Bohumil Bydžovský
Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 168--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109076`

Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických.

B. Bydžovský.

1. Známá vlastnost obecné kubické křivky rodu 1, vyjádřená existencí 18 kolineací, jimiž se tato křivka reprodukuje, plyne snadno z obecné teorie jednoznačných korespondencí na této křivce, zvláště když se k tomu užije eliptických funkcí;[1]) také lze k tomu užíti teorie skupin bodových na křivce.[2]) Běží-li však právě jen o kolineace kubické křivky, lze k uvedené vlastnosti dojíti cestou zcela elementární, která neopouští půdu algebraické geometrie křivek; zároveň se případy křivky harmonické a ekvianharmonické odliší od případu obecného způsobem zajímavým a jednoduchým. To je obsah tohoto článku.

2. Jestliže se daná kubická křivka rodu 1 — jež tedy je jednoduchá — reprodukuje kolineací, pak se touž kolineací reprodukuje její Hessián (jenž s ní nesplývá), druhý Hessián atd., zkrátka všechny postupné Hessiány. Jestliže řada postupných Hessiánů obsahuje alespoň dva členy různé navzájem a různé od křivky dané, obsahuje svazek syzygetický (totiž svazek kubik procházejících všemi inflexními body dané kubiky) tři prvky, které se reprodukují touto kolineací a reprodukuje se tudíž každý prvek tohoto svazku. Ježto Hessián není totožný s křivkou danou, jsou jen dvě možnosti pro to, aby křivka i s řadou Hessiánů se redukovala na dva členy:

a) Druhý Hessián je totožný s křivkou danou; tato vlastnost charakterisuje kubiku harmonickou.

b) Druhý Hessián je totožný s prvním Hessiánem, který se pak rozpadá na inflexní trojstran dané kubiky; tato vlastnost charakterisuje kubiku ekvianharmonickou.

Pro každou kubiku, jež není harmonická ani ekvianharmonická a kterou budeme nazývati stručně obecnou, platí tedy věta:

---

[1]) V. na př. *Klein-Friche:* Vorles. über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. II, str. 239—242.

[2]) V. *Enriques-Chisini:* Courbes et fonctions algébriques, str. 326.

Každá kolineace, která reprodukuje obecnou kubiku rodu jedna, reprodukuje také každou kubiku příslušného syzygetického svazku, zvláště tedy také každý inflexní trojstran této kubiky.

Vezmeme-li jeden takový trojstran za souřadný, lze vhodnou volbou jednotkového bodu dosáhnouti toho, jak známo, aby křivka byla vyjádřena rovnicí

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0 \tag{1}$$

Kolineace, která reprodukuje tuto křivku, reprodukuje také, podle věty právě vyslovené, trojici paprsků

$$x_1x_2x_3 = 0;$$

má tedy tato kolineace nutně tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 x'_h : a_2x'_i : a_3x'_k, \tag{2}$$

kde h, i, k je libovolná permutace indexů 1, 2, 3. Touto kolineací se musí reprodukovati také křivka

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0,$$

jež náleží do syzygetického svazku; z toho plyne, že koeficienty a_r jsou třetí odmocniny z jedné. Konečně, ježto se touto kolineací má reprodukovati křivka (1), kde $a \neq 0$ (jinak by to byla křivka ekvianharmonická), musí součin $a_1a_2a_3$ býti vždy roven jedné. Z toho všeho plyne:

Obecná kubická křivka rodu jedna se reprodukuje osmnácti kolineacemi; je-li křivka dána rovnicí (1), jsou tyto kolineace vyjádřeny rovnicemi

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_h : x'_i : x'_k$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_h : \alpha x'_i : \alpha^2 x'_k$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_h : \alpha^2 x'_i : \alpha x'_k,$$

kde h, i, k je libovolná permutace indexů 1, 2, 3.

Při tom α je imaginární třetí odmocnina z jedné.

3. Je-li kubická křivka ekvianharmonická a zvolíme-li její inflexní trojstran, jenž je zároveň Hessiánem, za souřadný, je vyjádřena rovnicí

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Každá kolineace, jež tuto křivku reprodukuje, reprodukuje tudíž také trojici os souřadných a má proto tvar (2), při čemž koeficienty a_r jsou, jak plyne z úvahy předch. odst., třetí odmocniny z jedné. Je tedy dokázána věta:

Ekvianharmonická křivka kubická reprodukuje se 54 kolineacemi

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_h : \alpha^m x'_i : \alpha^n x'_k,$$

kde h, i, k je libovolná permutace indexů 1, 2, 3 a $m, n = 0, 1, 2$.

4. Zbývá případ kubické křivky harmonické. Ježto teorie této křivky je celkem málo běžná, odvoďme její rovnici podrobně. Hessián křivky dané rovnicí

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0$$

má rovnici

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a'x_1x_2x_3 = 0,$$

kde

$$6a' = -(1 + 2a^3) : a^2.$$

Hessián této křivky je pak obdobně

$$a'^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (1 + 2a'^3)\, x_1x_2x_3 = 0$$

a podmínka pro křivku harmonickou tedy zní

$$-(1 + 2a'^3) : a'^2 = 6a.$$

Dosadíme-li sem za a' a upravíme, dostaneme pro a rovnici

$$64a^9 + 168a^6 + 12a^3 - 1 = 0. \qquad (3)$$

Některé kořeny této rovnice můžeme ihned udati. Neboť křivka, která splyne se svým prvním Hessiánem, splyne také se svým druhým Hessiánem; řešením rovnice (3) musí se tedy dostati také křivky totožné se svým Hessiánem; pro ty platí, jak se snadno nalezne,

$$8a^3 + 1 = 0.$$

Levá strana rovnice (3) je tedy dělitelná levou stranou rovnice právě napsané; po dělení dostaneme rovnici

$$8a^6 + 20a^3 - 1 = 0$$

jako vlastní podmínku pro křivku harmonickou. Řešení této rovnice dá

$$a = (\pm \sqrt{3} - 1)\, \alpha_i : 2,$$

kde α_i znamená kteroukoli třetí odmocninu z jedné. Je tedy rovnice harmonické kubiky na př.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\,(\sqrt{3} - 1)\, x_1x_2x_3 = 0. \qquad (4)$$

Jestliže se tato křivka reprodukuje nějakou kolineací, reprodukuje se jí také její Hessián, což je zřejmě také křivka harmonická. Jestliže se touto kolineací reprodukuje ještě další křivka syzygetického svazku, reprodukuje se každá a tedy také inflexní trojstran

$$x_1x_2x_3 = 0.$$

Ale taková kolineace je nutně jedna z 18 nalezených v odst. 2. Jestliže tedy existuje další kolineace, jíž se harmonická křivka reprodukuje, nemůže se jí reprodukovati inflexní trojstran právě uvedený, nýbrž tento inflexní trojstran musí se převáděti v jiný inflexní trojstran. Snadno se shledá, že jiný inflexní trojstran je dán rovnicí

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 0$$

čili, rozložíme-li tuto rovnici,

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) = 0$$

a je tedy nasnadě, zkoumati kolineaci

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ x_2 &= x'_1 + \alpha x'_2 + \alpha^2 x'_3 \\ x_3 &= x'_1 + \alpha^2 x'_2 + \alpha x'_3. \end{aligned}$$

Jednoduchým výpočtem, který ponechávám čtenáři, potvrdí se, že touto kolineací se křivka (4) reprodukuje. Takových kolineací je pak 18. Neboť uvažované inflexní trojstrany jsou libovolné, a co platí pro ně, platí pro jeden z nich a libovolný další; zároveň lze jeden inflexní trojstran převésti kolineací ve druhý šesti způsoby, jak čtenář snadno uváží.

Čtverec kolineace výše napsané je

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_3 : x'_2,$$

t. j. involuce, náležející mezi 18 kolineací odst. 2; je tedy uvažovaná kolineace kvaternárně cyklická.

Výsledek této úvahy můžeme tedy vyjádřiti větou:

Harmonická křivka kubická reprodukuje se celkem 36 kolineacemi.

*

Les homographies reproduisant la cubique harmonique et la cubique équianharmonique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une démonstration élémentaire, ne sortant pas du domaine algébrique, du fait connu que la cubique plane générale se reproduit par 18 homographies, ce nombre augmentant respectivement de 18 ou 36, si la courbe est harmonique ou équianharmonique.