Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

Důkaz základní věty Désarguesovy užitím deskriptivní geometrie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 42--44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109084`

Zajímavo jest, že tu platí pro sudé $n = 2\mu$

(2) $$\Delta_{2\mu+1} = 0;$$

pro liché $n = 2\mu + 1$ platí však

(3) $$\Delta_{2\mu+2} \lesseqgtr 0.$$

O tom se můžeme na zvláštních případech přímo přesvědčiti.

Na základě (1) plyne pak z (2) zajímavá identická rovnice

(4) $$\sum_{k=0}^{2\mu} (-1)^k \frac{(2\mu)^k}{k+2} K_{2\mu-k} = 0.$$

Na př. pro $2\mu = 2$ jest $K_2 = 2$, $K_1 = 3$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{2^k}{k+2} K_{2-k} = \frac{1}{2} . 2 - \frac{2^1}{3} . 3 + \frac{2^2}{4} . 1 = 0.$$

Pro $2\mu = 4$ jest $K_4 = 24$, $K_3 = 50$, $K_2 = 35$, $K_1 = 10$, $K_0 = 1$, takže

$$\sum_{k=0} (-1)^k \frac{4^k}{k+2} K_{4-k} = \frac{1}{2} . 24 - \frac{4^1}{3} . 50 + \frac{4^2}{4} . 35$$
$$- \frac{4^3}{5} . 10 + \frac{4^4}{6} . 1 = 12 - \frac{200}{3} + 140 - 128 + \frac{128}{3} = 0.$$

Pro $2\mu = 6$ jest $K_6 = 720$, $K_5 = 1764$, $K_4 = 1624$, $K_3 = 735$, $K_2 = 175$, $K_1 = 21$, $K_0 = 1$, takže

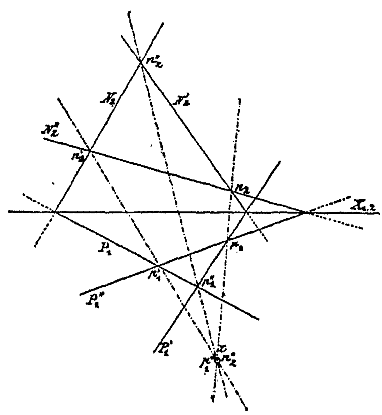
$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \frac{6^k}{k+2} K_{6-k} = \frac{1}{2} . 720 - \frac{6^1}{3} . 1764 + \frac{6^2}{4} . 1624$$
$$- \frac{6^3}{5} . 735 + \frac{6^4}{6} . 175 - \frac{6^5}{7} . 21 + \frac{6^6}{8} . 1 = 360 - 3528$$
$$+ 14616 - 31752 + 37800 - 23328 + 5832 = 0.$$

Důkaz základní věty Désarguesovy užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda, t. č. ve Štrasburku.

Jak známo, jest Désargues původcem důležité základní poučky nové geometrie, která zní: „Leží-li průsečné body k sobě příslušných stran trojúhelníků *abc*, *a'b'c'*, obsažených buď ve dvou různých rovinách nebo v téže rovině, v jediné přímce, protínají se přímky $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ v jediném bodě, a naopak". Snadno jest dokázati poučku tuto pro případ, že trojúhelníky leží v různých rovinách, uvážíme-li, že tři přímky, jež neleží v jedné rovině, z nichž ale každé dvě jsou různoběžné, musí se protínati v bodě jediném. V proslulém svém spise „Aperçu historique sur l'origine et le développement de methodes en géométrie . . .*)" ukázal Chasles, že možno řečenou větu, leží-li oba trojúhelníky v jediné rovině, dokázati přiměřenou interpretací obrazce, který vznikne, zobrazíme-li obrazem 1. a 2. vzájemné průsečnice tří rovin A, B, C, jež se protínají v bodě *x*. Chceme-li důkaz dokončiti tímto postupem,



potřebí však, jak za to mám, užiti vedle promítání orthogonalného, od něhož Chasles vychází, ještě určitého průmětu klinogonalného. Naskytla se mi kdysi potřeba vésti důkaz ten pouze na základě promítání orthogonalného. Účelem poznámky této jest ukázati, kterak jsem došel cíle.

Buďtež A, B, C tři roviny v poloze obecné, *A*, *B*, *C* přímky, v nichž se protínají na vzájem dvojice (B C), (A C), (A B) těchto rovin. Přímky *A*, *B*, *C* sekou se arci v bodě *r*, společném těmto rovinám.

---

*) Chasles-Sohncke, Geschichte der Geometrie p. 188. a 79.

Sestrojme (viz obr.) první stopnice P_1, P'_1, P''_1 těchto rovin, rovněž i druhé N_2, N'_2, N''_2. Vzájemné průsečíky p_1, p'_1, p''_1 prvých stopnic a vzájemné průsečíky n_2, n'_2, n''_2 druhých stopnic řečených rovin jsou prvními, resp. druhými stopníky přímek A, B, C. Mysleme si každou z těchto přímek rovinu kolmou k rovině totožnosti, i nabudeme tak tří rovin D, E, F. Obě stopnice takové roviny kolmé k rovině totožnosti splynou, jak známo, v čáru jedinou, jež prochází resp. tečkami p_1n_2, $p'_1n'_2$, $p''_1n''_2$. Poněvadž roviny D, E, F jsou kolmy k rovině totožnosti a obsahují bod r přímkám A, B, C společný, protnou se nutně v kolmici R z toho bodu k rovině totožnosti. Z toho následuje, že musí prvé stopy P, P', P'' míti společný bod p^0, první to stopu přímky R, druhé stopy N, N', N'' bod n^0, druhou to stopu řečené přímky. Z toho však jde na jevo, že stopnice $\overline{p_1 n_2}$, $\overline{p'_1n'_2}$, $\overline{p''_1 n''_2}$ musí se protínati v jediné tečce $x \equiv p_1^0 \equiv n_2^0$. Poznáváme tedy, že dány-li libovolné dva trojúhelníky jako $\triangle p_1p'_1p''_1$ a $\triangle n_2n'_2n''_2$, jejichž k sobě příslušné strany protínají se na přímé čáře $X_{1,2}$, přímé spojnice příslušných rohů protínají se v jediné tečce x, což bylo dokázati.

Věstník literární.

Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské. Sepsal *Karel Domin*, ředitel c. k. ústavu ku vzdělání učitelů v Příbrami. Cena 3 K 60 h, váz. 4 K. V Kutné Hoře 1899. Tiskem a nákladem Karla Šolce. 20°. O učební pomůcce nevšední zajímavosti podáváme tuto zprávu. Účelem „Arithmetiky v úlohách“ jest zopakovati a procvičiti učivo probrané na nižších středních školách a doplniti je krátkými vysvětlivkami na stupeň, žádaný na ústavech učitelských. Otázkami theoretickými probírají se základní pojmy a názvosloví, vysvětlují se početní operace, vyvozují se na příkladech poučky a pravidla, objasňují se mechanismy početní na vzorných příkladech a navádí se ke čtení výrazů, vzorců a vyvozovacích rovnic. Tam, kde učivo přesahuje látku probíranou na nižší střední škole, následuje po otázce také odpověď. Vedle této sbírky stává se učebnice téměř zbytečnou. Rozsah látky není značný, zpracování za to jest velmi důkladné. Celkový počet úloh jest 5000; výsledky jsou připojeny. Logarithmy, rovnice kvadratické, neurčité, exponencialné a goniometrické, řady a kombinatorika, veličiny pomyslné