Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 219--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109067

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma.

Napsal

Vilém Jung,
professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Pokračování.)

3.

V rovnici (16) po případě (18) vyjadřuje se funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ve formě nekonečného součinu *absolutně* konvergentního v každém konečném oboru argumentu z.

V tomto součinu jsou činiteli *exponenciální* funkce, jež se dají vůči kterémukoliv bodu $z = z_0$ v konečnu vyjádřiti potenčními řadami *neustále* konvergentními a mimo to *celistvé funkce racionální* 1. stupně, proto lze funkci $\frac{1}{\Gamma(z)}$ vyjádřiti vůči kterémukoliv bodu $z = z_0$ v konečnu potenční řadou *neustále* konvergentní, t. j.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{A}_m (z - z_0)^m.$$

Vůči nullovému bodu*) $z_0 = 0$ platí řada *neustále* konvergentní

---

*) Předpokládáme-li $\nu + n > |z|$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, při čemž jest ν celistvé kladné číslo konečné, můžeme rovnici (18) psáti ve tvaru

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{Cz} \prod_{m=1}^{\nu} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu + n}\right) e^{-\frac{z}{\nu+n}}$$

$$= z\, e^{z\left(C - \sum\limits_{m=1}^{\nu} \frac{1}{m}\right)} \cdot \prod_{m=1}^{\nu} \left(1 + \frac{z}{m}\right) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\log\left(1 + \frac{z}{\nu+n}\right) - \frac{z}{\nu+n}}.$$

Pro $\frac{|z|}{\nu + n} < 1$ platí konvergentní rozvoj

$$\log\left(1 + \frac{z}{\nu + n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{z}{\nu + n}\right)^{k+1} \qquad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots$$

Na základě rovnice (16) snadno poznáme, že jest

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] = C.$$

Vůči nullovému bodu $z_0 = -\nu$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ platí potenční řada *neustále* konvergentní

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = a_1^{(\nu)}(z+\nu) + a_2^{(\nu)}(z+\nu)^2 + \ldots$$

Pro koefficient $a_1^{(\nu)}$ snadno odvodíme *)

Následkem toho můžeme psáti

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{z\left(C - \sum\limits_{m=1}^{\nu}\frac{1}{m}\right)} \cdot \prod_{m=1}^{\nu}\left(1 + \frac{z}{m}\right) \cdot e^{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\left(\frac{z}{\nu+n}\right)^{k+1}\right]}.$$

Ježto dvojitá řada nekonečná na pravé straně konverguje *absolutně* pro jakékoliv konečné $|z| < \nu + n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, jest patrno, že lze funkci $\frac{1}{\Gamma(z)}$ vyjádřiti potenční řadou $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\alpha_m z^m$ *neustále* konvergentní.

*)
$$a_1^{(\nu)} = \lim_{z=-\nu}\frac{z\prod\limits_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-z}}{z+\nu}$$

$$= \lim_{z=-\nu}\frac{z\left(1+\frac{z}{\nu}\right)\cdot\prod\limits_{m=1}^{\nu-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)\cdot\prod\limits_{m=\nu+1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)\cdot\prod\limits_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-z}}{z+\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}(-\nu)\left(1-\frac{\nu}{1}\right)\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu}{\nu-1}\right)\cdot\prod_{m=\nu+1}^{+\infty}\left(1-\frac{\nu}{m}\right)\cdot\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}(-\nu)\left(-\frac{\nu-1}{1}\right)\left(-\frac{\nu-2}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{\nu-1}\right)\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{m}{\nu+m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\nu}$$

$$= (-1)^{\nu}\nu \cdot \frac{1}{\nu}\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\nu}}{1+\frac{\nu}{m}} = (-1)^{\nu}\nu\,\Gamma(\nu) = (-1)^{\nu}\nu!,$$

neboť jest ν celistvé číslo kladné.

$$a_1^{(\nu)} = \lim_{z=-\nu} \frac{1}{(z+\nu)\Gamma(z)} = (-1)^\nu \nu!.$$

V následujícím ukážeme, že se dá funkce $\Gamma(z)$ vůči některému *pólu* $z = -\nu$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, jakož i vůči kterémukoliv bodu *regulárnému* $z = z_0$ vyjádřiti potenční řadou, konvergentní uvnitř příslušné konvergenční kružnice.

Ježto se dá v rovnici (15) exponenciální funkce $e^{z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}$ vůči kterémukoliv bodu z_0 roviny kompl. argumentu z vyjádřiti potenční řadou *neustále* konvergentní, stoupající dle celistvých a kladných mocnin binomu $z - z_0$, jedná se o vyšetření konvergenčního oboru potenčních řad pro lomené racionální funkce $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}$.

Chceme-li funkci $\Gamma(z)$ vyjádřiti potenční řadou vůči *pólu* $z = 0$, píšeme v této rovnici

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z}{m}\right)^k, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Patrno, že nekonečné řady tu se vyskytující konvergují pro $|z| < m$, tedy uvnitř soustředných kružnic, opsaných z bodu $z = 0$ poloměry $m = 1, 2, 3, \ldots$; konvergují tedy všechny *současně* uvnitř kružnice poloměru 1.

Platí tedy

$$\Gamma(z) = \frac{\beta_{-1}}{z} + \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots \quad \text{pro } |z| < 1.$$

Na základě rovnice (15) snadno poznáme, že

$$\beta_{-1} = 1, \qquad \beta_0 = -C.$$

Chceme-li funkci $\Gamma(z)$ vyjádřiti potenční řadou vůči bodu $z = -\nu$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, jenž jest jejím *pólem 1. řádu*, vyjmeme především v rovnici (15) činitele

$$\frac{1}{1+\frac{z}{\nu}} = \frac{\nu}{z+\nu}$$

a užijeme identit

$$e^{z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}=e^{(z+\nu)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}\cdot e^{-\nu\log\left(1+\frac{1}{m}\right)},$$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+\nu}{\nu}}=-\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z+\nu}{\nu}\right)^k \quad \text{pro } |z+\nu|<\nu,$$

jakož i

$$\frac{1}{1+\frac{z}{m}}=\frac{m}{m-\nu}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+\nu}{m-\nu}}=\frac{m}{m-\nu}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z+\nu}{m-\nu}\right)^k$$

$$\text{pro } |z+\nu|<|m-\nu|.$$

Řady nekonečné tu se vyskytující konvergují *současně* uvnitř kružnice opsané z bodu $z=-\nu$ nejmenším poloměrem, který obdržíme pro $m=\nu\pm 1$, t. j.

$$|m-\nu|=|\nu\pm 1-\nu|=1.$$

Platí tedy

$$\Gamma(z)=\frac{b_{-1}^{(\nu)}}{z+\nu}+b_0^{(\nu)}+b_1^{(\nu)}(z+\nu)+b_2^{(\nu)}(z+\nu)^2+\cdots$$

$$\text{pro } |z+\nu|<1.$$

Snadno se přesvědčíme, že jest

$$b_{-1}^{(\nu)}=\lim_{z=-\nu}(z+\nu)\,\Gamma(z)=\frac{(-1)^\nu}{\nu\,!}.$$

Má tedy funkce $\Gamma(z)$ *v pólu* $z=-\nu$ residuum $\frac{(-1)^\nu}{\nu\,!}$.

Chceme-li vyjádřiti funkci $\Gamma(z)$ potenční řadou vůči kterémukoliv *regulárnému* bodu z_0, užijeme v rovnici (15) identit

$$e^{z\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}=e^{(z-z_0)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}\cdot e^{z_0\log\left(1+\frac{1}{m}\right)},$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0}}=\frac{1}{z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^k$$

$$\text{pro } |z-z_0|<|z_0|,$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{m}}=\frac{m}{m+z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{m+z_0}}=\frac{m}{m+z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{z-z_0}{m+z_0}\right)^k$$

$$\text{pro } |z-z_0|<|m+z_0|, \quad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Jsou tedy konvergenční kružnice pro veškeré řady opsány z bodu z_0 a procházejí *singulárnými* body $z=0, -1, -2, \ldots$; konvergují tedy tyto řady *současně* uvnitř *nejmenší* z nich.

Platí tedy

$$\Gamma(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

uvnitř kružnice opsané *z regulárného* bodu z_0 a procházející tím ze *singulárných* bodů $z=0, -1, -2, -3, \ldots$, jenž leží k bodu z_0 nejblíže. Na konvergenční kružnici vyskytuje se buď *jeden* anebo nanejvýše *dva* sousední póly 1. řádu.

Transcendentní funkce

$$\frac{(-1)^m\omega^{z+m}}{m!(z+m)}=\frac{(-1)^m e^{(z+m)\log\omega}}{m!\,(z+m)}$$
$$=\frac{(-1)^m}{m!\,(z+m)}+\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\log\omega)^k}{k!}(z+m)^{k-1}$$

jest *v celém konečnu* regulárnou, vyjímajíc bod $z=-m$, v němž má *pól 1. řádu* s residuem $\frac{(-1)^m}{m!}$; v bodě $z=\infty$ má tato funkce podstatnou singularitu.*)

Vyšetřeme konvergenci nekonečné řady

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\omega^{z+m}}{m!(z+m)}=\omega^z\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\omega^m}{m!\,(z+m)}. \tag{49}$$

Ježto má funkce ω^z pro jakékoliv konečné z hodnoty konečné, stačí vyšetřiti konvergenci řady

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\omega^m}{m!\,(z+m)}=\sum_{m=0}^{+\infty}u_m.$$

*) Číslo ω volíme reálné *kladné* a přihlížíme pouze k *reálným* logarithmům tohoto čísla *kladného*, tak že funkce tu se vyskytující jsou *jednoznačné*.

Pišme $|z| = \zeta$ a volme $m > \zeta$, tak že $|z + m| \geq m - \zeta$. Z toho soudíme, že

$$|u_m| \leq \frac{\omega^m}{m!\,(m-\zeta)},$$

pro dosti velké h můžeme tedy psáti

$$\sum_{m=h}^{+\infty} |u_m| \leq \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{\omega^m}{m!\,(m-\zeta)};$$

je-li aspoň $h > \zeta + 1$, jest

$$m - \zeta > 1 \quad \text{čili} \quad \frac{1}{m-\zeta} < 1 \quad \text{pro } m \gtreqless h$$

a tedy

$$\sum_{m=h}^{+\infty} |u_m| < \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{\omega^m}{m!}.$$

Výraz na pravé straně této nerovnosti má konečnou hodnotu, proto konverguje řada $\sum_{m=0}^{+\infty} u_m$ *absolutně*, a ježto lze volbou dosti velkého h učiniti zmíněný výraz libovolně malým pro jakékoliv konečné ζ, a tedy zbytek řady libovolně malým pro jakékoliv konečné z, konverguje tato řada *stejnoměrně* v celém konečném oboru, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, -3 \ldots$.

Z té příčiny jest její součet *) jednoznačnou analytickou funkcí *regulárnou v celém konečnu*, vyjímajíc body $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, jež jsou jejími *póly 1. řádu* s residui $\frac{(-1)^m}{m!}$; jediným mezným bodem těchto pólů jest bod $z = \infty$, v němž má tato funkce podstatnou singularitu.

(Pokračování.)

*) Srovnej na př.: *H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen.* I Teil, § 50, pag 139. Leipzig 1897.