Viktor Trkal

Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 5, 302--311

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109099`

3) *Plocha f* bude také větší, na př. u ploch klínovitě do sebe zapadajících, než u ploch rovných při jinak stejných rozměrech.

4) *Rovnoměrného rozdělení tlaku* docílíme

a) přesným přihlazením ploch,

b) pokud možná rozdělením doléhající plochy na mnoho částí a značnou svobodou jednotlivých částí (kartáč),

c) pérovým zařízením, jímž tlačíme obě plochy k sobě,

d) vyrovnáním ploch rozmáčknutím. Užijeme li příliš velikého tlaku, přilehnou na sebe plochy následkem rozmáčknutí nerovností a hrbolků obou tlačených ploch.

Odpověď na otázku dimensování posuvného kontaktu dá nám vyšetření stupně jeho zahřátí při zapnutí neb vypnutí proudu, kterýžto výpočet, vedoucí k řešení jisté integrodifferenciální rovnice Volterrovy, v hlavních rysech byl předmětem mého pojednání v „Časopise fysicko-mathematické společnosti při Permské státní universitě“ pod záhlavím „O temperatuře posuvného kontaktu při zapnutí elektrického proudu“ r. 1918.*)

Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin.

Viktor Trkal.

I.

Navier-Poissonovy hydrodynamické rovnice v případě vazké stlačitelné tekutiny mají tvar **)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta u\\
\frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta v\\
\frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta w\\
\frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta\,,
\end{aligned}\right\} \quad (1) \quad .$$

*) Журналъ Физико-Математическаго Общества при Пермскомъ Государственномъ Университетѣ, I вып., 1918: »О температурѣ скользящаго контакта при вилюченіи электрическаго тока«.

**) H. Lamb, Hydrodynamics, 3. ed. (1906), p. 538.

kdež

$$\frac{Dq}{Dt}=\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial z},\quad \Delta q=\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}.$$

Při tom veličiny, vyskytující se v těchto rovnicích, mají tento fysikální význam: u, v, w jsou komponenty rychlosti q bodu (x, y, z) v čase t ve směru tří pravoúhlých os anglického systému souřadnic, X, Y, Z komponenty vnějších sil, ϱ konstantní hustota tekutiny, p hydrodynamický tlak ν poměr koefficientu vnitřního tření tekutiny k její hustotě.

Jsou-li síly X, Y, Z konservativní, t. j. mají-li potenciál Ω, výše uvedené rovnice (1) lze napsati ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-2v\zeta+2w\eta=-\frac{\partial\chi'}{\partial x}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\nu\Delta u\\
&\frac{\partial v}{\partial t}-2w\xi+2u\zeta=-\frac{\partial\chi'}{\partial y}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\nu\Delta v\\
&\frac{\partial w}{\partial t}-2u\eta+2v\xi=-\frac{\partial\chi'}{\partial z}+\frac{1}{3}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\nu\Delta w\\
&\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\Theta,
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

kdež

$$\chi'=\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+\Omega,\qquad q^2=u^2+v^2+w^2.$$

Při tom

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\quad(3)$$

jsou komponenty okamžité úhlové rychlosti ω elementu $d\tau$ naší tekutiny.

Derivujeme-li druhou rovnici systému (2) podle z a třetí rovnici téhož systému podle y a pak výsledky od sebe odečteme, (vyloučíme-li tak χ'), obdržíme prvou rovnici následujícího systému (a zcela podobně další dvě rov.):

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{D\xi}{Dt} &= \xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\Theta\right)+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z}+\nu\Delta\xi \\
\frac{D\eta}{Dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\Theta\right)+\xi\frac{\partial v}{\partial z}+\nu\Delta\eta \\
\frac{D\zeta}{Dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\zeta\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\Theta\right)+\nu\Delta\zeta \\
\frac{\partial u}{\partial x}&+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}=\Theta,\quad \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

Jestliže sem položíme $\Theta = 0$, obdržíme systém pro vazkou tekutinu nestlačitelnou. V případě $v\zeta = w\eta$, $w\xi = u\zeta$, $u\eta = v\xi$ nabudou tyto rovnice (4), povšimneme-li se okolnosti, že

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0,$$

velmi jednoduchého tvaru:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\nu\Delta\xi,\ \frac{\partial \eta}{\partial t}=\nu\Delta\eta,\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}=\nu\Delta\zeta,\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\Theta. \qquad (5)$$

Položme pro krátkost ještě

$$\psi=\chi'-\frac{1}{3}\nu\Theta. \qquad (6)$$

Pak lze přepsati naše rovnice (2) ve vektorovém označení (za účelem jednoduššího psaní) takto:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+2\,[\bar{\omega}, q]=\nu\Delta q-\operatorname{grad}\psi, \qquad (7)$$

$$\operatorname{div} q=\Theta=\frac{3}{\nu}(\chi'-\psi), \qquad (8)$$

kde vírová rychlost $\bar{\omega}$ o komponentách ξ, η, ζ jest spiata s proudovou rychlostí q o komponentách u, v, w pomocí vztahů (3) t. j.

$$\bar{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot} q, \qquad (9)$$

a zavedeme-li ještě nové označení pro vektorový součin $[\bar{\omega}, q]$, totiž

$$[\bar{\omega}, q]=\frac{\alpha}{2}, \qquad (10)$$

lze napsati kratčeji

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\alpha=\nu\Delta q-\operatorname{grad}\psi. \qquad (11)$$

Pomocí vztahů (9) a (10) snadno se přesvědčíme, že skalární součiny

$$(\alpha q) = 0, \tag{12}$$

$$(\alpha \bar{\omega}) = 0, \tag{13}$$

což znamená, že vektor α stojí kolmo k rovině určené vektory q, $\bar{\omega}$. Zmizí-li vektor $\bar{\omega}$ anebo splynou-li oba vektory q, $\bar{\omega}$ co do směru, zmizí i vektor α.

Snadno odvodíme některé další vztahy. Tak na př. z rov. (9) plyne již dříve nalezený vztah

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} q = 0 \tag{14}$$

a dále $$\operatorname{rot} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} q = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \operatorname{div} q - \Delta q] \tag{15}$$

odkudž dostaneme

$$\Delta q = \operatorname{grad} \operatorname{div} q - 2 \operatorname{rot} \bar{\omega}. \tag{16}$$

II.

Zmizí-li identicky vektor α a je-li znám potenciál Ω konservativních sil X, Y, Z, můžeme najíti tlak p; naopak, je-li znám zase tlak p, můžeme za uvedeného předpokladu o vektoru α najíti potenciál Ω.

Vektor α identicky zmizí, je-li $\bar{\omega} = cq$, jak dokazuje rovnice (10). Při tom c je skalár, po př. nulla.

Je-li $c = 0$, zmizí identicky vírová rychlost $\bar{\omega}$; potom z rovnice (9) obdržíme $\operatorname{rot} q = 0$, odkudž plyne $q = -\operatorname{grad} \varphi$, t. j. v tomto případě existuje potenciál φ rychlosti q, což plně souhlasí s předpokladem, že se tu jedná o pohyb bezvířivý.

Je-li $c \neq 0$ skalár, pak vírové čáry splývají s proudovými čarami. *)

---

*) Že takový pohyb, při kterém vírové čáry splývají s proudovými, je vůbec možný jak v tekutině omezené nějakou konvexní plochou tak i v tekutině sahající do nekonečna, přesvědčí nás tento jednoduchý příklad:

Differenciální rovnice našeho problému ve vazké nestlačitelné tekutině jsou:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 2cu,\ 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2cv,\ 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2cw,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi,\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nu \Delta \eta,\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \Delta \zeta \qquad \text{(viz 5))}.$$

Vyplňuje-li tekutina kouli o středu (0, 0, 0) a poloměru $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

V případě prvém, kdy rychlost má potenciál φ, t. j.

$$q = -\operatorname{grad}\varphi,$$

obdržíme z rovnice (11), která nabude tvaru

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta q - \operatorname{grad}\psi, \tag{11'}$$

vztah

$$-\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\nu\operatorname{grad}\Delta\varphi - \operatorname{grad}\psi$$

a dále

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\Delta\varphi + \psi - T(t),$$

kde $T(t)$ jest libovolná funkce času. Odtud najdeme

$$\psi = \chi' + \frac{\nu}{3}\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + T(t),$$

a poněvadž

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi,$$

bude

$$\chi' = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{4}{3}\nu\Delta\varphi$$

a potenciál

$$\Omega = \chi' - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}q^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 - \frac{4}{3}\nu\Delta\varphi,$$

odkud snadno najdeme tlak p.

---

a nabývá-li složka rychlosti ve směru normály n na povrchu koule hodnoty

$$u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz) = qe^{-4\nu c^2 t}\,\frac{x\sin 2cz + y\cos 2cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

kde $c =$ konst., pak řešením daného problému jest

$$u = qe^{-4\nu c^2 t}\sin 2cz,\quad v = qe^{-4\nu c^2 t}\cos 2cz,\quad w = 0.$$

To bude zároveň také řešením téže úlohy v případě, že tekutina sahá do nekonečna, neklademe-li žádných hraničných podmínek. Pro $\nu = 0$ obdržíme případ tekutiny dokonalé. V každé rovině rovnoběžné k rovině xy je pak rychlost proudu $= q$; v různých rovinách $\|$ k xy jest však směr proudu různý (nehledíme-li k tomu, že se periodicky opakuje). Tento směr je však zároveň vždy osou víru. Poněvadž pak v každém bodě směr proudu splývá s osou víru, jedná se tu o šroubový pohyb tekutiny v každém bodě.

Tímto problémem, pokud je mi známo, zabýval se poprvé *T. Graig* v »American Journal of Mathematics,« III (1880), p. 276; přesný důkaz existence jeho řešení za velmi obecných podmínek podal *W. Stekloff* v »Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse«, II. sér. *10* (1908), p. 320. Specielní případ tohoto problému řeší též *G. M. Minchin* v knize »Uniplanar kinematics of solids and fluids«, Oxford 1882, p. 244.

V případě dokonalé tekutiny $\nu = 0$ a tu odpadne poslední člen.

Týž výsledek obdržíme však i pro vazkou tekutinu nestlačitelnou. V tomto případě jest totiž

$$\operatorname{div} q = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi = 0,$$

takže obdržíme pro tlak p jednodušší rovnici

$$\Omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2.$$

V případě druhém, kdy vírové čáry splývají s proudovými, obdržíme, jak již výše bylo uvedeno, vztah

$$\tilde{\omega} = cq, \tag{17}$$

kde c jest skalár. Odtud vyplývá vzhledem k rovnici (14)

$$\operatorname{div} \tilde{\omega} = \operatorname{div} cq = c \operatorname{div} q + (q, \operatorname{grad} c) = 0; \tag{18}$$

porovnáním rovnice (9) a (17) obdržíme v našem specielním případě relaci

$$\operatorname{rot} q = 2cq. \tag{19}$$

Vzpomeneme-li ještě, že

$$\operatorname{rot} \tilde{\omega} = \operatorname{rot} cq = c \operatorname{rot} q + [\operatorname{grad} c, q] = 2c^2 q - [q, \operatorname{grad} c], \tag{20}$$

kdež $(\ldots)$ značí skalární a $[\ldots]$ vektorový součin, tu budeme míti z rovnice (16)

$$\Delta q = -4c^2 q + \operatorname{grad} \operatorname{div} q + 2[q, \operatorname{grad} c], \tag{21}$$

Takto nalezené Δq dosaďme do rovnice (11'); obdržíme

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -4\nu c^2 q - \operatorname{grad} \psi + \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} q + 2\nu [q, \operatorname{grad} c]. \tag{22}$$

Rovnice (4) pro případ $\tilde{\omega} : q = c$ čili $v\xi = w\eta$, $w\xi = u\xi$, $u\eta = v\xi$ nabudou tvaru (5), totiž

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} = \nu\Delta\tilde{\omega}, \tag{23}$$

a dosadíme-li sem (17), najdeme

$$q\frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta(cq) = \nu c\Delta q + \nu q\Delta c + 2\nu(\operatorname{grad} c, \operatorname{grad})\, q;$$

odtud plyne

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta q + \frac{q}{c}\left(\nu\Delta c - \frac{\partial c}{\partial t}\right) + \frac{2\nu}{c}(\operatorname{grad} c, \operatorname{grad})\, q$$

anebo vzhledem k (21)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(4\nu c^2 + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\right) q + \nu \text{ grad div } q + 2\nu\, [q, \text{grad } c] + $$
$$+ \frac{\nu q}{c} \Delta c + \frac{2\nu}{c} (\text{grad } c, \text{grad})\, q. \qquad (24)$$

Nyní bylo by nutno z rovnice (18) najíti na př. za pomoci rovnic proudových čar aspoň partikulární řešení pro c a tento výsledek dosaditi do (24), načež bychom měli rovnici (24) integrovati a takto nalezené q dosaditi do rovnic (21) a (22), jež poslouží k bližšímu určení funkce c; tím blíže určíme funkci q, která musí splňovati rovnici (23), totiž

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } q = \nu \Delta \text{ rot } q. \qquad (23')$$

Dosadíme-li takto nalezené q do (22), najdeme tvar funkce ψ, z rovnice (8) pak určíme funkci χ', tak že obdržíme i potenciál Ω a odtud tlak p.

Ovšem tyto integrace provésti prakticky podaří se jenom v některém zcela zvláštním případě.

Tak na př., je-li tekutina nestlačitelná, t. j. div $q = 0$, obdržíme z rovnice (18)

$$(q, \text{grad } c) = 0$$

čili

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \qquad (18'')$$

Avšak vzhledem k významu symbolu $\frac{Dc}{Dt}$ rovnici (18″) můžeme psáti ve tvaru

$$\frac{Dc}{Dt} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

odkudž patrno, že c jest funkcí jediné proměnné t, není-li ani jedna z komponent u, v, w identicky rovna nulle. Z rovnic (20), (21), (22), (24) vyplývá

$$\text{rot } \tilde{\omega} = 2c^2 q \qquad (20')$$
$$\Delta q = 4c^2 q \qquad (21')$$
$$\frac{\partial q}{\partial t} = -4\nu c^2 q - \text{grad } \chi' \qquad (22')$$
$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(4\nu c^2 + \frac{1}{c}\frac{dc}{dt}\right) q. \qquad (24')$$

Odtud najdeme

$$q = \frac{1}{c} f(x, y, z)\, e^{-\int 4\nu c^2 dt}$$

a dosazením do (21′)

$$\Delta f = -4c^2 f,$$

odkudž patrno, že c jakožto funkce jediné proměnné t se musí redukovati na konstantu, tak že

$$q = g\,(x, y, z)\, e^{-4\nu c^2 t}.$$

Funkce q musí vyhovovati rovnici (23′), t. j. g musí splňovati rovnici

$$\Delta \operatorname{rot} g = -4c^2 \operatorname{rot} g$$

čili

$$\operatorname{rot} (\Delta g) = \operatorname{rot} (-4c^2 g). \tag{23''}$$

Jsou-li $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ vesměs ohraničené funkce připouštějící všude v oboru (D) (prostoru vyplněném tekutinou) derivace prvého, druhého a třetího řádu dle všech tří proměnných a splňující podmínky

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 2cU, \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 2cV, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 2cW,$$

pak splňují i podmínky

$$\Delta U = -4c^2 U, \quad \Delta V = -4c^2 V, \quad \Delta W = -4c^2 W.$$

Můžeme je tudíž považovati za komponenty vektoru $g(x, y, z)$, neboť vyhovují rovnici (23″). Existenci těchto funkcí pro případ tekutiny vyplňující uzavřenou konvexní plochu (S), na jejímž povrchu komponenta rychlosti ve směru vnitřní normály nabývá předepsané hodnoty $F(x, y, z)$, dokázal W. Stekloff *) a našel, že se dají takto vyjádřiti:

$$U = u_0 + 2cu_1 + (2c)^2\left(S_1 + \frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

$$V = v_0 + 2cv_1 + (2c)^2\left(S_2 + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$W = w_0 + 2cw_1 + (2c)^2\left(S_3 + \frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

---

*) W. Stekloff, l. c. pp. 320. 332.

kdež u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1 jsou funkce známé, definované rovnicemi

$$\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial w_0}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=u_0,\ \frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=v_0,\ \frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=w_0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0,$$

norm. komponenta

$u_0 \cos(nx)+v_0\cos(ny)+w_0\cos(nz)=F(x,y,z)$ na ploše (S),

$u_1 \cos(nx)+v_1\cos(ny)+w_1\cos(nz)=0$ „ „ „

Dále pak

$$S_1=\frac{1}{4\pi}\int W_1\frac{\eta-y}{r^3}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int V_1\frac{\zeta-z}{r^3}d\tau,$$

$$S_2=\frac{1}{4\pi}\int U_1\frac{\zeta-z}{r^3}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int W_1\frac{\xi-x}{r^3}d\tau,$$

$$S_3=\frac{1}{4\pi}\int V_1\frac{\xi-x}{r^3}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int W_1\frac{\eta-y}{r^3}d\tau,$$

kde (ξ, η, ζ) probíhá všechny body oblasti (D), $d\tau=d\xi d\eta d\zeta$, integrály vztahují se k celé oblasti (D),

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2.$$

Při tom řady U_1, V_1, W_1 konvergují absolutně a stejnoměrně v oblasti (D) pro všechny hodnoty paramentu $2c$ menší než určité konečné číslo $\frac{1}{K}$, které bude tím větší, čím menší jsou rozměry oblasti (D). Jest pak

$$U_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}u_k,\ V_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}v_k,\ W_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}w_k,$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial y}-\frac{\partial v_k}{\partial z}=u_{k-1},\ \frac{\partial u_k}{\partial z}-\frac{\partial w_k}{\partial x}=v_{k-1},\ \frac{\partial v_k}{\partial x}-\frac{\partial u_k}{\partial y}=w_{k-1},$$

$u_k\cos(nx)+v_k\cos(ny)+w_k\cos(nz)=0$ na ploše (S)

$k=2,3,\ldots\infty.$

Konečně pak P jest harmonická funkce splňující podmínky:

$\Delta P=0$ uvnitř (D)

a komponenta dle vnitřní normály

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} = \cos(nx) + \frac{\partial P}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial P}{\partial z}\cos(nz) =$$

$$= -(S_1 \cos(nx) + S_2 \cos(ny) + S_3 \cos(nz)) \text{ na ploše } (S).$$

Tudíž komponenty rychlosti q budou

$$u = Ue^{-4\nu c^2 t}, \quad v = Ve^{-\nu 4 c^2 t}, \quad w = We^{-4\nu c^2 t}$$

v tekutině omezené uzavřenou plochou (S), na jejímž povrchu komponenta rychlosti ve směru vnitřní normály nabývá předepsané hodnoty $e^{-4\nu c^2 t} F(x, y, z)$, je-li ovšem $|2c| < \frac{1}{K}$, kde K jest kladná stálá veličina závislá pouze na vlastnostech plochy (S).

Dosazením do (22′) najdeme, že

$$\chi' = \Phi(t)$$

závisí pouze na čase; odtud pak potenciál

$$\Omega = \chi' - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2} q^2 = \Phi(t) - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)e^{-8\nu c^2},$$

jenž dovoluje vypočísti tlak p.

Dospěli jsme tak k výsledku, že ve vazké nestlačitelné tekutině, není-li ani jedna z komponent rychlosti identicky rovna nulle, musí býti c konstantou a u, v, w jsou dány vzorci (25).

Ale i naopak: je-li $c = \text{konst.}$, obdržíme z rovnice (18) jakožto důsledek $\operatorname{div} q = 0$; tekutina je tedy nutně nestlačitelná.

V nestlačitelné tekutině dokonalé obdržíme z rovnice (23) (položíme-li $\nu = 0$) $\partial\bar{\omega}/\partial t = 0$, t. j. vírová rychlost nemůže záviseti na čase, a tudíž ani c ani q nezávisí na t. Kdyby jedna z komponent u, v, w na př. $w = 0$ identicky, pak c bude obecně funkcí proměnné z. Jsou-li dvě z komponent u, v, w identicky rovny nulle, je nullou i třetí z nich.

Za cenná upozornění vyslovuji tuto panu univ. prof. Dru F. Záviškovi vřelý dík.