = 0,$$

a je tedy směrnice rovna $\dfrac{b \cos\omega}{a \sin\omega}$, t. j.

„osa paraboly má směr tečny ellipsy v bodě symetrickém $-\omega$.*"*

Abychom určili ohnisko paraboly, uvažujme isotropní tečnu $v = iu$; vložením do (78) vyjde pak

$$abu = b \cos\omega - ia \sin\omega, \quad abv = a \sin\omega + ib \cos\omega;$$

reálný bod této tečny $ux + vy + 1 = 0$ hoví rovnicím

$$(F) \qquad \begin{aligned} bx \cos\omega + ay \sin\omega + ab &= 0 \\ ax \sin\omega - by \cos\omega &= 0. \end{aligned}$$

První přísluší tečně ellipsy v bodě diametrálním $\omega + \pi$, druhá je kolmice ze středu O na ni spuštěná:

„Ohnisko paraboly (78) *leží v orthogonálním průmětu středu ellipsy O do její tečny v bodě $\omega + \pi$ vedené."*

„Ohniska parabol (78) *příslušných k různým bodům ω naplňují středovou úpatnici základní ellipsy."*

Řídící přímka paraboly prochází póly obou přímek (F), které určují ohnisko; první přímka má souřadnice

$$u_1 = \frac{\cos\omega}{a}, \quad v_1 = \frac{\sin\omega}{b},$$

a její pól má rovnici

$$0 \,.\, u + 0 \,.\, v = \sin\omega \cos\omega,$$

t. j. pól ten jest právě bod O.

„Řídící přímka paraboly (78) *jest kolmice spuštěná ze středu ellipsy na její tečnu v symetrickém bodě* — ω.

Rovnici (78) lze psáti

$$\frac{\cos\omega}{au} + \frac{\sin\omega}{bv} = 1; \tag{78*}$$

příční bod tečny u, v t. j. přímky $\overline{z_1 z_2}$

$$x_0 = -\frac{1}{u}, \quad y_0 = -\frac{1}{v}$$

tedy probíhá přímku

$$\frac{x_0 \cos\omega}{a} + \frac{y_0 \sin\omega}{b} + 1 = 0,$$

tečnu ellipsy v bodě $\omega + \pi$.

Libovolný bod P_0 na tečně ellipsy v bodě $\omega + \pi$ promítněme do její os; spojka průmětů seče ellipsu ve dvou bodech, jichž normály se protnou na normále bodu ω.

Leží na snadě, že totéž platí o druhé tečně ellipsy z bodu P_0 vedené, t. j. pata čtvrté normály procházející společným bodem prvních tří je diametrální s dotykovým bodem druhé tečny. (Joachimsthal, Crelleův J. 26 a 53).

„Libovolný bod P_0 v rovině ellipsy promítněme do její os; spojivá přímka průmětů seče ellipsu ve dvou bodech, jichž normály mají týž průsek jako normály v bodech diametrálních s dotykovými body tečen z bodu P_0 vedených.

Parabolu (78) lze též vytvořiti jako jistou parabolu*) Steinerovu.

*) Pro četné syntheticky odvozené vztahy srov. M. Pelíšek, Über die Normalen der Kegelschnitte (Zprávy o zased. král. čes. spol. nauk 1883).

„Otáčí-li se přímka v rovině kuželosečky kol pevného bodu P_0, obaluje kolmice na ni z jejího pólu spuštěná určitou parabolu“ (jež se dotýká poláry pevného bodu a čtyř tečen kuželosečky vedených v patách normál daným bodem jdoucích).

Buď kuželosečkou naše ellipsa, tedy v přímkových souřadnicích

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1;$$

hybná přímka $u_0 v_0$ otáčená kol pevného pólu $x_0 y_0$ má pól o rovnici

$$a^2u_0u + b^2v_0v = 1;$$

kolmice u, v z pólu na přímku u_0v_0 spuštěná hoví ještě rovnici

$$u_0u + v_0v = 0;$$

z obou posledních rovnic vychází

$$c^2uu_0 = 1, \quad c^2vv_0 = -1,$$

což ve spojení s podmínkou $u_0x_0 + v_0y_0 + 1 = 0$ dává podmínku

$$\text{(S)} \qquad \frac{x_0}{u} - \frac{y_0}{v} + c^2 = 0,$$

které hoví souřadnice spuštěné kolmice u, v. Rovnice ta charakterisuje parabolu Steinerovu; parabola (78*) z ní vznikne pro

$$x_0 = -\frac{c^2}{a} \cos \omega, \quad y_0 = \frac{c^2}{b} \sin \omega.$$

Uvažujme ještě oskulační tětivy ellipsy (a, b) procházející různými body na oskulační tětivě pevného bodu z_0. V rovnicích charakteristických

$$\mathfrak{f}_4 = 1, \quad \mathfrak{f}_2 = 0$$

zůstává jeden kořen z_0 pevným, takže znamenáme-li souměrné úkony parametrů $z_1 z_2 z_3$ pat hybných tětiv literami $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3$, obdržíme vztahy

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{1}{z_0}, \quad z_0\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 = 0,$$

které definují na ellipse kubickou involuci. Její trojice $z_1 z_2 z_3$ jsou na ellipse vytínány svazkem kruhů, jehož jeden vrchol jest z_0.

Dvě trojice této involuce známe předem; nejprve máme tři tětivy procházející bodem z_0, jichž paty tvoří trojici Steinerovu o doplňku z_0; ty se doplňují tětivou vycházející z bodu z_0 na jednu čtveřinu, a jich kruh patní jest jedním z kruhů svazku; dále určuje z_0 jako prvek trojici Steinerovu s doplňkem $\frac{1}{z_0^3}$, její kruh je pak druhý kruh svazku, oběma kruhy je svazek určen. Chordála svazku prochází středem ellipsy, takže splývá s průměrem ellipsy obsahujícím bod z_0.

Rovnice $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3 = 0$, jíž hoví tři body $z_0 z_1 z_2$ vázané podmínkou, aby se jich tětivy oskulační protínaly v jednom bodě, charakterisuje body $z_1 z_2$, jež vcházejí ve skupiny naší involuce jako prvky; přímka $\overline{z_1 z_2}$ jest jedna ze stran trojúhelníka $z_1 z_2 z_3$ involuční trojice.

Znamenejme $\mathfrak{h}_1 = z_1 + z_2$, $\mathfrak{h}_2 = z_1 z_2$; předešlá rovnice se přepíše na

$$1 + \mathfrak{h}_2^2 + z_0^{-1}\mathfrak{h}_1 + z_0 \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 = 0.$$

Souřadnice u, v přímky $\overline{z_1 z_2}$ hoví rovnicím (β) pro

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{h}_2,$$

a tak vychází z předešlé rovnice

$$\begin{aligned}(au - ibv)^2 + (au + ibv)^2 - 2z_0^{-1}(au - ibv)\\ - 2z_0 (au + ibv) = 0,\end{aligned}$$

jako tangenciální rovnice obalové čáry stran involučních trojúhelníků. Znamenáme-li $z_0 = e^{i\Theta}$, jest její reálný tvar

$$(\Pi) \qquad a^2u^2 - b^2v^2 = 2au \cos\Theta - 2bv \sin\Theta;$$

čára tato jest parabola. Tato se dotýká hlavních příček v jich průsecích s tečnou ellipsy v bodě $\Theta + \pi$ vedenou, mimo to se dotýká přímky $au = 2\cos\Theta$, $bv = 2\sin\Theta$, jež půlí vzdálenost této tečny od středu. Pól úběžné přímky (0, 0) má rovnici

$$(\alpha) \qquad au \cos\Theta - bv \sin\Theta = 0,$$

t. j. *osa paraboly má směr průměru ellipsy procházejícího bodem* $-\Theta$ (souměrným s bodem z_0).

Substituce $v = -iu$ dává isotropní tečnu

$$u = 2\,\frac{a\cos\Theta + ib\sin\Theta}{d^2}, \quad v = 2\,\frac{b\sin\Theta - ia\cos\Theta}{d^2},$$

a reálný bod na této pomyslné přímce, t. j. ohnisko paraboly x, y hoví rovnicím

$$(F)\qquad \begin{aligned} ax\cos\Theta + by\sin\Theta + \frac{d^2}{2} = 0,\\ -bx\sin\Theta + ay\cos\Theta = 0. \end{aligned}$$

Druhá rovnice ukazuje, že *ohnisko paraboly leží na průměru ellipsy obsahujícím bod* Θ (t. j. z_0).

První rovnici (F) lze psáti

$$xx_0 + yy_0 + \frac{d^2}{2} = 0, \quad (x_0 = a\cos\Theta,\ y_0 = b\sin\Theta),$$

t. j. *ohnisko paraboly leží na poláře bodu* z_0 *vzhledem k pomyslné kružnici*

$$x^2 + y^2 + \frac{d^2}{2} = 0.$$

Řešením rovnic (F) vychází

$$x = -\frac{d^2}{2}\,\frac{a\cos\Theta}{a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta},$$

$$y = -\frac{d^2}{2}\,\frac{b\sin\Theta}{a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta},$$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{d^4}{4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

takže

„*ohniska parabol* Π *příslušných k různým oskulačním tětivám* (z_0) *naplňují Boothovu lemniskatu.*"

Dále nalezneme pro řídící přímku paraboly Π jakožto poláru ohniska dvě rovnice, jež značí póly přímek (F):

$$c^2au\cos\Theta + c^2bv\sin\Theta = 2(a^2\cos^2\Theta - b^2\sin^2\Theta),$$
$$au\sin\Theta + bv\cos\Theta = \sin 2\Theta,$$

z nichž řešením vychází

$$(\Delta)\qquad c^2u = 2a\cos\Theta,\quad c^2v = -2b\sin\Theta.$$

„*Řídící přímka paraboly* Π *je tečnou ellipsy*

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{4},\text{“}$$

a sice v bodě, jehož anomalie má hodnotu $\pi - \Theta$.

Pro osu paraboly nalezli bychom rovnici

$$bx \sin \Theta + ay \cos \Theta + \frac{abd^2 \sin \Theta \cos \Theta}{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin \Theta} = 0.$$

Souřadnice ohniska x, y a souřadnice osy u, v hoví rovnicím

$$ux = vy = -\frac{1}{2}.$$

---

20. V pravoúhlé soustavě souřadnic x, y zaveďme jako souřadnici výraz $u = x^2 + y^2$, a potlačme y, takže nové souřadnice bodu budou u, x. Rovnice

$$(\Gamma) \qquad Au - 2Bx + C = 0,$$

pak representuje kruh kolmý na Ox, t. j. jehož střed leží na Ox a má souřadnici

$$p = \frac{B}{A};$$

mocnost kruhu pro bod O je pak

$$n = \frac{C}{A},$$

čtverec poloměru

$$r^2 = p^2 - n = \frac{B^2 - AC}{A}.$$

Podmínka, aby dva kruhy naší soustavy (Γ) — kruhy (A, B, C) a (A', B', C') — se protínaly orthogonálně, zní

$$AC' + A'C - 2BB' = 0. \tag{1}$$

Kruh soustavy (Γ) (značíme tak každý kruh kolmý na Ox) daný dvěma body u_1x_1, u_2x_2 má rovnici

$$u - u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{2}$$

kruh vedený daným bodem $u_1 x_1$ rovnoběžně s daným kruhem (A, B, C) — t. j. s ním soustředný — má rovnici

$$u - u_1 = \frac{2B}{A}(x - x_1). \tag{3}$$

Kruh soustavy (Γ) vedený daným bodem $u_1 x_1$ a kolmý na kruh (A, B, C) má rovnici

$$\begin{vmatrix} u & x & 1 \\ u_1 & x_1 & 1 \\ C & B & A \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

čili

$$u - u_1 = \frac{C - Au_1}{B - Ax_1}(x - x_1). \tag{4*}$$

Rovnice

$$F(u, x) = 0 \tag{5}$$

charakterisuje určitou křivku souměrně ležící vůči Ox. Daným bodem čáry vedeme kruh soustavy (Γ), který se jí v něm dotýká (kruhová tečna, cyklotangenta); jeho rovnice zní (plyne snadno na základě (2))

$$U - u = \frac{du}{dx}(X - x), \tag{6}$$

značí-li U, X souřadnice běžné na kruhu tečném. Má tedy pro body na čáře derivace

$$u' = \frac{du}{dx}$$

geometrický význam $u' = 2x_0$, značí-li x_0 úsečku určující střed cyklotangenty.

Cyklonormálou neb kruhonormálou nazveme kruh soustavy (Γ), který v daném bodě (u, x) protíná kolmo naši čáru. Jeho střed je stopa tečny na Ox a poloměr je délka tečny. Podle (4) a (6) zní rovnice cyklonormály v bodě (u, x):

$$(N) \qquad \begin{vmatrix} U - u, & X - x, & 0 \\ u & x & 1 \\ xu' - u, & \frac{1}{2}u', & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$(N^*) \qquad (U - u)\left(\frac{1}{2}u' - x\right) - 2\left(\frac{1}{2}xu' - u\right)(X - x) = 0.$$

Obraťme se k ellipse (a, b)

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

při dosavadním označení ($a^2 - b^2 = c^2$, $c = a\varepsilon$) v nových souřadnicích se rovnice přepíše na tvar

$$(E) \qquad u = \varepsilon^2 x^2 + b^2.$$

Táž rovnice odpovídá hyperbole ($b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$) pro případ, že se b^2 nahradí $-b^2$.

Hodnota

$$u' = \frac{du}{dx} = 2\varepsilon^2 x$$

podává pro polohu středu cyklotangenty v bodě x úsečku

$$x_0 = \varepsilon^2 x;$$

střed ten zároveň je stopa normály ellipsy na Ox.

Veličinu

$$\frac{c^2}{a} = a\varepsilon^2 = a_0$$

máme v obrazci (při konstrukci středu křivosti ve vrcholech); na základě poměrů

$$\frac{x_0}{x} = \frac{a_0}{a}$$

strojíme dosti pohodlně stopu normály (podobně u hyperboly).

Rovnice kruhové tečny u ellipsy (E) zní

$$U + u = 2\varepsilon^2 x X + 2b^2 \tag{7}$$

aneb

$$U = 2\varepsilon^2 x X - \varepsilon^2 x^2 + b^2. \tag{7⁰}$$

Dva tečné kruhy, příslušné k bodům x a x_1, se dle toho protnou v bodech, jichž společná úsečka X jest určena rovnicí

$$2X(x - x_1) = (x^2 - x_1^2),$$

t. j.

$$X = \frac{x + x_1}{2}.$$

„Chordála kruhů, které se dotýkají ellipsy každý ve dvou bodech na téže pořadnici, jest uprostřed mezi oběma pořadnicema bodů dotykových."

Pro polohu průseků třeba znáti společnou hodnotu U, tedy

$$U = \varepsilon^2 x(2X - x) + b^2 = \varepsilon^2 x x_1 + b^2.$$

Sestrojme bod ellipsy, jehož úsečka jest

$$x_0 = \sqrt{x x_1}\,;$$

jeho souřadnice U

$$U = \varepsilon^2 x_0^2 + b^2$$

splývá se souřadnicí U obou průseků našich kruhů.

Při stálém U, X dává (7) rovnici kruhu, jenž protíná ellipsu ve dvou párech bodů; jich tečné kruhy (Γ) se protínají v bodě daném (U, X). Kruh ten je *kruhopolára* bodu (U, X). Jeho střed splývá se stopou normály ellipsy v bodě $x = X$.

Libovolný kruh (Γ) procházející tímto bodem (U, X) protne kruhopoláru v bodě (U_0, X_0), a ellipsu v bodech o úsečkách x_1, x_2; body na Ox určené úsečkami XX_0, $x_1 x_2$ tvoří čtveřinu harmonickou.

O dvou bodech M, M' a jich kruhopolárách Γ, Γ' platí věta analogická známé větě o kuželosečkách:

Leží-li M' na poláře Γ bodu M, prochází jeho polára Γ' bodem M.

Uvažujme nyní tečné kruhy Γ, Γ_1 v bodech x, x_1, a sice běží nám o případ. kdy tyto kruhy se protínají orthogonálně.'

Dle (7°) máme pro součinitele v rovnicích našich kruhů

$$A = 1, \quad B = \varepsilon^2 x, \quad C = \varepsilon^2 x^2 - b^2, \text{ atd.},$$

a podmínka orthogonality zní

$$x^2 + x_1^2 - 2\varepsilon^2 x x_1 = \frac{2b^2}{\varepsilon^2} = \frac{2a^2b^2}{c^2}. \tag{8}$$

K dané cyklotangentě x určíme kruhotečnu na ni kolmou na základě této rovnice; můžeme klásti $x_1 = y$, t. j. považovati x_1 za pořadnici na ellipse

$$x^2 + y^2 - 2\varepsilon^2 xy = \frac{2a^2b^2}{c^2},$$

příslušnou k úsečce x. Pro tuto ellipsu známe body

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{ab}{c}\sqrt{2},$$

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{ab}{c}\sqrt{2},$$

$$x = y = \pm \frac{a^2}{c};$$

poslední dva jsou její vrcholy.

Pro souřadnice průseků kruhů Γ, Γ_1 máme nejprve

$$X = \frac{x + x_1}{2},$$

dále jest

$$U = \varepsilon^2 x x_1 + b^2;$$

rovnice (8) t. j.

$$(x + x_1)^2 - 2(1 + \varepsilon^2)\, x x_1 = \frac{2a^2b^2}{c^2} \tag{8*}$$

dává dle toho

$$4X^2 - \frac{2(1 + \varepsilon^2)}{\varepsilon^2}(U - b^2) = \frac{2b^2}{\varepsilon^2},$$

t. j.

$$U = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}(2X^2 + b^2)$$

čili

$$b^2x^2 + (a^2 + c^2)\, y^2 = b^2c^2. \tag{9}$$

Geometrické místo průseků na sobě kolmých kruhotečen ellipsy (a, b) je tato ellipsa (9). V případě hyperboly je to opět hyperbola.

Buďte x_1, x_2 dva body ellipsy; kruh Γ jimi určený má rovnici (2), v níž

$$\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \varepsilon^2(x_1 + x_2),$$

rovnice zní tedy

$$u = u_1 + \varepsilon^2(x_1 + x_2)\, x - \varepsilon^2(x_1 + x_2)\, x_1$$

čili po dosazení hodnoty $u_1 = \varepsilon^2 x_1^2 + b^2$

$$u - \varepsilon^2(x_1 + x_2)x + \varepsilon^2 x_1 x_2 - b^2 = 0. \tag{10}$$

Pro kruh soustavy (Γ) spojující dotykové body vepsaných kruhů orthogonálních nám rovnice (8*) dává

$$2(1 + \varepsilon^2)\, x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - \frac{2b^2}{\varepsilon^2},$$

takže při označení $x_1 + x_2 = 2\sigma$ rovnice kruhu (10) bude

$$u - 2\varepsilon^2 x \,.\, \sigma + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\left(2\sigma^2 - \frac{b^2}{\varepsilon^2}\right) - b^2 = 0$$

čili

$$u - 2\varepsilon^2 x \,.\, \sigma + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\sigma^2 - \frac{2 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} b^2 = 0. \tag{11}$$

Obalová čára těchto kruhů

$$u - \frac{2+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} b^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (1+\varepsilon^2) x^2$$

je patrně opět ellipsa

$$(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)x^2 + 2y^2 = 2\frac{2+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} b^2 \tag{11*}$$

s polouosama

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2}}}, \quad b\sqrt{\frac{2+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}}.$$

Dotykový bod kruhu (11) s obalovou ellipsou má úsečku

$$x = \frac{2\sigma}{1+\varepsilon^2} = \frac{2x_0}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)},$$

značí-li x_0 úsečku středu obaleného kruhu. Pata normály spuštěné ze středu kruhu má úsečku

$$x_1 = \frac{x_0}{\varepsilon^2};$$

znamenáme-li

$$a_1 = a\frac{1+\varepsilon^2}{2} = \frac{a}{2} + \frac{c^2}{2a},$$

máme srovnalost

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a}{a_1},$$

která dává bezprostředně konstrukci pro bod dotykový.

Kruhové tečny na sobě kolmé tedy obdržíme pomocí průseků základní ellipsy s tečnými kruhy (Γ) ellipsy (11*).

Přistupme dále k otázce kruhonormál ellipsy (a, b). V bodě (u, x) vedená cyklonormála má dle (N^*) rovnici

$$(U-u)(\varepsilon^2 x - x) - 2(\varepsilon^2 x^2 - u)(X-x) = 0,$$

tudíž po dosazení hodnot

$$\varepsilon^2 - 1 = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \varepsilon^2 x^2 - u = -b^2$$

$$(U-u)x = 2a^2(X-x), \tag{12}$$

aneb nahradí-li se u svojí hodnotou,

$$Ux - 2a^2X + (a^2 + c^2 - \varepsilon^2 x^2)x = 0. \tag{12°}$$

Seřadíme dle mocnin x:

$$x^3 - \frac{U + a^2 + c^2}{\varepsilon^2} x + \frac{2a^2}{\varepsilon^2} X = 0; \qquad (12^*)$$

tato rovnice ukazuje, že daným bodem (U, X) v rovině procházejí tři kruhonormály ellipsy (a, b); jejich paty mají úsečky x_1, x_2, x_3 — kořeny rovnice (12^*) — jež hoví podmínce

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \qquad (13)$$

Libovolné tři body ellipsy (a, b), jichž úsečky hoví této podmínce, mají tu vlastnost, že v nich vedené kruhonormály ellipsy jsou spolu ve svazku.

Souřadnice vrcholů svazku jsou pak dány rovnicemi

$$2a^2 X = -\varepsilon^2 \mathfrak{f}_3, \quad U + a^2 + c^2 = -\varepsilon^2 \mathfrak{f}_2, \qquad (13^a)$$

kde položeno

$$\mathfrak{f}_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad \mathfrak{f}_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Z (12^*) vychází (dělíme x^2 a sečteme pro $x = x_1, x_2, x_3$)

$$\frac{2a^2 X}{\varepsilon^2} \Sigma \frac{1}{x_\nu^2} = \frac{U + a^2 + c^2}{\varepsilon^2} \Sigma \frac{1}{x_\nu} - \Sigma x_\nu$$

t. j.

$$a^2 X \Sigma \frac{1}{x_\nu^2} = \frac{U + a^2 + c^2}{2} \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_3} = \frac{(U + a^2 + c^2)^2}{4a^2 X}.$$

Poloměry r_1, r_2, r_3 kruhonormál jsou dány dle vzorce

$$r^2 = \frac{a^4}{x^2} + \varepsilon^2 x^2 - (a^2 + c^2),$$

tedy

$$\Sigma r_\nu^2 = a^4 \Sigma \frac{1}{x_\nu^2} + \varepsilon^2 \Sigma x_\nu^2 - 3(a^2 + c^2);$$

avšak

$$a^4 X^2 \Sigma \frac{1}{x_\nu^2} = \frac{1}{4} (U + a^2 + c^2)^2,$$

$$\Sigma x_\nu^2 = -2\mathfrak{f}_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} (U + a^2 + c^2),$$

takže vychází

$$\Sigma r_\nu^2 = \left(\frac{U + a^2 + c^2}{2X}\right)^2 + 2U - (a^2 + c^2)$$

pro součet čtverců poloměrů všech tří kruhonormál vedených z bodu (U, X).

Body kruhů nullových

$$U + a^2 + c^2 = \pm 2\sqrt{a^2 + c^2}X$$

mají vlastnost, že pro kruhonormály z jejich bodů na ellipsu spuštěné jest

$$\Sigma r_\nu^2 = 2U.$$

Volme dále bod U, X na ellipse; mimo jeho kruhonormálu procházejí jím ještě další dvě kruhonormály, mající své paty v jiných dvou bodech ellipsy. Dosadíme ve (12*) $U = \varepsilon^2 X^2 + b^2$, a vyjde

$$x^3 - \left(X^2 + \frac{2a^2}{\varepsilon^2}\right)x + \frac{2a^2}{\varepsilon^2}X = 0;$$

řešení $x = X$ odstraní se dělením na $x - X$, čímž vyjde rovnice kvadratická*)

$$x^2 + Xx = \frac{2a^2}{\varepsilon^2}.$$

Zavedeme-li opět u, máme rovnici

$$u + \varepsilon^2 Xx = 2a^2 + b^2,$$

jež přísluší kruhu vytínajícímu na ellipse paty uvažovaných kruhonormál.

Tyto kruhy příslušné k různým hodnotám X, t. j. k různým bodům ellipsy, tvoří svazek; vrcholy jeho jsou body

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Kruhy tohoto svazku vytínají na ellipse po dvou párech bodů, jichž kruhonormály se protínají na ellipse. Body jedné dvojice jsou vždy pomyslné, kruhonormála však reálná.

Uvažujme ještě trojici Steinerovu; je dána rovnicemi

$$x_\nu = a\cos(\Theta + \nu\omega), \quad \omega = \frac{2\pi}{3}, \quad \nu = 0, 1, 2.$$

*) Úsečky $x_1 x_2$ pat normál hoví tedy rovnici involutorní

$$x_1 x_2 + \frac{2a^4}{c^2} = 0.$$

Podmínka $\Sigma x_\nu = 0$ je tu splněna, takže
„kruhy (Γ) vedené kolmo na ellipsu v bodech Steinerovy trojice procházejí společným párem bodů."

Pro stanovení průseků třeba znáti souměrné úkony $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ veličin x_ν; pro

$$\mathfrak{f}_2 = a^2(\cos\Theta\cos\Theta_1 + \cos\Theta_1\cos\Theta_2 + \cos\Theta_2\cos\Theta)$$

nalezneme snadno

$$\mathfrak{f}_2 = -\frac{3}{4}a^2,$$

podobně

$$\mathfrak{f}_3 = \frac{a^3}{4}\cos 3\Theta;$$

vzorce (13^a) dávají

$$X = -\frac{c^2}{8a}\cos 3\Theta, \quad U = -a^2 - \frac{1}{4}c^2,$$

t. j. průsečné body kruhonormál v bodech Steinerovy trojice jsou vždy pomyslné a naplňují pomyslný kruh

$$x^2 + y^2 + a^2 + \frac{1}{4}c^2 = 0,$$

společná chordála tří cyklonormál jest

$$x = -\frac{c^2}{8a}\cos 3\Theta.$$

Steinerova trojice určuje kruhový trojúhelník, jehož strany jsou kolmy na Ox. Uvažujme stranu určenou body

$$x = a\cos\Theta, \quad x_1 = a\cos\Theta_1, \quad \Theta_1 = \Theta + \frac{2\pi}{3}.$$

Kruh těmito body určený má rovnici

$$U = \varepsilon^2(x + x_1)X + b^2 - \varepsilon^2 x x_1,$$

v našem případě pak

$$x + x_1 = a.\cos\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x x_1 = \frac{a^2}{2}\cos 2\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a^2}{4},$$

takže při označení

$$\varphi = \Theta + \frac{\pi}{3}$$

máme jakožto rovnici kruhu našeho

$$U = \frac{c^2}{a} X \cos\varphi + b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{2} \cos 2\varphi \tag{14}$$

aneb

$$U - a^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2}{a} X \cos\varphi - c^2 \cos^2\varphi;$$

diskriminant této rovnice o neznámé $c \cos\varphi$ vymizí pro body na obalové čáře těchto kruhů; ta má tedy rovnici

$$U - a^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2}{4a^2} X^2,$$

t. j. obalová čára *kruhových* stran Steinerových trojúhelníků u ellipsy (a, b) jest ellipsa

$$u = \frac{1}{4} \varepsilon^2 x^2 + a^2 - \frac{c^2}{4},$$

$$(4a^2 - c^2) x^2 + 4a^2 y^2 = a^2 (4a^2 - c^2),$$

která má společnou velkou osu a, ale poloviční dálku ohnisek $\frac{c}{2}$.

Dotykový bod strany $\left(\Theta, \Theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ s obalovou ellipsou jest určen rovnicí

$$x = 2a \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right),$$

takže $\frac{x}{2}$ přísluší na ellipse k úhlu střednímu $\frac{1}{2}(\Theta + \Theta_1)$.

Nehledíme-li k trojicím složeným z dvojic určité involuce a stálého bodu, jsou trojice Steinerovy jediná řada bodů na ellipse, pro něž jsou zároveň normály obyčejné a cyklonormály ve svazcích.

Podmínka pro cyklonormály ve svazku

$$\Sigma x_\nu = 0$$

se pomocí parametru komplexního $z = e^{i\Theta}$ přepíše na

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_2 = 0;$$

naproti tomu jsou tři normály ve svazku za podmínky

$$(\beta) \qquad \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3.$$

Obě podmínky platí současně při

$$\mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_1^2+1)=0,$$

tedy buď

1) pro $\mathfrak{f}_2=0,\ \mathfrak{f}_1=0,$

což dává Steinerovy trojice, aneb

2) pro $\mathfrak{f}_3^2=-1,\ \mathfrak{f}_3=j=\pm i,$

což dává rovnice

$$z^3-\mathfrak{f}_1 z^2-j\mathfrak{f}_1 z-j=0$$

se stálým řešením $z=-j$.

Obsah.

Opravy.

Str. 161. řádek 10. zdola čti $\mathfrak{z}$ místo $\mathfrak{z}^2$.
Str. 162. řádek 1. čti $\mathfrak{f}_4 = -1$.

O souvislosti gravitace s kosmickým magnetismem.

Napsal prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Zkušenosti, učiněné při pokusu o fenomenologický popis zjevů gravitačních pomocí parciálných differenciálních rovnic, dovedly nás k soustavě 4 rovnic

$$\frac{X_t}{\sqrt{\varkappa}} - 4\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho u = \lambda c\,(N_y - M_z) \tag{1}$$