Úlohy.

a) Z mathematiky.

1.

Jakým podmínkám musí vyhovovati strany trojúhelníku, aby bylo možno z jeho výšek jako stran sestrojiti nový trojúhelník? Jaký trojúhelník dostaneme, opakujeme-li tuto konstrukci dvakráte?

Dr. *Marian Haas.*

Řešení dle p. autora.

Strany daného trojúhelníka dle velikosti seřazeny buďte $a \geqq b \geqq c$, ploský obsah Δ. Strany trojúhelníku z výšek počítáme pak z rovnic $aa' = bb' = cc' = 2\Delta$; patrně tu jest $a' \leqq b, \leqq c'$.

V trojúhelníku jest součet obou nejkratších stran větší nežli strana nejdelší. Proto musí platiti nerovnosti

$$b + c > a, \quad a' + b' > c',$$

kterážto poslední jest identická s $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, a dá se psáti ve formě $(a - c)(b - c) < c^2$.

Rozměry původního trojúhelníka nejsou tudíž libovolné, nýbrž vázány na uvedené dvě podmínky, které chceme diskutovati.

Dle ustanovení předem učiněného $a \geqq b \geqq c$, jest

$$(b - c)^2 \leqq (a - c)(b - c),$$

z čehož se odvodí $(b - c)^2 < c^2$, čili $\frac{1}{2} b < c \leqq b$.

Nejkratší strana je delší nežli polovice strany prostřední. Pro třetí stranu a platí současně

$$b \leqq a < b + c; \quad b \leqq a < \frac{c^2}{b - c} + c.$$

Dolejší mez je dána délkou strany prostřední b, z obou horních mezí dlužno voliti tu, která je menší.

Zbývá tedy rozhodnouti, kdy

$$b + e \lesseqgtr \frac{c^2}{b - c} + c?$$

Upravme postupně na $b^2 \gtreqless bc + c^2$, $\quad 5b^2 \lesseqgtr (b + 2c)^2$,

$$\frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1) \lesseqgtr c.$$

Dle toho sluší rozeznávati případy dva dle velikosti strany c.

I. $$b \geqq c \geqq \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

pak nejdelší strana a má hranice $b \leqq a < b + c$. Jestliže $c = b$, jest nejdelší strana obsažena v mezích $b \leqq a < 2b$. Zmenšujeme-li c až do hodnoty $c = \frac{1}{2} b\ (\sqrt{5} - 1)$, klesá horní mez až k hodnotě

$$\tfrac{1}{2} b\ (\sqrt{5} + 1).$$

II. $$\tfrac{1}{2} b < c \overline{\leqq} \tfrac{1}{2} b\ (\sqrt{5} - 1).$$

pak pro nejdelší stranu platí $b \leqq a < \dfrac{bc}{b - c}$.

Pro $c = \frac{1}{2} b\ (\sqrt{5} - 1)$ jest horní mezí jako dříve $\frac{1}{2} b\ (\sqrt{5} + 1)$ když pak dále zmonšujeme c, zmenšuje se též horní mez a při $c = \frac{1}{2} b$ nabývá hodnoty b.

Jestliže nejkratší strana uvažovaného trojúhelníka jest $\left\{\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}\right\}$ nežli strana pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice, která má za poloměr stranu prostřední, pak nejdelší strana $\left\{\begin{matrix} a < b + c \\ a < \dfrac{bc}{b - c}\end{matrix}\right\}$ jest $\left\{\begin{matrix}\text{menší nežli průměr}\\ \text{větší nežli poloměr}\end{matrix}\right\}$ oné kružnice, ale $\left\{\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}\right\}$ nežli strana hvězdovitého desetiúhelníka v téže kružnici.

Položme si otázku, kdy trojúhelník z výšek jest danému podobcn, což žádá splnění podmínky

$$a : b : c = c' : b' : a',$$

$$a : b : c = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

Úměra se nám tu redukuje na rovnici $b^2 = ac$, která praví, že strany trojúhelníka tvoří geometrickou řadu.

Podíl její $$k = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \gtreqless 1.$$

Dolní mez jeho vyšetříme, když do nerovniny $b + c > a$ dosadíme

$$a = b/c, \quad c = bk.$$

Bude tu $$1 + k > \frac{1}{k}, \quad \text{čili} \quad k > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

a pro strany $a < \dfrac{b}{2} (\sqrt{5} + 1), \quad c > \dfrac{b}{2} (\sqrt{5} - 1).$

Má-li trojúhelník sestrojený z výšek daného trojúhelníka jako stran býti danému podoben, musí býti $\left\{\begin{matrix}\text{nejdelší}\\ \text{nejkratší}\end{matrix}\right\}$ strana tohoto $\left\{\begin{matrix}\text{menší}\\ \text{větší}\end{matrix}\right\}$ nežli strana $\left\{\begin{matrix}\text{hvězdovitého}\\ \text{pravidelného}\end{matrix}\right\}$ desetiúhelníka vepsaného do kružnice, která má prostřední stranu za poloměr, Jsou-li a'', b'', c'' výšky trojúhelníka o stranách a', b', c', bude

$$a'' : b'' : c'' = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'} = a : b : c,$$

takže trojúhelník ten (o stranách a''. b'', c'') je danému trojúhelníku (o stranách a, b, c) podoben.

O trojúhelnících z výšek daného trojúhelníku viz pojednání prof. *Sýkory* ve 32. r. Časopisu.

2.

V rovnoramenném lichoběžníku jest průsečík úhlopříček souměrný se středem kruhu opsaného vzhledem k větší půdici.

a) Jest dokázati, že mezi stranami je tento vztah:

$$\left(\frac{a+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 = 4.$$

b) Mezi vnitřním úhlem a úhlem sevřeným úhlopříčnami je vztah $\omega = \alpha + 90^0$.

c) Poloměr jest dán formulí $4r^2 = a^2 + b^2$.

† Prof. *R. Hruša.*

Řešení. Zaslala sl. *Eugenie Maternová.* stud. r. g. dívčí na Král. Vinohradech.

Budiž daný lichoběžník rovnoramenný $ABCD$. Půdice nechť jest prodloužena přes B do E tak, že $BE = CD$, dále budiž U průsek úhlopříčen a střed opsaného kruhu. Ze souměrných trojúhelníků ABU, ABS plyne, že $AU = AS = r$. Z podobných trojúhelníků AEU, AEC plyne úměra: $u : r = (a + c) : a$.

Vzhledem k tomu, že $u = 2r \sin \alpha$, plyne odtud vztah:

$$\frac{a+c}{a} = 2 \sin \alpha.$$

Nechť $AL \# DC$, pak z $\triangle LBC$ plyne:

$$\frac{a-c}{b} = 2 \cos x.$$

Sečtením druhých mocnin těchto rovnic vychází snadno relace:

$$\left(\frac{a+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 = 4.$$

Poněvadž $\sphericalangle ASB = \omega$ jest $\sphericalangle ACB = 180 - \frac{1}{2}\omega$ jakožto úhel obvodový $\alpha = 180 - (90 - \frac{1}{2}\omega) - (180 - \frac{1}{2}\omega) = \omega - 90^0$.

Z $\triangle ASB$ plyne dále vztah: $a = 2r \sin \frac{1}{2}\omega$.

Straně b jakožto tetivě náleží úhel obvodový: $90 - \frac{1}{2}\omega$ a tudíž $b = 2r \cos \frac{1}{2}\omega$. Sečtením zčtvercovaných rovnic se obdrží:

$$a^2 + b^2 = 4r^2.$$

3.

Stanoviti racionálné trojúhelníky, v nichž $\alpha = 2\beta + \gamma$.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VIII. tř. gymn. v Praze III.

Úhel α zvolme libovolně, pak musí býti

$$\beta = 2\alpha - 2R,\ \gamma = 4R - 3\alpha.$$

Aby bylo $\beta > 0$, $\gamma > 0$, musí býti patrně $90^0 < \alpha < 120^0$
Dle věty sinové je

$$a : b : c = \sin\alpha : (-\sin 2\alpha) : (-\sin 3\alpha),$$

čili po malé úpravě

$$a : b : c = 1 : (2 - 2\cos\alpha) : (1 - 4\cos^2\alpha).$$

Položme nyní $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = t$. Bude tedy

$$a : b : c = 1 : 2\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} : \frac{-3t^4 + 10t^2 - 3}{t^2 + 1)^2}.$$

$$= (t^2 + 1)^2 : 2(t^4 - 1) : (-3t^4 + 10t^2 - 3).$$

I je: $a = k(t^2 + 1)^2$, $b = 2k(t^4 - 1)$, $c = k(-3t^4 + 10t^2 - 3)$ vyjádřeno racionálně pomocí parametrů k a t. Při tom musí býti ovšem k číslo racionálné, kladné, t pak rovněž racionální kladné uvnitř intervalu $(1, \sqrt{3})$.

4.

Sestrojiti ellipsu, jsou-li dány její sdružené průměry, které jsou stejně dlouhé.

Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Podává *Frant. Bukovský*, stud., VIII. tř. gymnasia v Praze-III.

Sdružené průměry ellipsy stejné délky musí býti dány svou délkou i polohou, a musí se ovšem navzájem půliti. Jsou-li na sobě kolmo, přejde ellipsa v kružnici, takže tento případ nemusíme ani uvažovati.

Osy ellipsy jsou co do polohy osami souměrnosti stejně dlouhých sdružených průměrů, hlavní osa pak leží uvnitř úhlů ostrých.

Ježto známe polohu os, pišme rovnici hledané ellipsy ve tvaru

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Vedeme-li koncovým bodem (x_1, y_1) jednoho průměru (ležícím třeba v prvém kvadrantě, takže $x_1 > 0$, $y_1 > 0$) rovnoběžku k druhému, jest to tečna hledané ellipsy.

Zmíněná tečna má míti rovnici $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$;

úsek na ose x $u = a^2/x_1$, na ose y $v = b^2/y_1$.

Délku poloos najdeme odtud jako střední měřickou úměrnou

$$a = \sqrt{ux_1},\quad b = \sqrt{vy_1}.$$

5.

Body vzniklé tím, že spustíme s pat výšek kolmice na druhé dvě výšky a průsečíky kružnic opsaných nad úseky výšek ode stran až k výškovému bodu, leží na třech přímkách, které omezují trojúhelník podobný a podobně položený s trojúhelníkem daným! Jaký jest jejich poměr podobnosti? Kdy ony tři přímky protínají se v jednom bodě? *Karel Koutský.*

Z důkazu p. *Jaroslava Fuchse*, stud. VII. tř. r. g. v Náchodě, příliš dlouhého, než aby mohl býti uveřejněn, vyjímáme:

Poměr podobnosti obou trojúhelníků je $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Ony přímky protínají se v jednom bodě pro trojúhelník pravoúhlý.

6.

Které jsou ostré úhly pravoúhlého trojúhelníku, svírá-li přepona jeho s centrálou kružnice vepsané a opsané úhel φ? (Zvláště pro $\varphi = 45^0$.) Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VIII. tř. gymn. v Praze-III.

Budiž ABC daný trojúhelník pravoúhlý. Střed O strany AB je zároveň středem kružnice opsané. Kružnice vepsaná mějž střed S. Z bodu S spusťme kolmici ST na AB. Pak je $\sphericalangle SOT = \varphi$. Poněvadž

$$ST = \varrho = s - c, \quad OT = OB - TB = \tfrac{1}{2} c - (s - b),$$

je
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ST}{OT} = \frac{a + b - c}{b - a}.$$

Dělme čítatele i jmenovatele tohoto zlomku c:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} - 1}{\dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c}} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (*)$$

Je-li dáno φ, nalezneme z této rovnice úhel α a pak $\beta = R - \alpha$. Je-li spec. $\varphi = 45^0$, tedy máme řešiti rovnici

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 1,$$

odkud nalezneme $\alpha = 30^0$, tedy $\beta = 60^0$.

Rovnici (*) lze však snadno řešiti pro každé φ.

Upravme ji na tvar

$$\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \varphi) + \cos \alpha (1 - \operatorname{tg} \varphi) = 1. \quad (**)$$

Položme $1 + \operatorname{tg} \varphi = \varrho \cos \vartheta$, $1 - \operatorname{tg} \varphi = \varrho \sin \vartheta$, čemuž hoví $\varrho = \sqrt{2}/\cos \varphi$.

Bude tedy $\cos\vartheta = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2}} = \cos(45^0 - \varphi)$,

$\sin\vartheta = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}} = \sin(45^0 - \varphi)$,

tudíž $\vartheta = 45^0 - \varphi$.

Rovnice (**) se pak promění v rovnici $\sin(\alpha + 45^0 - \varphi) = \cos\varphi/\sqrt{2}$, z níž lze α snadno vypočísti.

7.

Sestrojte parabolu, dány-li dva póly s příslušnými polárami.

Prof. *Ant. Lochmann.*

Řešení. Zaslal p. *Jar. Mrkos*, stud. českého stát. gymnasia v Praze-III.

K řešení užijeme těchto vět:

1. Kružnice opsaná polárnímu trojúhelníku paraboly má střed na přímce řídící.

2. Spojnice středů stran polárního trojúhelníka paraboly jsou tečnami k ní.

3. Geometrické místo bodů souměrně sdružených dle tečen s ohniskem paraboly jest přímka řídící.

Z toho plyne tato konstrukce:

Dané póly buďtež A a B, příslušné poláry a, b, jejich průsečík pak C; přímka $AB \equiv c$ jest polárou bodu C. Budiž dále $(bc) \equiv E$, $BC \equiv e$, $(a, c) \equiv D$, $AC \equiv d$. Pak jsou trojúhelníky ACD a BCE polární.

Střed kružnice opsané trojúhelntku ACD resp. BCE budiž S_1 resp. S_2. Pak jest S_1S_2 přímka řídící.

Buďtež dále $A'C'D'$ středy stran trojúhelníka ACD. Pak jsou přímky $A'C'$, $C'D'$ tečnami paraboly. Sestrojíme-li nyní přímku m resp. n souměrně sdruženou s přímkou řídící dle AC' resp. $C'D'$, protínají se nám přímky m, n v ohnisku F.

8.

Která normála ellipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ omezuje nejmenší úseč? Napište rovnici této normály a vyčtěte z ní řešení téže úlohy pro parabolu.

† Prof. *Jaroslav Pilnáček.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. česk. stát. gymn. v Praze-III.

Úloha se velmi zjednoduší, pokládáme-li elipsu za pravoúhlý průmět kružnice, jejíž rovina svírá s rovinou elipsy úhel určený rovnicí $\cos\varphi = b/a$, V obou rovinách položme počátek souřadnic do středu příslušné křivky, osu x rovnoběžně s průsečnicí obou rovin. Kružnice má rovnici $x^2 + y^2 = a^2$, elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Má-li libovolný bod v rovině kružnice souřadnice x, y má jeho průmět v rovině elipsy souřadnice x, yb/a. Na kružnici zvolme si libovolný bod $M(\xi, y)$. Jest tedy splněna rovnice

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2. \tag{1}$$

Jeho průmět jest $M'(\xi, \eta b/a)$. Jeho normála k elipse má rovnici

$$n' \equiv a^2\eta \,.\, x - ab\xi \,.\, y - (a^2 - b^2)\xi\eta = 0. \tag{2}$$

Tato normála omezuje na elipse jistou úseč U', která jest opět průmětem úseče kruhové U, omezené na kružnici přímkou, jejíž průmětem jest normála bodu M'. Platí ovšem

$$U' = U \cos\varphi = U \,.\, b/a.$$

Bude tedy úseč U' minimální, bude-li minimální úseč kruhová U, omezená přímkou n, čili bude-li míti přímka n maximální vzdálenost od středu kružnice. Přímka n má rovnici

$$n \equiv a^2\eta \,.\, x - b^2\xi \,.\, y - (a^2 - b^2)\xi\eta = 0. \tag{3}$$

Její vzdálenost od středu kružnice je $v = \dfrac{(a^2 - b^2)\xi\eta}{\sqrt{a^4\eta^2 + b^4\xi^2}}$.

Uvažujme extrémní hodnoty funkce $\dfrac{\xi^2\eta^2}{b^4\xi^2 + a^4\eta^2}$ za vedlejší podmínky, dané rovnicí (1). Položme

$$\frac{\xi^2\eta^2}{b^4\xi^2 + a^4\eta^2} = E \tag{4}$$

a vylučme z rovnice (1) a (4) η. Po úpravě dostaneme

$$\xi^4 + [(b^4 - a^4)E - a^2]\,\xi^2 + a^6E = 0$$

a odtud

$$\xi^2 = \frac{(a^4 - b^4)E + a^2 \pm \sqrt{(a^4 - b^4)^2E^2 - 2a^2(a^4 + b^4)E + a^4}}{2}$$

Aby bylo ξ^2 reálné, musí

$$(a^4 - b^4)^2E^2 - 2a^2(a^4 + b^4)E + a^4 \geqq 0. \tag{5}$$

Uvážíme-li, že $(a^4 - b^4)^2$ je vždy kladné, můžeme psáti (5) ve tvaru

$$(E - E_1)(E - E_2) \geqq 0, \tag{6}$$

kde $E_1 = \dfrac{a^2}{(a^2 - b^2)^2}$, $E_2 = \dfrac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}$.

Vzhledem k tomu, že $E_1 > E_2$, lze (6) psáti též

I. $E \geqq E_1$ II. $E \leqq E_2$

Je tedy $E\max = E_2$, $E\min = E_1$.

Vzdálenost přímky n od středu kružnice jest tedy maximální při $E = E_2$, minimální při $E = E_1$. Úseč U bude tedy maximální při $E = E_1$, minimální při $E = E_2$.

Pro $E = E_1$ jest

$$\xi = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \pm \frac{a^2}{e},$$

pro $\qquad E = E_2$ jest $\xi = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Hodnota $\pm a^2/e$ nepadá v úvahu, poněvadž leží mimo interval, v němž se smí ξ pohybovat $(-a, \ldots + a)$.

Minimální úseč elipsy nastane tedy při normále bodu M'

$$\left(\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

při čemž můžeme vzíti všechny kombinace znamének (čtyři body).

Vybereme si ku př. bod

$$\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Jeho normála má rovnici

$$(x + y)\sqrt{a^2 + b^2}, + (a^2 - b^2) = 0.$$

Abychom přešli od elipsy k parabole, uvažujme vrcholovou rovnici elipsy:

$$y^2 = 2px - \varphi x^2,$$

kde $\qquad p = b^2/a, \quad \varphi = pa.$

Uvedená normála bude míti nyní rovnici

$$(x + y)\sqrt{a^2 + b^2} + (a^2 - b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2}) = 0.$$

Položíme-li všude místo b^2 součin ap, nabude rovnice normály, přejdeme-li k limitě $a = \infty$, tvaru

$$2x + 2y - 3p = 0,$$

což jest u paraboly normála bodu $(p/2, p)$, o čemž se ostatně můžeme snadným tu počtem přesvědčiti.

9.

Dokažte, že všechny trojúhelníky, jež jsou vepsány do ellipsy o poloosách a, b a jež mají střed kružnice vepsané totožný se středem ellipsy, mají stejný poloměr vepsané kružnice, totiž $\varrho = \frac{ab}{a \pm b}$.

† Prof. *Jaroslav Pilnáček.*

Řešení dle p. autora,

Vrcholy takového trojúhelníka buďtež A $(a \cos \alpha,\ b \sin \alpha)$, B $(a \cos \beta,\ b \cos \beta)$, C $(a \cos \gamma,\ b \sin \gamma)$, rovnice strany $\overline{AB}$ jest: $bx (\sin \alpha - \sin \beta) - ay (\cos \alpha - \cos \beta) - ab \sin (\alpha - \beta) = 0.$

Užijme zde vzorců

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = - 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

a zkraťme pak tu rovnici výrazem $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$; vyjde:

$$bx \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + ay \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - ab \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Vzdálenost této přímky od počátku jest

$$\varrho = \frac{ab \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}};$$

z této relace odstraňme zlomek a zdvojmocněme; bude pak

$$b^2 \varrho^2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + a^2 \varrho^2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - a^2 b^2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Tuto rovnici dělme $a^2 b^2 \varrho^2$ a úhly v ní se vyskytující nahraďme úhly dvojnásobnými $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$. Vyjde

$$\frac{1}{a^2} (1 + \cos \overline{\alpha + \beta}) + \frac{1}{b^2} (1 - \cos \overline{\alpha + \beta}) -$$

$$- \frac{1}{\varrho^2} (1 + \cos \overline{\alpha - \beta}) = 0; \tag{1}$$

podobně vychází

$$\frac{1}{a^2} (1 + \cos \overline{\beta + \gamma}) + \frac{1}{b^2} (1 - \cos \overline{\beta + \gamma}) -$$

$$- \frac{1}{\varrho^2} (1 + \cos \overline{\beta - \gamma}) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a^2} (1 + \cos \overline{\gamma + \alpha}) + \frac{1}{b^2} (1 - \cos \overline{\gamma + \alpha}) -$$

$$- \frac{1}{b^2} (1 + \cos \overline{\gamma - \alpha}) = 0, \tag{3}$$

Rovnice (2), (3) pišme takto:

$$\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$
$$-\left(-\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

$$\cos\gamma\cos\alpha\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\sin\gamma\sin\alpha\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$
$$-\left(-\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Pro stručnost zaveďme označení:

$$\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=M,\quad \frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=N,$$
$$\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=P;$$

pak tyto rovnice zní:

$$M\cos\beta\cos\gamma+N\sin\beta\sin\gamma-P=0,$$
$$M\cos\alpha\cos\gamma+N\sin\alpha\sin\gamma-P=0.$$

Z těchto rovnic eliminujeme úhel γ tím způsobem, že ty rovnice řešíme dle neznámých $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ a výsledné jich hodnoty dosadíme pak do vzorce $\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$. Dle toho vychází

$$\cos\gamma=\frac{P.(\sin\alpha-\sin\beta)}{M.\sin(\alpha-\beta)}=\frac{P\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{M\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

a podobně
$$\sin\gamma=\frac{P\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{N\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorce $\cos^2\gamma+\sin^2\gamma-1=0$ a znásobíme takto vzniklou rovnici výrazem $\frac{1}{P^2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; tím dostaneme

$$\frac{1}{M^2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{N^2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{P^2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

čili
$$\frac{1}{M^2}(1+\cos\overline{\alpha+\beta})+\frac{1}{N^2}(1-\cos\overline{\alpha+\beta})-$$
$$-\frac{1}{P^2}(1+\cos\overline{\alpha+\beta})=0, \tag{4}$$

a podobně by vyšlo

$$\frac{1}{M^2}(1+\cos\overline{\beta+\gamma})+\frac{1}{N^2}(1-\cos\overline{\beta+\gamma})-$$
$$-\frac{1}{P^2}(1+\cos\overline{\beta-\gamma})=0, \tag{5}$$
$$\frac{1}{M^2}(1+\cos\overline{\gamma+\alpha})+\frac{1}{N^2}(1-\cos\overline{\gamma+\alpha})-$$
$$-\frac{1}{P^2}(1+\cos\overline{\gamma-\alpha})=0. \tag{6}$$

Na rovnice (1), (2), (3) můžeme se dívati jako na rovnice homogenní o neznámých $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{\varrho^2}$ a na (4), (5), (6) jako na rovnice homogenní o neznámých $\frac{1}{M^2}, \frac{1}{N^2}, \frac{1}{P^2}$. Tyto dvě soustavy rovnic *liší se však jen v označení neznámých* a nutně tedy platí

$$\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}:\frac{1}{\varrho^2}=\frac{1}{M^2}:\frac{1}{N^2}:\frac{1}{P^2},$$

nebo také

$$a^2:b^2:\varrho^2=M^2:N^2:P^2.$$

Uvažujme z toho pouze $a^2:b^2=M^2:N^2$, aneb $a:b=\pm M:N$ čili $\pm bM+aN=0$, t. j.

$$\pm b\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+a\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

z toho

$$\frac{a\pm b}{\varrho^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(a\mp b)=0$$

a dále

$$\frac{a\pm b}{\varrho^2}=\frac{(a^2-b^2)(a\mp b)}{a^2b^2}.$$

Zkrátíme výrazem $a\pm b$ a bude

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{(a\mp b)^2}{a^2b^2}, \text{ t. j. } \varrho=\frac{ab}{a\mp b},$$

jak bylo dokázati.

Při tom zřejmě $\varrho=\frac{ab}{a+b}$ je poloměr kružnice vepsané uvnitř (neboť tu musí býti $\varrho<b$) a $\varrho=\frac{ab}{a-b}$ poloměr kružnice ve-

psané vně; aby řesení toto bylo reálné, musí $\varrho < a$, čili $\frac{ab}{a-b} < a$, z čehož $\frac{a}{b} > 2$.

10.

Do daného polokruhu vepište největší ellipsu! (Jedna její osa nechť co do polohy splývá s osou souměrnosti daného polokruhu.) Vyjádřete plochu této ellipsy a její poměr ku ploše polokruhu!

† Prof. *Jaroslav Pilnáček.*

Řešení. Zaslal p. *Frant. Bukovský*, stud. VIII. tř. gym. v Praze III.

Rovnice kružnice doplňující daný polokruh na celý kruh buďiž

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

a rovnice hledané ellipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1.$$

Tyto dvě křivky se všeobecně protínají ve 4 bodech, z nichž dva a dva mají tutéž souřadnici y. Vypočtěme tuto souřadnici eliminací x z rovnic těch křivek. Vyjde kvadratická rovnice

$$e^2y^2 - 2a^2by + b^2r^2 = 0. \tag{1}$$

Má-li se ellipsa kružnice dotýkati, musí rovnice (1) míti dvojný kořen čili diskriminant rovný nulle, z čehož vychází relace

$$a^4b^2 - e^2b^2r^2 = 0 \text{ a tedy } a^4 = e^2r^2 \text{ nebo } b^2 = a^2 - \frac{a^4}{r^2}. \tag{2}$$

Ellips vepsaných do polokruhu je nesčíslné množství, neboť lze a voliti libovolně, při čemž b je dáno rovnicí (2). Z tohoto množství máme najíti ellipsu největší. Obsah ellipsy jest $O = \pi ab$; z toho

$$\frac{O^2}{\pi^2} = a^2b^2 = a^2\left(a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right).$$

I jedná se o maximální hodnotu funkce

$$M = \frac{O^2r^2}{\pi^2}\ a^4r^2 - a^6. \text{ Uvažujme } M' = \frac{dM}{da} = 4a^3r^2 - 6a^5.$$

Pro $a = 0$ je $M' = 0$, pak je v intervalu od $a = 0$ až do $a = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ je $M' > 0$, pro $a = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ je $M' = 0$, a pro $a > r\sqrt{\frac{2}{3}}$ je $M' < 0$. Z toho plyne, že pro $a = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ nastane maximum.*)

*) $a = 0$, $b = 0$ poskytuje dolní hranici všech ploch ellips O.

Pak $b = r\frac{\sqrt{2}}{3}$ (dle rovnice 2.).

Obsah této největší ellipsy jest $\pi ab = \pi r^2 \frac{2}{3\sqrt{3}}$; obsah polokruhu $\frac{\pi r^2}{2}$. Poměr obou obsahů jest tedy $\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0{\cdot}7698\ldots$ Obsah ellipsy činí asi 77% polokruhu.

11.

Bodem O uvnitř trojúhelníku ABC vrhnouti kouli proti straně BC tak, aby po odrazu na této straně a pak po odrazu na AB a pak na AC dospěla k témuž bodu na straně BC, kde poprvé narazila.

Prof. *Pleskot.*

Řešení. Zaslal p. *Čumpelík*, stud. VIIa r. g. v Křemencové ul.

Koule nechť dopadne na BC pod úhlem ϑ_1, na AB pod úhlem ϑ_2, na AC pod $\sphericalangle \vartheta_3$ a podruhé BC pod úhlem ϑ_0.

Pro tyto úhly platí patrně vztahy:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1; \quad \vartheta_2 = \beta - \vartheta_1; \quad \vartheta_3 = \alpha - \vartheta_2 = \alpha - \beta + \vartheta_1;$$

$$\vartheta_0 = \gamma - \vartheta_3 = \gamma - \alpha + \beta - \vartheta_1,$$

takže
$$\vartheta_0 + \vartheta_1 = \gamma - \alpha + \beta.$$

Koule dopadne na BC v bodě A; po odrazu bude procházeti bodem O_1 souměrným s O podle BC; dopadne na AB v bodě C_1 a po odrazu bude procházeti bodem O_2 souměrným s O_1 podle AB; dopadne AC v bodě B_1 a po odrazu bude procházeti bodem O_3 souměrným s O_2 podle AC. Má dopadnouti na BC v bodě A_1. Jde zde patrně o konstrukci vrcholu trojúhelníka o straně O_1O_3, úhlu při tomto vrcholu $= 180^0 - (\vartheta_0 - \vartheta_1)$ tak, aby ležel na dané přímce BC. Geom. místo vrcholů nad danou úsečkou je kružnice o dvojnásobném úhlu středovém. Ta protne přímku v hledaném bodě.

12.

Řešiti soustavu rovnic

$$\sin x\,(1 + \sin x) + \cos y\,(1 + \cos y) = a$$
$$\sin (x + y) + \sin (x - y) = b.$$

(Speciálně pro $a = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{3})$, $b = \frac{3}{2}$).

Prof. *Ed. Pleva.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, stud. VIII. tř. gymn. v Praze III.

Pišme rovnice ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y + \sin x + \cos y &= a\\ 2\sin x \cos y &= b\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sečtením dostaneme

$$(\sin x + \cos y)^2 + (\sin x + \cos y) - (a + b) = 0,$$

odtud pak

$$\sin x + \cos y = \frac{-1 \pm 1\sqrt{1 + 4(a + b)}}{2}.$$

Zbývá nyní ještě řešiti soustavy rovnic

$$\text{I.}\ \sin x + \cos y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(a + b)}}{2},\ \sin x \cos y = \tfrac{1}{2} b.$$

II. vznikající z I. vezmeme-li u odmocniny znamení $-$.

Ve speciálním případě nalezneme, že $\sqrt{1 + 4(a + b)} =$

$$= \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} = 1 + 2\sqrt{3},\ \text{a tedy}$$

I. $\sin x = \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tak že v intervallu od 0^0 do 360^0 hoví úhly $x = 60^0,\ 120^0,\ y = 30^0,\ 330^0$,

II. *a*)
$$\sin x = \frac{-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos y = \frac{-(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

tedy, jak lze snadno nahlédnouti $|\cos y| > 1$, čemuž nelze reálnými úhly vyhověti,

II. *b*)
$$\sin x = \frac{-(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos y = \frac{-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2},$$

což opět není možno, ježto $|\sin x| > 1$.

13.

V ellipse vedena tečna, jež utíná na ose hlavní úsek m a na vedlejší n. Vrcholem $A\,(C)$ ellipsy vedená rovnoběžka utíná na ose vedlejší (hlavní) úsek $q_2\,(q_1)$; jest ukázati analyticky, že platí vztah:

$$m^2 = q_1^2 + a^2,\quad n^2 = q_2^2 + b^2,$$

kdež a, b jsou poloosy ellipsy.

Prof. *Ed. Pleva.*

Řešení. Sděluje *Frant. Bukovský*, stud. VIII. tř. g. v Praze-III.

Rovnice tečny elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ v bodě jejím (x_1, y_1) jest $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$; úsek na ose x-ové rovnající se m (pro $y = 0$) jest a^2/x_1, na ose y-ové značený n (když $x = 0$) vyjádřen jest b^2/y_1. Směrnice tečny a tedy i obou přímek s ní rovnoběžných jest dána výrazem $-b^2x_1/a^2y_1$.

Rovnoběžka procházející bodem $(a, 0)$ má rovnici

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - a),$$

její úsek na ose y $q_2 = \dfrac{b^2x_1}{ay_1}$. Rovnoběžka bodem $(0, b)$ o rovnici $y - b = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}x$ utíná na ose x úsek $q_1 = \dfrac{a^2y_1}{bx_1}$.

Dosadíme-li teď do předpokládaného vztahu a zaměníme-li po upravení vztah $b^2x_1^2 + a^2y_1^2$ za a^2b^2, k čemuž jsme oprávněni, neboť bod (x_1, y_1) leží na elipse, budou obě strany identické, čímž jest vztah onen dokázán.

14.

Ze všech ellips, v nichž průvodič dané délky ze středu vedený svírá s křivkou daný úhel, určete ellipsu s ekstrémní výstředností a) lineární, b) číselnou. Které jsou plochy obou?

Prof. *J. Schuster*.

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mrkos*, studující VIII. tř. gymn. v Praze III.

Hledaná ellipsa nechť má rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Daný průvodič nechť svírá s osou x úhel φ. Ellipsa musí procházeti bodem $M(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$, kdež r značí daný průvodič, tedy musí míti tečna v bodě M rovnici

$$b^2r\cos\varphi\,.\,x + a^2r\sin\varphi\,.\,y = a^2b^2.$$

Avšak tečna svírá s průvodičem daný úhel α, tedy s osou x úhel $\pi + (\varphi - \alpha)$. Musí míti tudíž tečna též rovnici

$$y - r\sin\varphi = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)(x - r\cos\varphi).$$

Násobíme-li tuto rovnici konstantou k, nalezneme srovnáním obou rovnic tečny tyto podmínky

$$\left\{\begin{aligned} & b^2r\cos\varphi = k\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) && (1)\\ & a^2r\sin\varphi = -k && (2)\\ & a^2b^2 = kr[\cos\varphi\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) - \sin\varphi]. && (3)\end{aligned}\right.$$

Dělme (3) : (1), dostaneme

$$a^2 = \frac{r^2 \cos\varphi\,[\cos\varphi \,\mathrm{tg}\,(\varphi - \alpha) - \sin\varphi]}{\mathrm{tg}\,(\varphi - \alpha)} = \frac{r^2 \sin\alpha \cos\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}. \quad (4)$$

Dělením (3) : (2) obdržíme

$$b^2 = - r^2 \sin\varphi\,[\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \alpha) - \sin\varphi] = \frac{r^2 \sin\alpha \sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}. \quad (5)$$

Je tedy pro $e^2 = a^2 - b^2$ po snadné úpravě

$$e^2 = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{\sin[2(\alpha - \varphi)]}. \quad (6)$$

a) e nabude tedy nejmenší hodnoty, nabude-li $\sin 2(\alpha - \varphi)$ své hodnoty největší, t. j. když $\sin 2(\alpha - \varphi) = 1$, $2(\alpha - \varphi) = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha - \varphi = \frac{1}{4}\pi$, $\varphi = \alpha - \frac{1}{4}\pi$.

Pro příslušné poloosy je pak $a^2 = \sqrt{2}\, r^2 \sin\alpha \cos(\alpha - \frac{1}{4}\pi)$; $b^2 = \sqrt{2}\, r^2 \sin\alpha \sin(\alpha - \frac{1}{4}\pi)$ a tedy plocha $P = \pi r^2 \sin\alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}$.

b) Dělením (6) a (4) dostaneme po malé úpravě

$$\varepsilon^2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi \cos(\alpha - \varphi)}.$$

ε bude míti nejmenší hodnotu, bude-li jmenovatel $\cos\varphi \cos(\alpha - \varphi) = \frac{1}{2}[\cos\alpha + \cos(2\varphi - \alpha)]$ co největší. To však nastane pro $\cos(2\varphi - \alpha) = 1$, $2\varphi - \alpha = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$.

Pak je $a = \sqrt{2}\, r \cos\frac{1}{2}\alpha$, $b = \sqrt{2}\, r \sin\frac{1}{2}\alpha$ a $P = \pi r^2 \sin\alpha$.

15.

Vepište do pravoúhlého rovnoběžnostěnu přímý elliptický válec největšího obsahu, jehož osou je tělesná úhlopříčka, a hrany podstav se dotýkají hran trojhranů, jež vybíhají od konců úhlopříčky.

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Čumpelík*, stud. VIIa tř. reál. gymn. v Praze v Křemencově ul.

Označme u délku tělesné úhlopříčky, v vzdálenost základny válce od vrcholu pravoúhlého rovnoběžnostěnu, z něhož úhlopříčka vychází. Pak budou základní ellipsy pro různé válce spolu podobny a jich osy úměrny v, tedy plochy úměrny v^2, $Z = kv^2$. Objem válce je pak $V = Z(u - 2v) = kv^2(u - 2v)$. Jde tedy o určení maksima výrazu $y = v^2(u - 2v)$ jako funkce v. Najdeme $y' = 6v\left(\frac{u}{3} - v\right)$, z kteréhožto výrazu seznáváme ihned eksistenci maksima pro $v = \frac{1}{3}u$.

Poznámka. Pan autor nalezl pro Z výraz

$$Z = \frac{\pi\, abc\, s}{\sqrt{2}\, S} v^2, \quad s^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$S^2 = (s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)\, s^2.$$

Maksimální objem je pak $V = \frac{4\pi}{27} \frac{abc\, s^4}{S}$.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

V nárysně dána kružnice. Proložiti touto kužel tak, by byl protat půdorysnou v rovnoosé hyperbole a jinou, k nárysně nakloněnou rovinou v kružnici. Dr. *Josef Klíma.*

Řešení. Zaslal v podstatě p. *F. Balada,* stud. VI. tř. r. v Pardubicích.

Má-li půdorysna hledaný kužel protínati v rovnoosé hyperbole, musí vrchol jeho býti na ploše kulové, pro niž je daná kružnice kružnicí hlavní. Aby rovina protínala šikmý kruhový kužel v kružnici musí rovina ta býti kolma k hlavní rovině (rovině souměrnosti) toho kužele a s osou jeho, jež půlí úhel jeho při vrcholu) svírati týž úhel ve smyslu ale opačném jak rovina podstavy (zde nárysna). Osa musí býti tedy kolma k jedné nebo druhé rovině souměrnosti úhlu dané roviny a nárysny. Středem dané kružnice proložíme tedy rovinu τ kolmou k nárysné stopě roviny dané a úloha přechází v úlohu, v kružnici nad průměrem sestrojiti pravý úhel tak, by jeho osa měla daný směr. Všechny osy úhlů obvodových nad průměrem procházejí koncem průměru kolmého k danému průměru, sestrojíme-li tedy bodem tím rovnoběžky se směry os hl. ploch kuželových dostaneme vrcholy dvou kuželů hovících dané úloze.

Pozn. *redakce.* Libov. plocha kuželová proložená danou kružnicí protne zmíněnou plochu kulovou ještě v druhé kružnici. Je-li vrchol kuželové plochy na ploše kulové, přejde tato druhá průsečná kružnice v bod a její rovina stane se rovinou tečnou k ploše kulové v tom vrcholu. Bychom tedy dostali vrcholy hledaných ploch kuželových hovících dané úloze, stačí proložiti k ploše kulové opsané nad danou kružnicí roviny tečné rovnoběžné s danou rovinou. Úloha dvojznačná.

2.

Dána rotační plocha válcová, přímka p a rovina τ rovnoběžně s povrchovými přímkami dané plochy. Stanoviti rotační plochu válcovou, jež přímku p obsahuje, roviny τ se dotýká a danou plochu půlí. Prof. *Ed. Pleva.*

Řešení zaslal p. *Holeček Václav*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.

Přetněme danou plochu válcovou, přímku p a rovinu τ rovinou π kolmo k povrchovým přímkám. Rovina ta seče plochu v kružnici k, přímku p v bodě P a rovinu τ v přímce t. Hledaná rotační plocha válcová bude se do roviny π promítati jako kružnice l, která jde bodem p, dotýká se přímky t a půlí kružnici k. Označíme-li S střed kružnice k a poloměr její r, tu všechny kružnice, jež procházejí bodem P a půlí kružnici k, tvoří svazek, jehož druhý základní bod P_1 dán vztahem $\overline{SP}.\overline{SP_1} = -r^2$. Úloha přechází v známou úlohu, sestrojiti kružnice jdoucí body P, P_1 a dotýkající se přímky t. Úloha obecně dvojznačná.

3.

Jest sestrojiti krychli, která jest dána osou třetího řádu a středem hrany s ní mimoběžné. *Boh. Starosta.*

Řešení zaslal p. *V. Ruml*, stud. VII. tř.

Středem mimoběžné hrany A položme rovinu $\varrho \perp$ k ose o, jež protíná krychli v pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$, jehož střed O je průsečík roviny ϱ s osou o. Délka $2\overline{AO}$ jest délka stěnové úhlopříčky $= a\sqrt{2}$, z čehož snadno určíme délku tělesné úhlopříčky $a\sqrt{3}$. Body A, B a jeden z koncových bodů P, Q úhlopříčky tělesné určují roviny (ABP), (ABQ), což jsou podstavné roviny dvou možných krychlí, lišících se pouze polohou. Další postup již patrný.

Nebo lze roztřetit tělesnou úhlopříčku, třetícími body vésti roviny kolmé k ose o. Sestrojíme-li v nich rovnostranné trojúhelníky o straně $2\overline{AO} = 2\overline{BO}$ tak, by jich strany byly rovnoběžny s $\overline{AB}$, obdržíme vrcholy krychle. Jelikož v jedné rovině lze sestrojiti 2 trojúhelníky vyhovující dané podmínce, jsou možny opět 2 krychle.

c) Z fysiky.

1.

Těleso vážící 1 *kg* jest připevněno na obvodu vertikálního kola, poloměru 2 *m*, které se otáčí 100krát za minutu kolem osy horizontální. Odtrhne-li se náhodně v některém místě, do jaké výšky vystoupí? Do které vzdálenosti dopadne na rovině horizontální, dva metry pod středem kola ležící? Jaká jest jeho energie v joulech? (Zrychlení zem. tíže jest 981 *cm/sec*^{2}.) *K.*

Řešení. Otáčí-li se kolo poloměru R metrů n-kráte za vteřinu, má každý obvodový bod postupnou rychlost ve směru tečné

$c = 2\pi Rn$. Místo, v němž se těleso od kola odtrhne charakterisujme úhlem φ měřeným ve směru otáčení se kola, který svírá poloměr k tělesu v okamžiku odtrhnutí vedený s poloměrem vertikálním dolů. Kolo otáčejž se na př. proti směru ručiček hodinových. Nejnižším bodem jeho proložme soustavu souřadnic pravoúhlých, osu X směrem horizontálním v pravo, osu Y vertikálně vzhůru. Rovnoběžně s nimi proložme vždy okamžitou polohou právě se odtrhujícího tělesa soustavu x, y. Souřadnice bodu odtržení jsou $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, nebo $X_0 = R \sin \varphi$, $Y_0 = R\ (1 - \cos \varphi)$. Výsledný pohyb bude zřejmě parabolický v rovině xy, resp. XY. Rozložíme-li počáteční rychlost v okamžiku odtržení na složku horizontální $c \cos \varphi$ a vertikální $c \sin \varphi$ a vzpomeneme-li účinku zemské tíže, obdržíme pro složky okamžité rychlosti v čase t hodnoty

$$v_x = c \cos \varphi \qquad v_y = c \sin \varphi - gt. \tag{1}$$

Dráha podél os x a y bude pak dána výrazy

$$x = t\,.\,c \cos \varphi \qquad y = t\,.\,c \sin \varphi - \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

čili hledaná dráha od bodu $X = 0$ $Y = 0$ patrně

$$X = R \sin \varphi + x \qquad Y = R\,(1 - \cos \varphi) + y. \tag{3}$$

Nejvyššího bodu dráhy dostoupí těleso v čase odpovídajícím $v_y = 0$, t. j. v čase $t = \frac{c}{g} \sin \varphi$, a výše, ve které se v tomto okamžiku nad osou X nachází jest

$$Y = R\ (1 - \cos \varphi) + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{2g}. \tag{4}$$

Snadno nalezneme, za kterého φ dostoupí těleso výšky maximální. Podmínkou hodnot extremních jest

$$\frac{dY}{d\varphi} = 0 = R \sin \varphi + \frac{c^2}{g} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Z hodnot φ splňujících tuto podmínku patrně $\varphi = 0$ odpovídá výstupu nejmenšímu, a φ_1

$$\cos \varphi_1 = - \frac{Rg}{c^2} = - \frac{g}{4\pi^2\, Rn^2} \tag{5}$$

výstupu největšímu. Za našich hodnot $R = 2m$, $g = 9{\cdot}81 \frac{m}{sec^2}$ $n = {}^5/_3$ byl by úhel φ_1 asi $92^0\ 33'$ a nikoli, jak na prvý pohled by se mohlo zdáti $\varphi = 90^0$. Vskutku vidíme ze (4), že výstup pro

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{jest} \quad Y_{\pi/2} = R + \frac{c^2}{2g}$$

kdežto pro $\varphi = \varphi_1$ dle (5), píšeme-li za $\sin^2 \varphi_1 = 1 - \cos^2 \varphi_1$

$$Y_{\varphi_1} = R + \frac{c^2}{2g} + \frac{R^2 g}{2c^2}.$$

V daném případě jest ovšem za $Y_{\pi/2} = 46{\cdot}70$ *m* Y_{φ_1} pouze o necelých $0{\cdot}045$ *m* větší.

Podobně obdržíme vzdálenost dopadovou X. Těleso octne se v ose X-ové, když $Y = 0$, t. j. když čas splňuje vztah

$$\frac{1}{2} gt^2 - c \sin\varphi \,.\, t - R(1 - \cos\varphi) = 0,$$

čili je li

$$t = \frac{c}{g} \sin\varphi \pm \frac{1}{g} \sqrt{c^2 \sin^2\varphi + 2gR(1 - \cos\varphi)}\,.$$

Čas záporný dává dobu před odtrhnutím tělesa, čili zpětné prodloužení paraboly dráhové k průseku s osou X. Stačí tedy vzíti u odmocniny v úvahu pouze znamení kladné. Vzdálenost dopadová jest pak

$$X = R \sin\varphi + \frac{c^2}{g} \cos\varphi \sin\varphi + \frac{c}{g} \cos\varphi \,(c^2 \sin^2\varphi + 2gR\,(1 - \cos\varphi))^{\frac{1}{2}}$$

Úhlu $\varphi = \pi$ odpovídá (záporná ovšem) vzdálenost dopadová $18{\cdot}88$ *m*, jež není největší možná. Maximální odpovídá úhlu poněkud menšímu.

Energie tělesa hmoty 1000 *gr* sestává jednak z jeho stálé energie pohybové

$$\tfrac{1}{2} mc^2 = \tfrac{1}{2}\, 1000\, gr\; 4{,}386.500\, (cm/sec)^2 = 2193{\cdot}3.10^6 \text{ erg}$$
$$= 219{\cdot}33 \text{ joule},$$

jednak z jeho energie polohové, která je největší v nejvyšším bodě dráhy, rovnajíc se tam $2\,Rmg = 2.200\; cm\; 1000\; gr\; 981\; cm/sec^2 =$

$$= 3924.10^5 \text{ erg} = 39{\cdot}24 \text{ joule}.$$

Při dopadu do roviny X-ové jeví se ovšem energie veškerá ve tvaru energie kinetické. Dopad z nejvyššího bodu kola bude se tedy vyznačovati největší rychlostí dopadovou.

2.

Platinová dutá koule vnějšího poloměru 1 *cm* jest v rovnováze, ponoří-li se celá do rtuti. Jak tlusté má stěny, je-li spec. hmota platiny 21·5, rtuti 13·5 *g/cm³*. Jak tlusté musí býti stěny, má-li do rtuti zapadati pouze polovinou svého objemu? Vztlak ve vzduchu v prvém přiblížení zanedbejte. *K.*

Řešení: Vznáší-li se koule ve rtuti, praví Archimedův zákon

$$\frac{4}{3}\pi\,[1-(1-x)^3]\,.\,21{\cdot}5=\frac{4}{3}\pi\,.\,13{\cdot}5\,.$$

Tloušťku stěny v *cm* nazvali jsme x. Výpočtem plyne

$$x=1-\sqrt[3]{\frac{16}{43}}=0{\cdot}2807\ cm.$$

Plove-li, jsouc do polovičky ponořena, platí pro tloušťku stěny y podobně

$$\frac{4}{3}\pi\,[1-(1-y)^3]\,21{\cdot}5=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\,.\,13{\cdot}5\,,$$

z čehož
$$y=0{\cdot}1180\ cm.$$

3.

Barometrická nahoře uzavřená trubice jest spodním koncem ponořena do rtuti, nad níž vyčnívá do výše 1 metru. Rtuť dosahuje v ní do výše 50 *cm*, ostatek vyplněn jest suchým vzduchem. Skloníme-li ji o 60° od vertikály, jak dlouhý bude v ní sloupec rtuťový, je-li vnější tlak barometrický neustále roven 760 *mm*? *K.*

Řešení: Budiž průřez trubice, jenž jest libovolný, roven 1 cm^2. Pak součin z objemu vzduchu $v=50\ cm^3$ v trubici vertikální a jeho tlaku $p=(76-50)\ cm=26\ cm$ rtuti jest

$$vp=50\,.\,26=1300.$$

Skloní-li se trubice o 60° od vertikály, bude mít rtuťový sloupec délku $x\ cm$ a nový objem vzduchu bude $v_1=(100-x)\ cm^3$. Nový tlak bude $p_1=(76-x\,.\cos 60^0)\ cm$ rtuti. Ježto

$$vp=v_1p_1 \quad \text{musí} \quad 1300=(100-x)\ (76-\tfrac{1}{2}\,x).$$

Z obou kořenů této kvadratické rovnice vyhovuje úloze menší $x=68{\cdot}76\ cm$.

4.

Skleněný kulový balon objemu V s válcovitou trubicí délky l a průřezu q jest naplněn vzduchem barometrického tlaku b. Obrátíme jej trubicí dolů tak, aby její spodní konec právě se dotknul hladiny rtuťové. Kolik bude vážit vzduch, který z něho unikne, zvýší-li se původní teplota 0° na t^0 Celsia a do jaké výšky vy-

stoupí rtuť, uvedeme-li zase vše na teplotu původní 0^0. Roztaživost skla zanedbejte. Vypočtěte číselné výsledky, je-li $V = 25$ litrů, $l = 100$ *cm*, $q = cm^2$, $b = 760$ *mm* a $t = 100^0$ *C*. Specif. hmota vzduchu za normálních poměrů jest 0.001293 g/cm^3.

K.

Řešení: Vzduch, jehož spec. hmota za normálních poměrů je $\sigma_0\, g/cm^3$ vyplňuje objem $v = (V + lq)\, cm^3$; má tedy hmotu $v\sigma_0$. Zvýšením teploty na $t^0 C$ klesne spec. hmota na

$$\sigma_t = \sigma_0 \frac{273}{273 + t},$$

a v témž objemu bude nyní $v\sigma_t$ gramů vzduchu, jehož tedy uniklo gramů

$$v\,(\sigma_0 - \sigma_t) = v\sigma_0 \left(1 - \frac{273}{273 + t}\right). \tag{1}$$

Zbývající vzduch, jenž vyplňuje za tlaku $p = b$ *cm* a absolutní teploty $T = 273 + t$ objem v, vyplní nový objem v_1 za tlaku $p_1 = x$ a teploty $T_1 = 273^0$. Veličiny ty spojuje stavojevná rovnice

$$\frac{vb}{T} = \frac{v_1 x}{T_1}. \tag{2}$$

Stoupne-li rtuťový sloupec v trubici průřezu $q\ cm^2$ do výše y *cm*, jest nový objem $v_1 = v - qy$ a nový tlak $x = b - y$. Dosazením do (2) obdržíme kvadratickou rovnici, z níž lze vypočísti y.

V daném konkretním případě, kde $v = 25200\ cm^3$, $b = 76$ *cm* a $q = 2\, cm^2$ obdržíme z (1) pro množství uniklého vzduchu 8·736 gramů, pro vzestup rtuti v trubici pak $y = 20{\cdot}4$ *cm*.

5.

Horizontální planparallelní skleněná deštička tloušťky 5 *mm* jest na své svrchní straně pokryta tenounkou vrstvou fotograficky citlivou a přikryta tenounkou vrstvou neprůhledného staniolu, v níž se nachází jediný hrotem jehly vpíchnutý malý otvor. Vystavíme-li deštičku diffusnímu (rozptýlenému) světlu, nalezneme po vyvolání místo malinké černé skvrny, otvoru odpovídající, ostře ohraničenou kruhovou skvrnu kolem ní.

Při druhém pokusu necháme spodní stranu deštičky dotýkati se povrchu vodního. Výsledek pokusu je podobný, jenže kroužek má větší poloměr.

Vysvětlete tento zjev a vypočtěte index lomu skla a vody, byl-li poloměr kruhové skvrny poprvé 8·7 *mm*, podruhé 18·1 *mm*.

K.

Řešení: Na otvor dopadají ve vzduchu paprsky všech směrů Po lomu do skla vyplňují kužel, jehožto poloviční úhel u vrcholu je hraničním úhlem φ úplného odrazu. Je-li n index lomu skla, jest tedy $n \, . \sin \varphi = 1$.

Po jediném (částečném) odraze na spodní ploše deštičky (tloušťky d) dopadají na citlivou vrstvu a vytvoří kroužek poloměru $r = d \, . \, tg\varphi$. Ovšem dopadají také vně kroužku na citlivou vrstvu paprsky, které se odrazily třikrát, pětkrát atd. ve vnitřku deštičky. Tyto vnitřní odrazy však světlo příliš zeslabí, takže jeho fotografický účinek je příliš nepatrný a neruší ostrost hranice kroužku. Z dat našich plyne (Valouch, logar. tabulky, tab. IV.) pro index lomu skla,

$$8{\cdot}7 = 10 \, . \, tg\varphi \quad \varphi = 41^0 \, 1{\cdot}4' \quad \sin \varphi = 0{\cdot}6564 \quad n = \frac{1}{\sin \varphi} = 1{\cdot}524.$$

Kdyby se pouze spodní strana deštičky dotýkala vody, nezměnilo by se na výsledku pokusu ničeho, leč že by fotogr. vrstva jevila slabší zčernání, ježto by se na spodní ploše skelné odráželo méně světla, větší jeho část lámala by se do vody. Byla-li podruhé fotogr. skvrna větší, znamená to, že také nad otvorem ve staniolu se nacházela byť i zcela nepatrná kapička nebo vrstvička vodní. Pak poloviční úhel ψ kužele paprskového ve skle je větší než φ, za n nastupuje relativní index n' při lomu světla z vody do skla, kterýžto splňuje s obyčejným indexem n_1 lomu vody (při přechodu světla ze vzduchu do vody) vztah $n' n_1 = n$. Máme tedy nyní

$$18{\cdot}1 = 10 \, . \, tg\psi \quad \psi = 61^0 4{\cdot}8' \quad \sin \psi = 0{\cdot}8753 \quad n' = 1{\cdot}1142$$

a pro index lomu vody $n_1 = 1{\cdot}334$.