Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

Ke konstrukci pseudonormál z bodu ke kuželosečce

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 156--167

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109074`

Ke konstrukci pseudonormál z bodu ke kuželosečce.

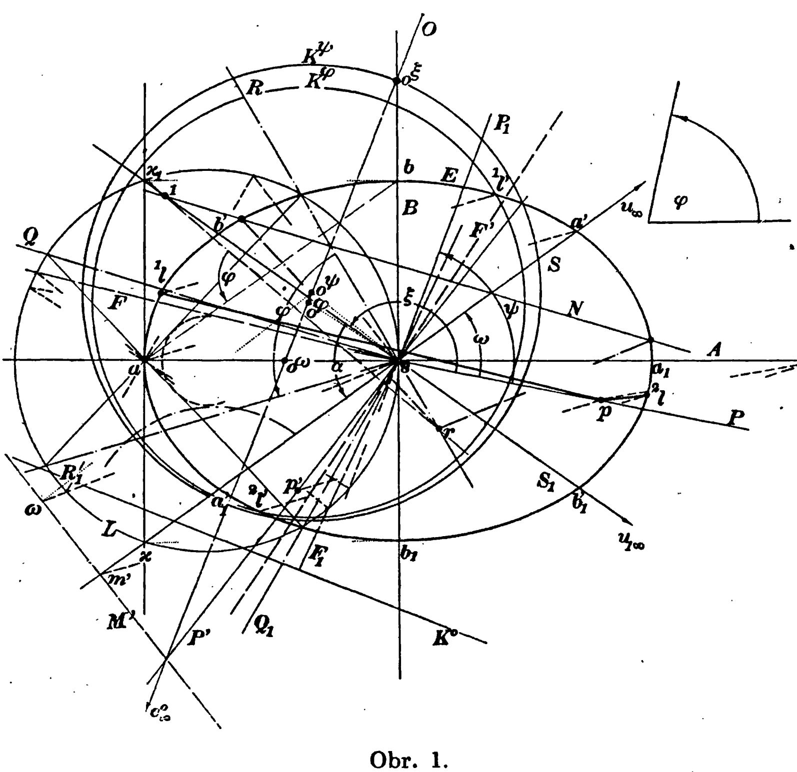
Dr. *Josef Klíma*, prof. č. techn. v Brně.

V LVIII. roč. t. časopisu udává Dr. *Kounovský* konstrukce pseudonormál, t. j. přímek protínajících kuželosečku pod určitým úhlem, jež procházejí daným bodem. O tomto zobecnění problému normál zmiňuje se již *Chasles* ve svém spise „*Traité des sections coniques*“ r. 1865, str. 142. Roku 1919 v Nouvelles annalles de mathématiques podává *Bouvaist* v článku „*Sur les droites coupant une conique sous un angle donné*“ řadu vět o pseudonormálách kuželosečky, z nichž mnohé jsou obdobny známým větám o normálách kuželosečky. Je zajímavo, že pro pseudonormály dostáváme zcela obdobné konstrukce jako při normálách. Chci v následujícím ukázati metodami prof. *Pelze* a *Sobotky* řešení pseudonormál z bodu k elipse, hyperbole a parabole, jakož i určiti místa bodů, pro něž úloha stává se kvadratickou. Úhel dvou přímek měřme v dalším vždy v kladném smyslu a budiž $< \pi$.

1. Buď v obr. 1 dána *elipsa* E osami $\overline{a\,a_1}$, $\overline{b\,b_1}$ a úhel φ smyslu kladného. Bylo by sestrojiti bodem p přímky, které protínají elipsu E pod úhlem φ, nebo jak stručněji těmto říkáme φ-pseudonormály. Paty těchto φ-pseudonormál jsou na kuželosečce Φ, jež je geometrickým místem průsečíku libovolného průměru elipsy s φ-pseudonormálou spuštěnou z bodu p na sdružený průměr. V elipse E jsou obecně dva páry sdružených průměrů $R\,R_1$, $Q\,Q_1$, jichž úhel je φ. Budiž α ostrý úhel stejně dlouhých sdružených průměrů S, S_1 elipsy E a $\varkappa$, $\varkappa_1$ průsečíky těchto průměrů s tečnou ve vrcholu a elipsy ($\overline{\varkappa a} = \overline{a \varkappa_1} = b$). Eliptickou involuci sdružených průměrů přeneseme v eliptickou involuci na kružnici L, jdoucí středem s elipsy a body $\varkappa$, $\varkappa_1$ a tudíž střed involuce je ve vrcholu a. Bodem a procházejí dvě tětivy kružnice L, souměrně položené k ose $A \equiv \overline{a\,a_1}$, k nimž v kružnici této patří středový úhel φ a jež na L vytínají body sdružených průměrů $R\,R_1$, $Q\,Q_1$. Průměry tyto jsou reálné, je-li $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, pro $\varphi = \alpha$, nebo $\varphi = \pi - \alpha$ splývají s $S\,S_1$, pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ splývají s osami elipsy, jinak jsou imaginární. Na průměrech R a Q dostáváme pro Φ úběžné body,

kdežto na R_1 a Q_1 jsou úběžné body kuželosečky Φ' pro $(\pi - \varphi)$-pseudonormály.

Chceme-li sestrojovati φ-pseudonormály elipsy E, lze to provésti snadno z bodů průměrů R nebo Q, ježto příslušná kuželosečka Φ rozpadá se na př. pro bod r na R v tento průměr R a přímku N rovnoběžnou s Q, jejíž bod lze dostati v průsečíku 1 průměru S_1 s φ-pseudonormálou spuštěnou z r na S nebo na $\overline{ab}$. Pro normály



Obr. 1.

splyne R s osou A nebo B elipsy E a dostáváme d'Ocagnes-ovu konstrukci normál elipsy.[1])

Ježto pól spojnice druhých průsečíků průměrů R a Q s kružnicí L mimo bod s vzhledem ke kružnici L je na $\overline{\varkappa\varkappa_1}$, patrno, že všechny kuželosečky Φ pro všechna φ a p mají úběžné body u_∞, $u_{1\infty}$ průměrů S, S_1 za pár konjugovaných bodů. Kuželosečky Φ tvoří trojmocnou soustavu kuželoseček, jež jdou středem s a mají

[1]) Obsažena v II. díle jeho spisu „Cours de géométrie" r. 1918, str. 78.

u_∞, $u_{1\infty}$ za pár konjugovaných bodů. Ke zvolenému bodu p přísluší ∞^1 kuželoseček Φ, jež odpovídají ∞^1 hodnotám úhlu φ od 0 do π. Těchto ∞^1 kuželoseček tvoří svazek, jehož základní body určíme takto. Dva jsou patrně v bodech p a s. Zbývající dva jsou sdruženě imaginární a dostaneme je následovně. Svazek paprskový o středu p a s ním shodný svazek paprskový vzniklý z prvého otočením o úhel φ kol p, jsou projektivní a jich samodružné paprsky jsou v minimálních přímkách I a ^1I jdoucí bodem p, nechť φ je jakékoliv. Sdružené průměry k průměrům elipsy E, jež jsou rovnoběžny s minimálními přímkami I resp. ^1I, protínají I resp. ^1I v bodě q^i resp. $^1q^i$, jež jsou dalšími imag. základními body svazku kuželoseček Φ, příslušných k bodu p pro různá φ.

Buď P_1 sdružený průměr k průměru $P \equiv \overline{sp}$ v elipse E. Je-li $\sphericalangle P P_1 = \psi$, tu kuželosečka Φ bodu p pro ψ-pseudonormály rozpadá se patrně v přímku P spojující základní body p, s a v přímku M, jež je rovnoběžna s průměrem harmonicky sdruženým k P vzhledem k páru S, S_1 a která obsahuje imag. sdružené základní body q^i, $^1q^i$. Eliptická involuce, jež určuje na M tyto body, promítá se z bodu p pravými úhly. Jeden bod m přímky M je v průsečíku osy A s ψ-pseudonormálou z p k ose B. V obr. přímka M nerýsována.

Každá kuželosečka Φ patřící k bodu p určuje s elipsou E svazek, kterýžto ale neobsahuje kružnici, ježto samodružné body involuce vyťaté svazkem (Φ E) na úběžné přímce jsou v úběžných bodech u_∞, $^1u_\infty$ průměrů S, S_1. Svazek (Φ E) podle *Pelze*[2]) lze involutorní afinitou, při níž elipsa E je invariantní, převésti ve svazek, který obsahuje kružnici. Třeba jen v této involutorní afinitě k některému vrcholu a elipsy E přidružiti některý koncový bod na př. a' průměru S nebo S_1. Kuželosečka Φ přejde v kuželosečku Φ', jež s E určuje svazek, který na úběžné přímce vytíná involuci o samodružných bodech v úběžných bodech os A a B a který obsahuje tudíž kružnici K. Kuželosečky Φ pro všechna φ bodu p přejdou tím ve svazek kuželoseček Φ', jehož dva reálné body základní jsou ve středu s a bodu p' odpovídajícím bodu p, který je na afinně příslušném průměru P' k $P \equiv \overline{sp}$ a další dva základní body svazku jsou v imag. sdruž. bodech odpovídajících bodům ^iq, $^1q^i$. Kuželosečky Φ' svazku vytínají na E čtveřiny bodové bikvadratické involuce, jež vždy jsou na kružnici K a tudíž tyto kružnice K tvoří též svazek (K). Pro svazek (K) lze nejprve určiti onu kružnici, jež rozpadá se v přímku, obsahující imaginární základní body svazku (Φ'). Tato přímka uvažovaná jako kružnice, má za druhou část úběžnou přímku a tedy příslušná k ní kuželosečka Φ protíná elipsu E v úběž-

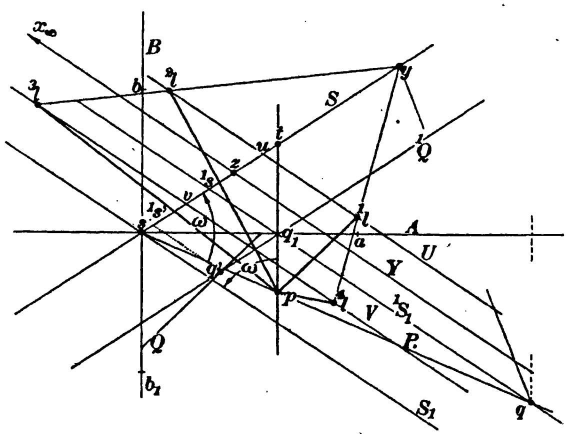
[2]) „Zum Normalenproblem einer vollständig gezeichneten Ellipse" Sitzungsberichte der Akademie in Wien roku 1887.

ných jejích bodech a tudíž náleží úhlu $\varphi = 0$. Přímka ta K^0 je polárou bodu p' k elipse E. Dále lze určiti kružnici K^ψ, příslušející úhlu ψ, ježto prochází průsečíky průměru P' a přímky M', s elipsou E. Přímka M' obsahuje bod m' na S, který odpovídá v afinitě bodu m na ose A a je antiparalelní k P' vzhledem k ose A. Průsečíky přímky M' s elipsou E jsou v obr. imaginární, ale půlicí bod jejich vzdálenosti je v průsečíku ω přímky M' s průměrem sdruženým k směru M' v elipse E. Je tedy střed o^ψ kružnice K^ψ v průsečíku kolmice v ω k M' s kolmicí ve středu s k P', kružnice sama tím určena, ježto prochází vždy reálnými průsečíky elipsy E s průměrem P'. Tím svazek (K) kružnic určen. Středy kružnic jsou na přímce O, jdoucí bodem o^ψ kolmo na K^0. Střed o^φ kružnice K^φ patřící k úhlu φ určíme takto. Kuželosečka Φ řešící problém φ-pseudonormál pro bod p, má v bodě s za tečnu průměr F elipsy E sdružený k průměru F_1, svírajícímu s P úhel φ ($\sphericalangle PF_1 = \varphi$). Tato tečna F přejde afinitou v průměr F', který musí kružnice K^φ protínati v bodech souměrně položených k s. Střed o^φ je tedy na kolmici vztyčené ve středu s k průměru F'. Kružnice K^φ náleží svazku $(K^\varphi K^\psi)$ a lze ji již snadno určiti. Průsečíky ${}^k1'$ ($k = 1, \ldots, 4$) kružnice K^φ s E odpovídají afinně patám ${}^k1$ ($k = 1, \ldots, 4$) φ-pseudonormál z p k elipse E. Je patrno, že řada středů o^φ na O je projektivní s jakýmkoliv paprskovým svazkem, při čemž úběžnému bodu o_∞ řady odpovídá libovolný paprsek svazku a bod o^φ odpovídá paprsku svírajícímu s prvým úhel φ ovšem v kladném smyslu. Průsečík o^ω (o^ξ) středné O s osou A (B) odpovídá úhlu ω (ξ), jejž svírá průměr P s průměrem S (S_1). Pro tyto úhly ω a ξ je úloha pseudonormál pro bod p kvadratickou. Úloha je samozřejmě kvadratickou též pro úhly 0 a ψ. Výsledek tento, jehož zvláštním případem je ten, který *Pelz* dostal pro normály elipsy, lze obdržeti ještě jinak podle obr. 2.

Budiž vše označeno stejně jako v obr. 1 a mějme z bodu p sestrojiti ω-pseudonormály k elipse dané osami $\overline{a\,a_1}$, $\overline{b\,b_1}$, je-li $\omega = \widehat{psS}$. Ježto S a S_1 udávají směry páru sdružených průměrů pro každou kuželosečku Φ a ježto střed s elipsy E je též bodem kuželosečky, je střed ${}^1s$ této v půlicím bodě úsečky spojující průsečíky průměrů S, S_1 s Φ mimo s. Průsečíky ty jsou na φ-pseudonormálách spuštěných z p na S resp. S_1[3]). Jestliže tedy v obr. 2 z p spustíme ω-pseudonormálu na S_1, vytne nám tato na S bod t a půlicí bod ${}^1s$ průměru $\overline{s\,t}$ je středem kuželosečky Ω. Tečna k Ω v s je v S_1 a proto Ω má k průměru S sdružený průměr ${}^1S_1 \parallel S_1$. Pro společný trojúhelník polární $x\,y\,z$ kuželoseček Ω a E známe jeden vrchol v úběžném bodě x průměru ${}^1S_1$ a protější stranu $\overline{yz} \equiv S$

[3]) Výsledek ten uvádí též *Bouvaist* v textu cit. pojednání.

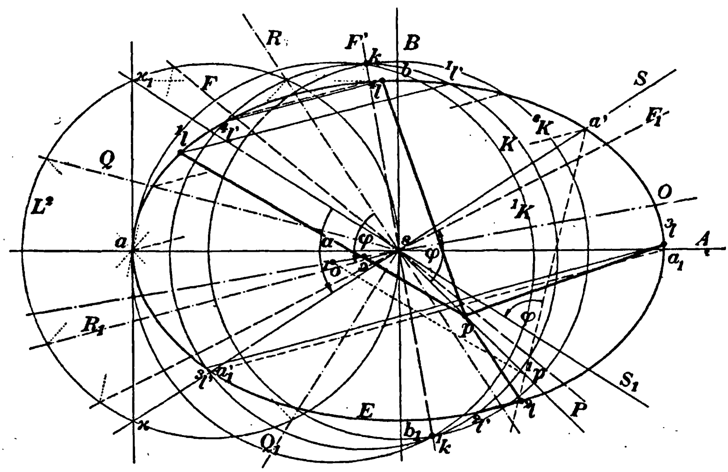
a tedy konstrukce průsečíků ${}^{k}l$ ($k = 1, \dots 4$) obou kuželoseček je kvadratickou. Body $q \equiv ({}^{1}S_1, \overline{sp})$ a $q_1 \equiv ({}^{1}S_1, \overline{pt})$ jsou sdruženými vzhledem k Ω a tedy konjugovaný bod ku q vzhledem k svazku $(E\Omega)$ je v průsečíku poláry ${}^{1}Q \parallel S$ k Ω s polárou Q bodu q k E. Průměty ${}^{1}s$, ${}^{1}s'$ bodů q, q' směrem S_1, jsou jedním a body y, z druhým párem involuce, jejímiž samodružnými body u, v procházejí tětivy $U \equiv \overline{{}^{1}l\,{}^{2}l}$, $V \equiv \overline{{}^{3}l\,{}^{4}l}$ společné svazku (ΩE), jež jdou vrcholem x_∞. Průsečíky těchto tětiv s E určí se kvadraticky, třeba, je-li y a z reálné, tím, že stanovíme společné tětivy svazku, jdoucí vrcholem y.



Obr. 2.

Body ${}^{3}l$, ${}^{4}l$ jsou též samodružnými body involuce na V o středu v a páru $(V, \overline{sp}), (V, \overline{pt})$. Probíhá-li bod p průměr $P \equiv \overline{sp}$, budou příslušné kuželosečky Ω probíhati projektivní svazek a páry U, V projektivní paprskovou involuci, která na S vytíná involuci o středu s a páru u, v, jak patrno pro p v úběžném bodě průměru P.

Jsou-li v obecném případě, vyznačeném v obr. 1, sdružené průměry RR_1, QQ_1, svírající úhel φ, reálné, možno při řešení postupovati ještě jinak. Budeme-li pro totéž φ uvažovati problém ten pro všechny body p průměru $P \equiv \overline{sp}$, tu příslušné kuželosečky Φ tvoří svazek, jehož dva základní body jsou v úběžných bodech průměrů R a Q a svazek dotýká se v s téže přímky F, průměru to sdruženého k průměru F_1, kde $\sphericalangle PF_1 = \varphi$. V invol. afinitě, dříve určené, bude svazku tomu odpovídati opět svazek kuželoseček Φ', který na elipse E vytíná bikvadratickou involuci, jež je vyťata na elipse též svazkem kružnic K, jejichž středy jsou na přímce O (obr 3), kolmé v s k průměru F', odpovídajícímu průměru F. Průměr F' s úběžnou přímkou je rozpadající se kružnicí svazku, jež přísluší k úběžnému bodu p přímky P. Splyne-li p se středem s, jsou paty příslušných φ-pseudonormál v průsečících E s průměry R a Q a tudíž příslušná kružnice ${}^sK$ má střed s a jeden její bod určí se v odpovídajícím bodě, na př. k průsečíku $(E\ Q)$ v invol. afinitě. Kružnice ${}^sK$ protíná F' v zákl. bodech k, ${}^1k$ svazku. Řada bodů p na P je s řadou středů kružnic K na O projektivní a ježto si odpovídají jejich úběžné body a průsečík s je samodružným, musí spojnice odpovídajících bodů p a o býti rovnoběžny. Sestrojíme-li si ještě jeden pár sdružených bodů obou řad, lze snadno již pak

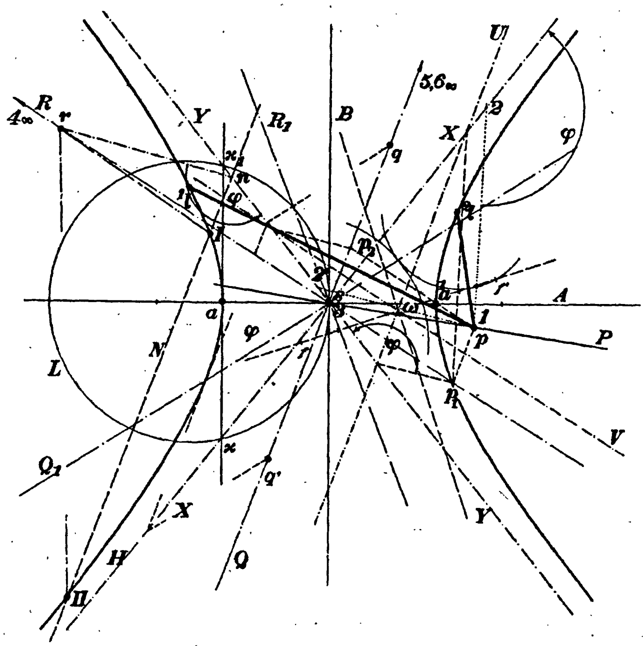


Obr. 3.

řešiti problém φ-pseudonormál pro všechny body průměru P. Na př. sestrojme v průsečíku a' průměru S s elipsou E φ-pseudonormálu, až protne P v bodě ${}^1p$, pak tomuto odpovídá střed ${}^1o$ kružnice ${}^1K$ procházející body k, ${}^1k$, a. Pro libovolný bod p na P je pak $po \parallel {}^1p{}^1o$ a kružnice K o středu o a jdoucí body k, ${}^1k$ vytíná na E body, jež afinně přísluší hledaným patám.

V případě, kdy úhel φ je $< \alpha$, nebo $> \pi - \alpha$, je-li α ostrý úhel průměrů S, S_1, tu kuželosečky Φ jsou elipsy a jejich úběžné body dány involucí, jejímž jedním párem jsou úběžné body průměrů S, S_1 a druhý pár je v úběžných bodech společných směrů os všech Φ, jež svírají s osami elipsy E úhly $\frac{1}{2}\varphi$ a $\frac{1}{2}(\pi + \varphi)$. Předchozí řešení bylo by možno užíti i v tomto případě, jen místo reálných přímek R, Q třeba vzíti samodružné paprsky eliptické involuce, jíž se promítá z s involuce, určující společné úběžné body kuželoseček Φ.

II. Mějmež v obr. 4 *hyperbolu* H a uvažujme o problému φ-pseudonormál z bodu p. Zde souměrný pár S, S_1 je imaginární. Involuci sdružených průměrů hyperboly protněme kružnicí L, procházející středem s hyperboly a průsečíky $\varkappa$, $\varkappa_1$ asymptot X, Y s tečnou ve vrcholu a. Pro každý úhel $\varphi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ existují vždy dva páry RR_1, QQ_1 sdružených průměrů svírajících úhel φ, jen pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ je jeden pár, a to osy A, B hyperboly. Průměry R a Q



Obr. 4.

udávají směr asymptot kuželosečky Φ jsou vždy reálné a pro různá φ tvoří na kružnici L eliptickou involuci o středu a. Všechny kuželosečky Φ jsou tu hyperbolami a specielně, je-li H rovnoosou hyperbolou, též rovnoosými hyperbolami. Problém φ-pseudonormál je tu opět pro body průměrů R a Q kvadratickým, ježto příslušná hyperbola Φ rozpadá se v R resp. Q a v druhou přímku N rovnoběžnou s Q resp. R. Chceme-li tedy na př. z libovolného bodu r průměru R vésti φ-pseudonormály, sestrojíme patu n φ-pseudonormály z r na jednu asymptotu na př. Y a jí jde přímka $N \parallel Q$, jež na H dává paty I, II φ-pseudonormál z r k H sestrojených. Pro normály ($\varphi = \frac{1}{2}\pi$) jsou R a Q totožny s osami A, B a dostáváme známé konstrukce normál hyperboly z bodů jejích os. Hyperboly

H a Φ určují svazek, v němž je též rovnoosá hyperbola o asymptotách rovnoběžných s osami A, B. Ježto zde souměrný pár sdruž. průměrů je imaginární, nelze zde užíti involutorní afinity jako při elipse, jež by svazek $(H\Phi)$ převáděla ve svazek $(H\Phi')$, který by obsahoval kružnici. Asymptoty U a V hyperboly Φ lze určiti jednoduše konstrukcí, jež je zobecněním oné, již prof. Dr. *Sobotka*[4]) podává pro problém normál.

Další dva body pro hyperbolu Φ dostáváme v patách 2 a $2'$ pseudonormál spuštěných z p na asymptoty X a Y hyperboly H. Užijeme-li věty Pascalovy k sestrojení asymptoty, uvažujíce body p, 2 $(2')$, s a úběžné body směrů R a Q na hyperbole Φ, podle očíslování v obr., dostaneme následující konstrukci asymptot U a V. Bodem p sestrojíme rovnoběžky s Q resp. R až k průsečíkům p_1 resp. p_2 s R resp. Q. Asymptoty U a V spojují paty φ-pseudonormál spuštěných z p_1 resp. p_2 na asymptoty X a Y hyperboly H. Je-li H rovnoosou hyperbolou, tu střed ω hyperboly Φ půlí úsečku sp, ježto tečny v s a p k Φ jsou v tom případě spolu rovnoběžny. Paty ${}^k1$ $(k = 1, \ldots, 4)$ φ-pseudonormál jsou v průsečících hyperbol H a Φ, jež lze dostati podle Hjelmsleva[5]), aniž hyperbolu Φ rýsujeme.

Mimo body průměrů R, Q a úběžné přímky není zde reálných bodů p, pro něž problém tento je kvadratickým, je-li $\varphi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$. V případě normál dovodil prof. *Sobotka* synteticky v již citovaném pojednání výsledek Lauermannův, že v případě hyperboly jsou dvě přímky rovnoběžné s hlavní osou hyperboly ve vzdálenosti $\pm e^2/b$ od této, pro jejichž body problém normál je kvadratický. Pro obecné φ není těchto přímek, ježto musil by, podle Sobotkova důkazu, průměr Q_1 splynouti s R, což je jen při $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Mají totiž poláry koncového bodu q imag. průměru Q hyperboly H vzhledem k H i Φ splynouti. Obě sice jdou druhým koncovým bodem q' průměru Q, ale prvá je rovnoběžna s Q_1 a druhá s R.

III. Budiž konečně řešiti problém φ-pseudonormál *paraboly* P (obr. 5.) pro libovolný bod p. Jedna z φ-pseudonormál prochází zde úběžným bodem $a_{1\infty}$ paraboly a zbývající tři mají paty ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$. Sestrojme v parabole průměr R, který svírá se sdruženými tětivami úhel φ. Tento protne parabolu v bodě r, a je-li R_1 tečna v tomto bodě, tu $\sphericalangle\, RR_1 = \varphi$. V souměrně položeném bodě q k r vzhledem k ose paraboly je tečna Q a tato svírá se sdruženým průměrem Q_1 úhel φ. Pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jsou podle věty Joachimsthalovy paty ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$ normál vedených z libovolného bodu k parabole na kružnici, jež prochází též vrcholem paraboly. Zde lze pak dokázati větu:

„Paty ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$ tří φ-pseudonormál, vedených k parabole z libo-

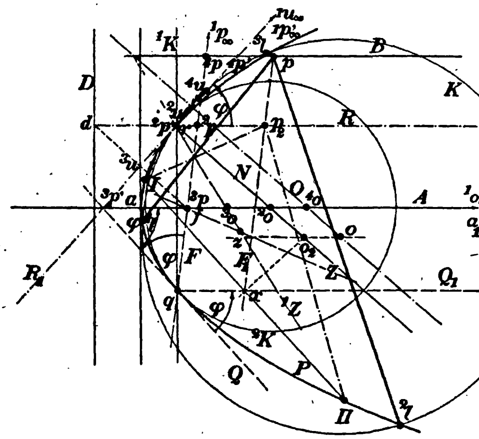
[4]) V pojednání „Zu den quadratischen Lösungen des Normalenproblems von Kegelschnitten" Věstník Král. č. společ. nauk, roč. 1903 č. 7, str. 3.

[5]) „Geometrische Experimente" r. 1915, str. 5.

volného bodu p, jsou s bodem r paraboly, jehož průměr svírá se směrem sdružených tětiv úhel φ, na téže kružnici.“

Paty ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$ jsou též, jak z úvah dřívějších vyplývá, na hyperbole Φ, jež má za jednu asymptotu průměr R a druhou rovnoběžnu s tečnou Q. Označíme-li parametry pat těch λ_1, λ_2, λ_3, parametry bodů r, q, a, $a_{1\infty}$ písmeny ϱ, $\varkappa$, α, α_1, tu platí[6])

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha_1} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha_1} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha_1} - \frac{1}{\varrho - \alpha_1} = \frac{2}{\varkappa - \alpha_1}$$



Obr. 5.

Ježto pak vrchol a je harmonicky sdružen k $a_{1\infty}$ vzhledem k bodům r a q, je

$$\frac{2}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha_1 - \varrho} + \frac{1}{\alpha_1 - \varkappa}.$$

Vyloučením $\varkappa$ z obou rovnic dostáváme vztah

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha_1} + \frac{1}{\lambda_2 - \alpha_1} + \frac{1}{\lambda_3 - \alpha_1} + \frac{1}{\varrho - \alpha_1} = \frac{4}{\alpha - \alpha_1},$$

který vyjadřuje, že body ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$, r jsou na téže kružnici K.[7])

Probíhá-li bod p libovolnou přímku L, tu příslušné trojice ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$ φ-pseudonormál tvoří na parabole P kubickou involuci, jež je na parabole též vyťata svazkem kružnic K, jehož jedním základním bodem je bod r. Řada bodů p na L je podobna s řadou příslušných středů kružnic, ježto odpovídají si jich úběžné body.

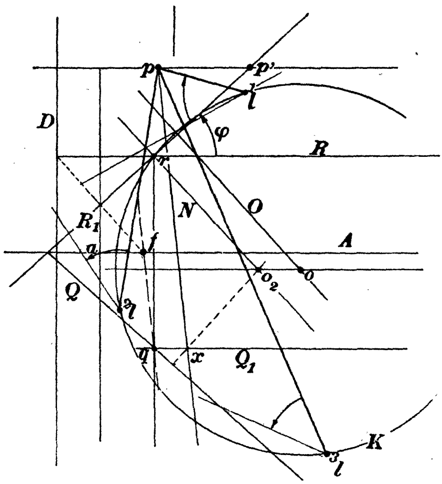
[6]) *Michel:* „Compléments de géométrie moderne“, 1926, str. 13.
[7]) Tamtéž str. 16.

∞^2 bodům p odpovídá tak ∞^2 kružnic K, jež jdou bodem r a naopak. Jak k libovolnému bodu p určíme příslušný střed o kružnice K?

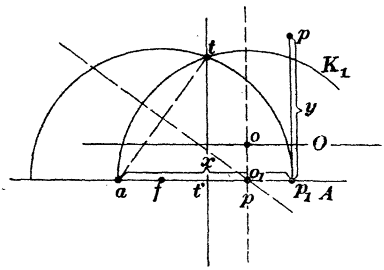
Spojnice F bodu q, souměrně položeného k bodu r na parabole, s ohniskem f paraboly, je patrně φ-pseudonormálou paraboly v bodě q. Probíhá-li tudíž bod p tuto přímku F, budou příslušné kružnice K procházeti body r a q a tedy jejich středy o probíhají na ose A paraboly podobnou řadu. Úběžnému bodu ${}^1p_\infty$ přímky F odpovídá kružnice, rozpadající se v přímku ${}^1K \equiv \overline{rq}$ a úběžnou přímku a příslušný střed ${}^1o$ je úběžným bodem osy A paraboly. Bodu ${}^2p \equiv (F\,R)$ odpovídá kružnice dotýkající se paraboly P v bodech r a q a tedy příslušný střed ${}^2o$ je v průsečíku normály N paraboly v bodě r s osou A. Pro bod ${}^3p \equiv f$ příslušné φ-pseudonormály mimo F jsou v minimálních přímkách, procházejících bodem f a jejich paty jsou na řídicí přímce D paraboly. Označíme-li průsečík $(D\,R) \equiv d$, tu vzhledem k $\overline{rd} = \overline{rf}$, je též pata ${}^3u$ kolmice z f na tečnu R_1, bodem kružnice ${}^3K$ a proto střed ${}^3o$ této je na ose souměrnosti úsečky $\overline{{}^3ur}$. Řada F bodů ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p \ldots$ je též podobnou se soumístnou řadou ${}^1u_\infty$, ${}^2u \equiv r$, ${}^3u \ldots$ průsečíků kružnic ${}^1K$, ${}^2K$, ${}^3K, \ldots$, jež tyto mají mimo r společné s tečnou R_1. Promítněme směrem R řadu F (${}^1p\ {}^2p\ {}^3p \ldots$) na tečnu R_1 do řady ${}^1p'$, ${}^2p'$, ${}^3p', \ldots$, jež je podobnou s řadou ${}^1u_\infty$, ${}^2u$, ${}^3u, \ldots$ a majíce samodružný bod $r \equiv {}^2u \equiv {}^2p'$ je poměr podobnosti $\overline{r^3u} : \overline{r^3p'} = 1 : 2$. Zvolíme-li tudíž na F libovolný bod ${}^4p$, bude příslušná kružnice ${}^4K$, mimo r, procházeti ještě půlicím bodem ${}^4u$ úsečky omezené na tečně R_1 bodem r a průsečíkem ${}^4p'$ přímky $B \parallel R$ bodem ${}^4p$.

Probíhá-li bod p přímku $B \parallel A$, pak kružnice K tvoří svazek, jehož jeden základní bod je r a druhý ${}^4u$, na tečně R_1 v bodě r, půlí vzdálenost bodu r od průsečíku $(B\,R_1)$. Úběžnému bodu přímky B odpovídající kružnice K rozpadá se totiž v tečnu R_1 a úběžnou přímku a kružnice, odpovídající průsečíku ${}^4p \equiv (F\,B)$, jde bodem ${}^4u$. Střed kružnice K příslušející libovolnému bodu p přímky B, je na ose O úsečky $\overline{r\,{}^4u}$. Abychom určili druhé místo pro střed o kružnice K k bodu p, veďme bodem p přímku $F_1 \parallel F$. Bodům této přímky odpovídají kružnice, jejichž středy vyplňují patrně přímku rovnoběžnou s osou A, ježto druhý základní bod je na dříve určené přímce ${}^1K \perp A$. Paty I, II φ-pseudonormál z průsečíků $p_2 \equiv (F_1\,R)$ jsou na přímce jdoucí průsečíkem $x \equiv (Q_1F_1)$ rovnoběžně s Q, ježto příslušná hyperbola Φ, rozpadá se v R a tuto přímku $\overline{I\,II}$. Musí tudíž střed o_2 kružnice patřící k p_2 býti na $\overline{o_2\,x} \perp Q$ a na normále N bodu r. Přímka jdoucí bodem o_2 rovnoběžně s osou paraboly určuje na O střed o kružnice K, příslušné k bodu p. Vynecháme-li vše zbytečné, dostáváme následující konstrukci středu o, patřící k bodu p (obr. 6).

Bodem p sestrojíme $\overline{pp'} \parallel A$ až k průsečíku p' s R_1. Kolmice O vztyčená k R_1 v prvé čtvrtině od r úsečky $\overline{rp'}$ je jedna přímka jdoucí středem o. Bodem p proložíme $\overline{px} \parallel \overline{qf}$, v jejímž průsečíku x s Q_1 sestrojená kolmice ke Q protne normálu N bodu r v bodě o_2 a tu je $\overline{o_2 o} \parallel A$. Z konstrukce též patrno, jak zvratnou konstrukcí od bodu o dospějeme k příslušnému bodu p. Paty ${}^1l$, ${}^2l$, ${}^3l$ lze opět dostati podle Hjelmsleva, aniž parabolu rýsujeme.



Obr. 6.



Obr. 7.

Konstrukce této, v druhé její části, nelze užíti pro normály ($\varphi = \frac{1}{2}\pi$). V tom případě (obr. 7), jsou-li x, y souřadnice bodu p vzhledem k vrcholu a a ose $X \equiv A$, je střed o na přímce $O \parallel A$, jež má od osy A vzdálenost $\frac{1}{4}y$. Abychom určili úsečku bodu o, mysleme si, že bod p probíhá přímku $\overline{pp_1} \perp A$, tu příslušné středy o vyplňují též přímku kolmou k ose A. Přejde-li p do p_1 na A, příslušná kružnice K prochází patami normál, sestrojených k parabole z bodu p_1, jež mají úsečku $x - p$ a jsou na kružnici opsané z ohniska f poloměrem $\overline{fp_1} = r - \frac{1}{2}p$. V obr. jedna pata označena t. Kružnice K_1 má střed o_1 na symetrále úsečky $\overline{at}$. Lze snadno vypočísti $\overline{at}^2 = x^2 - p^2$ a $\overline{ao_1} = \frac{1}{2}\frac{\overline{at}^2}{\overline{at'}} = \frac{1}{2}(x + p)$, což je úsečka bodu o. Obdržíme tak známý výsledek Joachimsthalův.

Pro určité φ dostáváme tak při parabole mezi polem π bodů p a polem ω příslušných středů o *afinitu*. Přímkám rovnoběžným s $F \equiv \overline{qf}$ pole π (obr. 5) odpovídající v poli ω přímky rovnoběžné s osou A paraboly. Přímkám pole π, jež jsou rovnoběžny s A, odpovídají v ω přímky kolmé k tečně R_1. Obě pole mají v konečnu jeden samodružný bod z, který sestrojíme známým způsobem. Osnovy prvých odpovídajících si přímek jsou perspektivní o ose perspektivity Z, spojující ohnisko f s průsečíkem jiného páru odpovídajících si přímek F_1 a $\overline{oo_2}$. Osnovy druhých odpovídajících si rovnoběžek mají osu perspektivity ${}^1Z \equiv \overline{r^3o}$. Samodružný bod je $z \equiv (Z\,{}^1Z)$. Přímek Z a ${}^1Z$ lze užíti též velice výhodně k snadnému určení odpovídajících si bodů p, o.

Problém φ-pseudonormál při parabole je kvadratickým jen pro body kterékoliv φ-pseudonormály. Tak tomu bylo též pro R a F, jež jsou též φ-pseudonormály.

*

Sur la construction des pseudonormales d'un point à la conique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne la construction des φ-pseudonormales, c. à d. des droites qui passent par un point et coupent la conique sous un angle donné φ, la conique étant tracée. Pour l'ellipse on emploie, ainsi que l'a fait Pelz pour les normales, l'affinité involutive pour laquelle l'ellipse est invariante et qui transforme les pieds des φ-pseudonormales en des points de l'ellipse, situés sur un cercle. Le problème des φ-pseudonormales est quadratique pour les points des diamètres de l'ellipse qui font avec les diamètres conjugués l'angle φ; la construction respective se fait à l'aide de la règle et du compas sans que l'ellipse soit tracée.

En cas de l'hyperbole il n'y a pas, outre les points des diamètres dont l'angle avec le diamètre conjugué est φ et qui sont, en ce cas, toujours reéls, aucun point pour lequel le problème soit quadratique

Pour la parabole on fait voir que les pieds des φ-pseudonormales qui sont menées d'un point p se trouvent sur un cercle contenant le point de la parabole dont le diamètre fait l'angle φ avec la tangente en ce point. On donne la construction du centre o de ce cercle. La correspondance entre les points p et o est une affinité.