Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 5, 312–320

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109096

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.*)

Píše **M. Lerch** v Brně. — (Pokračování.)

Podobně jako funkce $\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \Gamma'(1)$ dá se také funkce $\mathfrak{L}(x, a)$ při racionálním a vyjádřiti v zakončeném tvaru.**) Věc vychází jednoduše z vyjádření integrálem a dá se také elementárně vyložiti, jak bude ukázáno při jiné příležitosti. Znamenejme

$$\Phi(x, a) = x^a \mathfrak{L}(x, a) = \sum_0^\infty \frac{x^{a+\nu}}{a+\nu};$$

pak realný tvar výsledku vyjádřen je rovnicemi

$$\Phi\left(x, \frac{m}{n}\right) + \Phi\left(x, 1 - \frac{m}{n}\right) =$$

$$-2\log\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right) - \sum_{\varrho=1}^{n-1} \cos\frac{2\varrho m\pi}{n} \log\left(1 + x^{\frac{2}{n}} - 2x^{\frac{1}{n}} \cos\frac{2\varrho\pi}{n}\right),$$

$$\Phi\left(x, \frac{m}{n}\right) - \Phi\left(x, 1 - \frac{m}{n}\right) =$$

$$= 2\sum_{\varrho=1}^{n-1} \sin\frac{2\varrho m\pi}{n} \operatorname{arctg} \frac{x^{\frac{1}{n}} \sin\frac{2\varrho\pi}{n}}{1 - x^{\frac{1}{n}} \cos\frac{2\varrho\pi}{n}},$$

při čemž m, n $(m < n)$ jsou kladná čísla celistvá.

Na př.

$$\Phi\left(x, \frac{3}{4}\right) = -2\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{4}} - \log\left(1 - x^{\frac{1}{4}}\right) + \log\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$\Phi\left(x, \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}} -$$

$$-\log\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right).$$

---

*) *Opravy.* Na str. 5. v první rovnici čl. 3. v pravo čti $\Gamma'(a + \nu)$ místo $\Gamma(a + \nu)$. Na str. 185. v řádku 6. připoj znaménko — na levé straně; ve vzorci ř. 14. a 15. na pravé straně mají býti všecka znaménka $+$.

**) Různé výsledky v theorii funkce gamma, l. c. čl. III., str. 20.

7.

Čísla $C_\nu = C_\nu(1)$ (čl. 4 a 6) daná rovnicí

$$\frac{1}{1-\log(1+z)} = \sum_0^\infty \frac{C_\nu}{\nu!} z^\nu = \int_0^\infty e^{-x+x\log(1+z)}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}(1+z)^x\,dx$$

mají analytické vyjádření přímé

$$\frac{C_n}{n!} = \int_0^\infty e^{-x}\binom{x}{n}\,dx.$$

Klade-li se tedy

$$(x-1)(x-2)\dots(x-\overline{n-1}) = x^{n-1} - \mathfrak{f}_1 x^{n-2} + \mathfrak{f}_2 x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}\mathfrak{f}_{n-1},$$

a užije-li se vzorce

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\nu\,dx = \nu!,$$

obdržíme

$$C_n = n! - \mathfrak{f}_1(n-1)! + \mathfrak{f}_2(n-2)! - \mathfrak{f}_3(n-3)! \pm \dots,$$

což lze symbolicky psáti

$$C_n = \Gamma^2(\Gamma-1)(\Gamma-2)\dots(\Gamma-n+1),$$

v tom smyslu, že po rozvinutí součinu se obecně klade $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$ za Γ^ν.

Zcela podobně máme pro polynomy $C_n(a)$ při $a > \log 2$

$$\frac{C_n(a)}{n!} = \int_0^\infty e^{-ax}\binom{x}{n}\,dx. \tag{12}$$

a symbolicky

$$C_n(a) = \frac{\Gamma^2}{a^2}\left(\frac{\Gamma}{a}-1\right)\left(\frac{\Gamma}{a}-2\right)\dots\left(\frac{\Gamma}{a}-n+1\right).$$

Dosazením $z = e^x - 1$ za proměnnou v mateřské funkci obdržíme

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{a-x} = \sum_0^\infty \frac{C_\nu(a)}{\nu!}(e^x-1)^\nu;$$

tu je pak obecně dle známých vzorců počtu rozdílového

$$D^n_{x=0} e^{kx} = k^n,\quad D^n_{x=0}\{e^{ux}(e^x-1)^\nu\} = \Delta^\nu u^n,\quad (\Delta u = 1),$$

a tedy vychází z (α) porovnáním n-tých derivací v místě $x=0$

$$\frac{n!}{a^{n+1}}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta^\nu 0^n, \tag{13}$$

kde $\Delta^\nu 0^n$ značí počáteční člen*) ν-té řady rozdílové tvořené ze základní posloupnosti $0^n, 1^n, 2^n, \ldots$ Při tom se klade $0^0=1$, $\Delta^0 0^0=1$. Leibnitzovo pravidlo derivování součinu dává bezprostředně

$$D^n\frac{e^{ux}}{a-x}=\frac{n!\,e^{ux}}{(a-x)^{n+1}}\sum_0^n\frac{u^\nu(a-x)^\nu}{\nu!};$$

násobíme-li tedy rovnici (α) e^{ux} a porovnáme n-té derivace pro $x=0$, vyjde

$$\frac{n!}{a^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a^\nu u^\nu}{\nu!}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta^\nu u^n=\frac{e^{au}}{a^{n+1}}\int_{au}^{\infty}e^{-\xi}\xi^n d\xi. \tag{13*}$$

Je totiž

$$\int_0^x e^{-x}x^n\,dx=n!\,e^{-x}\left(e^x-\sum_0^n\frac{x^\nu}{\nu!}\right),$$

tedy

$$n!\sum_0^n\frac{x^\nu}{\nu!}=e^x\int_x^\infty e^{-\xi}\xi^n d\xi.$$

t. j. výraz (13*) má hodnotu právě udanou. Rovnice tato psaná ve tvaru

$$\frac{e^{au}}{a^{n+1}}\int_{au}^{\infty}e^{-\xi}\xi^n dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(a)}{\nu!}\Delta^\nu u^n$$

má platnost obecnější, zejména pro $n=-1$.

Integrál (12) převeďme v řadu štěpením intervallu

$$\sum\int_\nu^{\nu+1}\varphi(x)\,dx=\sum\int_0^1\varphi(x+\nu)\,dx.$$

Klademe-li

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-a\nu}\binom{x+\nu}{n},$$

*) Čísla $\Delta^\nu 0^n$ jsou uvedena v Cesàro, Corso di analisi algebrica, a v něm. překladě valně rozšířeném tohoto spisu (Cesàro-Kowalewski.

obdržíme $$\frac{C_n(a)}{n!} = \int_0^1 e^{-ax} f(x)\,dx.$$

Kladme na okamžik $e^{-a} = z$ a užijme Eulerovy identity; bude

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x+\nu}{n} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varDelta^\nu \binom{x}{n} \cdot \frac{z^\nu}{(1-z)^{\nu+1}} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x}{n-\nu} \frac{z^\nu}{(1-z)^{\nu+1}}.$$

Znamenáme-li tedy $e^a - 1 = u$, bude naše funkce

$$f(x) = \frac{u+1}{u^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x}{\nu} u^\nu, \quad \frac{C_n(a)}{n!} = \int_0^1 e^{-ax} f(x)\,dx, \quad (a > \log 2). \quad (14)$$

Znamenejme

$$g_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{x}{\nu} u^\nu, \quad g_1(x) = \sum_{\nu=\varkappa+1}^{n} \binom{x}{\nu} u^\nu, \quad g(x) = g_0 + g_1,$$

při čemž $$\varkappa = \left[\frac{u+1}{u-1}\right] = \left[\frac{e^a}{e^a-2}\right];$$ pak v součtu

g_1 členové střídají znamení a rostou; výraz $(-1)^{n-1} g_1(x)$ je pak kladný a větší než

$$\varDelta(x) = \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)}{n!} u^n - \\ - \frac{x(1-x)\ldots(n-2-x)}{(n-1)!} u^{n-1};$$

píšeme-li to

$$\varDelta(x) = \frac{x}{\Gamma(1-x)} \frac{\Gamma(n-x)}{\Gamma(n+1)} u^n - \frac{x}{\Gamma(1-x)} \frac{\Gamma(n-1-x)}{\Gamma(n)} u^{n-1},$$

docílíme použitím asymptotické hodnoty

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = n^{a-b}(1+\varepsilon)$$

vyjádření

$$\varDelta(x) = \frac{x}{\Gamma(1-x)} \frac{u(1+\varepsilon)-(1+\varepsilon')}{n^{1+x}} u^{n-1},$$

kde ε, ε' jsou veličiny nezávislé na u, jež pro veliké n jsou velmi malé.

Tak vychází

$$(-1)^{n-1} \int_0^1 e^{-ax} g_1(x)\,dx > u^{n-1} \int_0^1 e^{-ax} \frac{x}{\Gamma(1-x)} \frac{u-1+\varepsilon u-\varepsilon'}{n^{1+x}}\,dx,$$

a je zřejmo, že tento výraz se s rostoucím n stává libovolně velikým. Naproti tomu je veličina

$$(-1)^{n-1}\int_0^1 e^{-ax} g_0(x)\,dx$$

nezávislá na n (kromě znamení), a tedy integrál

$$\int_0^1 e^{-ax} g(x)\,dx$$

má pro dosti veliká n znamení $(-1)^{n-1}$.

Veličiny $C_n(a)$ tedy od jistého místa počínajíce střídají své znamení pravidelně. Současně vychází pro veliká n

$$\frac{C_n(a)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{e^a\vartheta}{e^a-1}\int_0^1 \frac{x}{\Gamma(1-x)} e^{-ax}\frac{dx}{n^{1+x}},\quad (o < \vartheta < 1);\quad (14^a)$$

tu pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x}{\Gamma(1-x)} e^{-ax}\frac{dx}{n^{1+x}} = \int_0^1 \frac{x\xi(1+x)}{\Gamma(1-x)} e^{-ax}\,dx$$

konverguje, a tedy tím spíše je řada

$$\Sigma\frac{|C_n(a)|}{n!} \text{ konvergentní.}$$

Ve vzorci (14^a) bude sblíženě $\vartheta = 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \dots$ t. j.

$$\vartheta \sim \frac{e^a - 1}{e^a},$$

takže

$$\frac{C_n(a)}{(n-1)!} \sim (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\Gamma(x)\sin x\pi\, e^{-(a+\log n)x}\,dx;$$

vložme $x\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\xi}\xi^x d\xi$ a proveďme integraci vůči x:

$$(-1)^{n-1}\frac{C_n(a)}{(n-1)!} \sim \int_0^{\infty} e^{-\xi}\frac{d\xi}{(a+\log n - \log\xi)^2 + \pi^2}.\quad (14^b)$$

Čísla tato jsou ostatně brzy velmi malá již pro $a = 2$, kdy C_ν mají hodnoty

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ 0, \ \frac{1}{8}, \ -\frac{1}{4}, \ 1, \ -\frac{37}{8}, \dots,$$

avšak jich ubývání je velmi pomalé; illustrüje to hlavně okolnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n(a)}{n!} = 0.$$

Řada končí zápornými členy a jest třeba jich sečísti ohromný počet, aby se ukázala malá hodnota součtu. Tak jest pro $a = 1$

$$-\frac{C_{11}}{11!} = -0{\cdot}008, \quad -\frac{C_{12}}{12!} = -0{\cdot}010.$$

$$\sum_0^{12} (-1)^\nu \frac{C_\nu}{\nu!} = 0{\cdot}210,$$

a tento obnos musí být vyvážen následujícími vesměs zápornými členy. Tomu nasvědčuje tvar (14^b), jenž závisí na $\log n$, veličině to velmi pozvolna se měnící.

Z rovnice

$$\frac{C_n(a)}{n!} = \int_0^{\infty} e^{-ax} \binom{x}{n} dx$$

vychází derivováním

$$\frac{1}{n!} D_a C_n(a) = -\int_0^{\infty} e^{-ax} \binom{x}{n} [(x-n)+n]\, dx =$$

$$= -(n+1)\frac{C_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{nC_n}{n!},$$

t. j.
$$C_{n+1}(a) = -C'_n(a) - n\,.\,C_n(a); \tag{15}$$

pomocí této rovnice sestaví se rychleji agregáty $C_n(a)$:

$$C_0 = \frac{1}{a}, \quad C_1 = \frac{1}{a^2}, \quad C_2 = \frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^2}, \quad C_3 = \frac{6}{a^4} - \frac{6}{a^3} + \frac{2}{a^2},$$

$$C_4 = \frac{24}{a^5} - \frac{36}{a^4} + \frac{22}{a^3} - \frac{6}{a^2},$$

$$C_5 = \frac{120}{a^6} - \frac{240}{a^5} + \frac{210}{a^4} - \frac{100}{a^3} + \frac{24}{a^2},$$

$$C_6 = \frac{720}{a^7} - \frac{1800}{a^6} + \frac{2040}{a^5} - \frac{1350}{a^4} + \frac{548}{a^3} - \frac{120}{a^2}.$$

Poněvadž rozvoje fakult mají součinitele menší, stůj zde jejich tabulka:

$$2!\binom{x}{2}=x^2-x,\quad 3!\binom{x}{3}=x^3-3x^2+2x,$$

$$4!\binom{x}{4}=x^4-6x^3+11x^2-6x,$$

$$5!\binom{x}{5}=x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x,$$

$$6!\binom{x}{6}=x^6-15x^5+85x^4-225x^3+274x^2-120x,$$

$$7!\binom{x}{7}=x^7-21x^6+175x^5-735x^4+1624x^3-1764x^2+720x,$$

$$8!\binom{x}{8}=x^8-28x^7+322x^6-1960x^5+6769x^4-13132x^3+ \\ +13068x^2-5040x;$$

pro další agregáty stůjtež zde jen prosté hodnoty součinitelů

$9!\binom{x}{9}$: 1, 36, 546, 4536, 22449, 67284, 118124, 109584, 40320,

$10!\binom{x}{10}$: 1, 45, 870, 9450, 63273, 269325, 723680, 1172700, 1026576, 362880,

$11!\binom{x}{11}$: 1, 55, 1320, 18150, 157773, 902055, 3416930, 8409500, 12753576, 10628640, 3628800.

Z identity

$$\sum_0^\infty \frac{C_n(a)}{n!}z^n=\frac{1}{a-\log(1+z)}=\sum_0^\infty\frac{\log^m(1+z)}{a^{m+1}}$$

vyčteme zároveň hodnoty součinitelů v řadě pro $\log^m(1+z)$.

Na př. $\log^3(1+z)=\frac{6z^3}{3!}-\frac{36}{24}z^4+\frac{210}{5!}z^5-\frac{1350}{6!}z^6+\dots$

Pomocí vztahu (15) dokážeme o funkci

$\Phi_n(a)=e^{an}C_n(a)$ vztah $\Phi'_n=-C_{n+1}e^{an}=-e^{-a}\Phi_{n+1}$,

t. j.
$$\Phi_{n+1}(a)=-e^a\Phi'_n(a). \tag{16}$$

Znamenejme $y=\Phi_n(a)$, $y^{(\nu)}=D_a^\nu\Phi_n(a)$. Nezávisle na významu y tvořme veličiny $y_1, y_2, \dots$ z rovnic $y_{\nu+1}=-y'_\nu e^a$:

$$y_1=-e^a y',\ y_2=-e^a y'_1=e^{2a}(y'+y''),$$
$$y_3=-e^{3a}(2y'+3y''+y'''),\dots$$

Vyjde obecně

$$y_m = (-1)^m e^{ma} (k_0 y^{(m)} + k_1 y^{(m-1)} + \ldots + k_{m-1} y') \qquad (\alpha)$$

a součinitelé k jsou od funkce y neodvislé. Určíme je pro funkci $y = e^{au}$; ta dává $y_1 = -u e^{(u+1)a}$, $y_2 = u(u+1) e^{(u+2)a}$) $y_3 = -u(u+1)(u+2) e^{(u+3)a}, \ldots$ obecně

$$y_m = (-1)^m e^{(u+m)a} . u(u+1) \ldots (u+m-1),$$

což porovnáním s

$$y_m = (-1)^m e^{ma} e^{au} (k_0 u^m + k_1 u^{m-1} + k_2 u^{m-2} + \ldots)$$

dává pro stanovení čísel k identitu

$$k_0 u^m + k_1 u^{m-1} + k_2 u^{m-2} + \ldots = u(u+1)(u+2)\ldots(u+m-1)$$

a možno tedy na místě (α) psáti obecně symbolicky

$$y_m = (-1)^m e^{ma} D(D+1)(D+2) \ldots (D+m-1) y,$$

tedy v našem případě $y = \Phi_n(a)$, $y_m = \Phi_{n+m}(a)$, a po zkrácení činitelem exponenciálním:

$$C_{n+m}(a) = (-1)^m e^{-na} D_a (D_a + 1)(D_a + 2) \ldots (D_a + m - 1) \Phi_n(a),$$

$$\Phi_n(a) = e^{na} C_n(a); \qquad (16^*)$$

tato identita může sloužiti k stanovení polynomu C_{n+m}, známe-li C_n, t. j. vyjadřuje $C_{n+m}(a)$ pomocí $C_n(a)$ a její derivací až po m-tou. Na př.

$$-C_{n+3}(a) = 2(nC_n + C'_n) + 3(n^2 C_n + 2nC'_n + C''_n) +$$
$$+ n^3 C_n + 3n^2 C'_n + 3nC''_n + C'''_n = C'''_n(a) + (3n+3) C''_n(a) +$$
$$+ (3n^2 + 6n + 2) C'_n(a) + (n^3 + 3n^2 + 2n) C_n(a).$$

Konečně buď poznamenáno, že naše identita dává

$$\frac{\log(1+z)}{a - \log(1+z)} = \sum_1^\infty \frac{aC_\nu(a)}{\nu!} z^\nu,$$

tedy identitu

$$\frac{x}{a+x} = -\sum_1^\infty \frac{aC_\nu(a)}{\nu!} (e^{-x} - 1)^\nu,$$

jíž se podobným způsobem užívá jako naší identity základní. Na příklad určení zbytku v polokonvergentním rozvoji logarithmointegrálu

$$-e^\omega li(e^{-\omega}) = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{dx}{1+x} =$$

$$\sum_0^{n-1} (-1)^\nu \frac{\nu!}{\omega^{\nu+1}} + (-1)^n \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{x^n dx}{1+x}$$

obdržíme pro poslední integrál

$$R_n = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{x^n dx}{1+x}$$

pomocí poslední identity v případě $a = 1$ vyjádření

$$R_n = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu!} \int_0^\infty e^{-\omega x} x^{n-1} (e^{-x} - 1)^\nu dx,$$

t. j. $$R_n = -(n-1)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu!} \Delta^\nu \frac{1}{\omega^n}, \quad \Delta\omega = 1.$$

Příklad. $\omega = 15$, $n = 5$

u	u^{-5}
15	$0{\cdot}0^7 87791$
16	59605
17	41429
18	29401
19	21260

$\Delta\omega^{-n} = -0{\cdot}0^7 28186$, $\Delta^2\omega^{-n} = 0{\cdot}0^7 10010$,
$\Delta^3\omega^{-n} = -0{\cdot}0^8 3862$, $\Delta^4\omega^{-n} = 0{\cdot}0^8 1601$.

Podržíme toliko deset míst; pak máme poslední člen

$$\frac{C_4}{4!} \Delta^4 = 0{\cdot}0^9 4,$$

takže s napsanými členy vystačíme.

O methodě instantánních oscillací v asteroidickém problému tří těles.

W. W. Heinrich v Praze.

(Odpověď ku článku pana J. Svobody „Několik poznámek . . .“ Čas. XLVIII 1919 p. 37., jakož i ku článku pana K. Petra „Dvě poznámky ku spec. případu problému tří těles“ Časop. XLVII. 1918 str. 268.)

1. Když koncem let osmdesátých vydal Poincaré svou základní práci Sur le problème de trois corps Acta math. XIII. a později svoje Methodes nouvelles, ocitly se dosavadní methody theoretické astronomie ve zcela novém stadiu. Bylo úkolem nejbližším tyto abstraktní cesty Poincaréovy propracovati explicitně a tak je přiblížiti ku konkretním otázkám přírodní vědy. Tím teprve se osvětlí, jak dalece jsou ony metody schopny životnosti či jak jsou upotřebitelné v přírodě.

V čem spočívá jich základní myšlenka? Kdežto staré theorie považovaly za prvé přiblížení dráhy, platné při existenci těles