Antonín Pleskot

Poznámka ku geometrickému místu středů tětiv vedených daným bodem ke kuželosečce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 225--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109062

Poznámka ku geometrickému místu středů tětiv vedených daným bodem ke kuželosečce.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot,**
professor v Plzni.

V tomto časopise str. 76. bylo vyšetřeno v článku pana professora Sýkory geometrické místo středů tětiv vedených daným bodem ke kuželosečce a to methodou analytické geometrie.

Předložená úloha může býti zodpověděna jednoduchou úvahou synthetickou.

Je-li daným bodem a vésti tětivu ke kuželosečce a stanoviti střed její s, jest patrně střed tento průsečíkem paprsku as a sdruženého průměru os k sečně as; při tom o značí střed kuželosečky.

Ku každému paprsku as patří jediný paprsek os a naopak. Paprsky as a os tvoří proto svazky projektivní o vrcholech a a o. Hledaným místem jest tedy kuželosečka, která prochází body a a o.

Je-li daná kuželosečka ellipsou, pak pro tuto žádné dva realné sdružené průměry se nestotožňují, což dále znamená, že, vyšetřujeme-li hledané místo pro ellipsu, žádné dva příslušné paprsky as a os nebudou navzájem rovnoběžné, t. j. hledaná kuželosečka nebude míti realného bodu nekonečně vzdáleného, t. j. bude ellipsou.

Při hyperbole jsou dvě dvojice sdružených průměrů, které se stotožňují, t. j. asymptoty.

Hledané místo při hyperbole jest tedy takovou kuželosečkou, že existují při ní dvě dvojice příslušných paprsků as a os navzájem rovnoběžných.

To jest, kuželosečka hledaná má dva nekonečně vzdálené body a ty stotožňují se s nekonečně vzdálenými body asymptot dané hyperboly.

Hledaná kuželosečka bude tedy hyperbolou a asymptoty její budou rovnoběžny s asymptotami hyperboly dané.

Střed paraboly nachází se v úběžném bodě její osy. Hledaná křivka v případě paraboly prochází tedy úběžným bodem osy dané paraboly.

Mimo tento nekonečně vzdálený bod jiného nekonečně vzdáleného bodu nebude míti; neboť, ať směr sečny as mimo směr osy paraboly jest jakýkoli, vždy směr příslušného průměru jest směru jiného.

Hledaná křivka v případě paraboly jest tedy opět parabolou a osa její jest rovnoběžná s osou dané paraboly.

Při hyperbole i ellipse jest snadno i střed hledané kuželosečky stanoviti.

Jsou-li totiž os a as dva příslušné paprsky, pak budou i paprsky $os' \| as$ a $as' \| os$ dva příslušné paprsky; čtyrúhelník $osas'$ kuželosečce vepsaný jest pak rovnoběžníkem a střed jeho, t. j. střed o' úsečky oa jest středem kuželosečky.

Při hyperbole poznali jsme, že asymptoty dané hyperboly jakož i asymptoty příslušného geometrického místa se stotožňují. Seče tedy nekonečně vzdálená přímka danou hyperbolu a příslušné geometrické místo v týchž bodech.

Podobně při parabole nekonečně vzdálená přímka dotýkala se paraboly i příslušného geometrického místa v témž bodě.

I při ellipse snadno lze ukázati, že nekonečně vzdálená přímka seče ellipsu i příslušné geometrické místo v týchž imaginárních bodech.

Při ellipse dva sdružené stotožňující se průměry jsou imaginární — imaginární to asymptoty dané ellipsy; z toho plyne, že pro příslušné geometrické místo existují dvě dvojice příslušných imaginárních paprsků as a os navzájem rovnoběžných, jichž směr jest roven směru imaginárních asymptot dané ellipsy. Jinak řečeno: Imaginární dvojné body involuce, již stanoví sdružené průměry dané ellipsy na nekonečně vzdálené přímce, patří i příslušnému geometrickému místu.

Nekonečně vzdálená přímka seče tedy danou ellipsu i příslušné geometrické místo v týchž bodech.

Možno tedy vysloviti větu: **Kuželosečka daná a příslušné geometrické místo jsou křivky o týchž nekonečně vzdálených bodech, t. j. jsou křivky homothetické.**

O křivkách takových platí, že, jsou-li dva průměry jejich rovnoběžny, i příslušné průměry sdružené jsou navzájem rovnoběžny a poměr dvou rovnoběžných průměrů jest konstantní.

Sdruženými průměry jsou i osy a tedy osy dané kuželosečky budou rovnoběžny k osám geometrického místa a poměr os navzájem rovnoběžných bude týž.

V případě ellipsy budou tedy osy hlavní i vedlejší navzájem rovnoběžny a poměr osy hlavní k ose vedlejší bude u obou ellips týž.

V případě hyperboly budou osy realné a tedy i imaginární jen tehda rovnoběžny, leží-li bod a uvnitř úhlu asymptot dané hyperboly, v němž hyperbola daná se rozprostírá. Leží-li bod a v úhlu asymptot dané hyperboly, v němž hyperbola se nerozprostírá, bude osa realná geometrického místa kolmá k ose realné dané hyperboly; poměr os navzájem rovnoběžných bude ovšem týž.

Leží-li bod a na asymptotě dané hyperboly, pak hledaná kuželosečka má s asymptotou společný bod a, bod o a nekonečně vzdálený bod.

To jest, v případě, kdy bod a leží na asymptotě, rozpadá se příslušné geometrické místo v soustavu dvou přímek, které procházejí středem úsečky $\overline{ao}$ a jsou rovnoběžny s asymptotami dané hyperboly.

Vyšetření geometrického místa při hyperbole, kdy bod a leží na asymptotě, možno ještě přesněji vyvoditi.

Leží-li bod a na asymptotě dané hyperboly, pak paprsku $a\sigma \equiv ao$ odpovídá paprsek $o\sigma \equiv ao$. Svazky paprskové o vrcholech a a o jsou tedy takové, že paprsek ao splývající s asymptotou odpovídá sám sobě. Jsou tedy svazky v tomto případě v poloze perspektivní a příslušné geometrické místo jejich průsečíků jest tedy přímka, kteráž, jak snadno se vyšetří, prochází středem úsečky $\overline{ao}$ a jest rovnoběžna s druhou asymptotou dané hyperboly. Mimo tuto přímku lze přičísti k příslušnému geometrickému místu i přímku ao, t. j. asymptotu, na níž bod a leží, neboť průsečík paprsku $o\sigma \equiv ao$ a paprsku $a\sigma \equiv ao$ jest paprsek ao.

Nyní možno snadno geometrické místo pro jakoukoli kuželosečku sestrojiti.

Je-li sestrojiti příslušné geometrické místo pro hyperbolu, pak známy jsou asymptoty hledaného místa; ty procházejí středem o' úsečky $\overline{ao}$ a jsou rovnoběžny k asymptotám dané hyperboly. Z daného bodu, na př. bodu a a asymptot snadno lze příslušnou hyperbolu konstruovati.

V případě ellipsy je dán střed hledané ellipsy, směr os, který jest roven směru os ellipsy dané, jejich poměr rovnající se poměru os dané ellipsy a jeden bod, na př. bod a neb bod o; tu není ani třeba zmiňovati se o tom, jak osy hledané ellipsy se sestrojí.

I v případě, dána-li parabola P, lze snadno příslušnou parabolu P_1 stanoviti.

Jeden bod paraboly, t. j. bod a známe. Vedeme-li bodem tím kolmici k ose dané paraboly, protne osu v bodě b. Středem m úsečky $\overline{ab}$ prochází osa hledané paraboly rovnoběžně k ose dané paraboly. Vedeme-li nyní bodem, v němž osa paraboly P_1 protíná parabolu P, tečnu k parabole P, pak paprsek bodem a rovnoběžně s tečnou vedený, protne osu paraboly P_1 v jejím vrcholu. Tím znám jest vrchol, osa, bod paraboly a možná ji tedy snadno sestrojiti.

Poznámka. Pro ellipsu můžeme okamžitě řešiti předloženou úlohu na základě orthogonálního promítání.

Považujme ellipsu za pravoúhlý průmět kružnice K o středu o v rovině ϱ. Bod a_1 v rovině ellipsy jest průmětem jistého bodu a v rovině ϱ.

Přímkám S vedeným bodem a odpovídají jakožto průměty přímky S_1 jdoucí bodem a_1 a středům s tětiv S ke kružnici vedených odpovídají jakožto průměty středy s_1 tětiv S_1 ku ellipse vedených.

Geometrickým místem bodů s jest však kružnice K' nad průměrem $\overline{ao}$, neboť bod s jest průsečíkem paprsků as a os navzájem kolmých. Bude tedy geometrickým místem bodů s_1 průmět kružnice v rovině ϱ sestrojené nad průměrem $\overline{ao}$. Tímto průmětem jest ellipsa, jejíž střed jest průmětem středu úsečky

$\overline{ao}$, t. j. střed hledané ellipsy jest půlící bod úsečky spojující bod a_1 se středem ellipsy dané.

Poněvadž kružnice K i K' jsou v téže rovině, budou průměty obou kružnic ellipsy, jichž osy navzájem jsou rovnoběžny, a poměr os u obou bude týž.

Integrál partikulární jakožto obálka.

Napsal

Dr. **Karel Vorovka,**
s. professor na Král. Vinohradech.

Obyčejná differenciální rovnice prvního stupně

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

má obecný integrál tvaru

$$F(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

kdež značí C libovolnou konstantu. Klademe-li místo ní nějakou určitou hodnotu, obdržíme integrál partikulární. Integrál takový podává pak zároveň rovnici jakési určité křivky, kdežto integrál obecný značí soustavu takových křivek.

Zvolme v obecné poloze bod M_0 o souřadnicích x_0, y_0 a vyhledejme, které křivky dané soustavy bodem tím procházejí. K tomu cíli dosaďme souřadnice jeho do rovnice (2), čímž obdržíme

$$F(x_0, y_0, C) = 0. \tag{3}$$

Z rovnice té lze pak C vypočítati. Vychází-li na př. pro C rovnice lineární, jejíž kořen jest $C = \alpha$, pak bodem M_0 prochází jenom jedna křivka; rovnice její zní

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

což jest zároveň partikulární integrál původní rovnice differenciální. O křivkách dané soustavy lze pak říci, že pokrývají rovinu jednoduše. — Vychází-li pro C rovnice kvadratická, jejíž