Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sýkora

Čtyřúhelník o největší ploše

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 285--292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109057

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1903

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

$$EF = \sqrt{AB \cdot CD},$$

$$\mu = \nu = \sqrt{\alpha}, \qquad \Delta = \frac{\alpha P}{(\alpha + 1)(\sqrt{\alpha} + 1)^2}.$$

Tyto výsledky vyvoditi zůstavujeme ku cvičení čtenáři.

Čtyrúhelník o největší ploše.

Napsal

Ant. Sýkora,
professor v Rakovníku.

Vyšetřme, který čtyrúhelník, jehož za sebou jdoucí strany jsou a, b, c, d, má největší plochu.

Veďme úhlopříčku x, jež dělí čtyrúhelník na trojúhelníky o stranách a, b, x; c, d, x; plochy jejich jsou

$$\Delta_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{4}\sqrt{(c+d+x)(c+d-x)(x+c-d)(x-c+d)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2 - x^2][x^2 - (c-d)^2]}$$

a plocha čtyrúhelníka

$$u = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}$$
$$+ \frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2 - x^2][x^2 - (c-d)^2]}.$$

Znamenáme-li tu

$$\text{(A)} \qquad \begin{gathered} (a+b)^2 = \alpha, \quad (a-b)^2 = \beta, \\ (c+d)^2 = \gamma, \quad (c-d)^2 = \delta, \\ x^2 = \xi, \end{gathered}$$

jest

(I) $$4u = \sqrt{(\alpha-\xi)(\xi-\beta)} + \sqrt{(\gamma-\xi)(\xi-\delta)}.$$

Vypočtěme napřed, při které hodnotě ξ nabude výraz tento hodnoty u, již pokládáme za danou; pročež rozřešme rovnici tuto dle ξ.

Zmocnivše dvakrát a srovnavše dle ξ nabudeme rovnice

$$M\xi^2 - 2N\xi + P = 0,$$

kdež pro krátkost položeno

(B) $$\begin{aligned} M &= 64u^2 + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2, \\ N &= 16u^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + (\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta), \\ P &= (16u^2+\alpha\beta+\gamma\delta)^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Z rovnice této plyne

(II) $$\xi = \frac{1}{M}(N \pm \sqrt{N^2 - MP})$$

nebo

(II′) $$M\xi = N \pm \sqrt{N^2 - MP}.$$

Uspořádáme-li diskriminant

$$\begin{aligned} D &= N^2 - MP \\ &= [16u^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + (\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)]^2 \\ &\quad - [(16u^2+\alpha\beta+\gamma\delta)^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta][64u^2 + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2] \end{aligned}$$

dle $(4u)^2$ a vytkneme-li $-(4u)^2$ jakožto společného činitele, bude druhý činitel

$$\begin{aligned} 4.(4u)^4 &+ [8(\alpha\beta+\gamma\delta) + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2](4u)^2 \\ &- 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta) \\ &+ 2(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 + 4(\alpha\beta-\gamma\delta)^2 \end{aligned}$$

čili, zjednodušíme-li,

$$\begin{aligned} &4(4u)^4 - 4(4u)^2[(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) - 2(\alpha\beta+\gamma\delta)] \\ &- (\alpha+\beta-\gamma-\delta)[\alpha\beta(\gamma+\delta) - \gamma\delta(\alpha+\beta)] + 4(\alpha\beta-\gamma\delta)^2. \end{aligned}$$

Abychom výraz tento rozložili na činitele, položme jej $= 0$ a rozřešme vzniklou rovnici dle $(4u)^2$; takto dostaneme

$$2(4u)^2 = Q \pm \sqrt{R},$$

kdež

$$Q = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2(\alpha\beta + \gamma\delta),$$
$$R = [(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2(\alpha\beta + \gamma\delta)]^2 - 4(\alpha\beta - \gamma\delta)^2$$
$$+ 4(\alpha + \beta - \gamma - \delta)[\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)]$$

čili

$$R = (\alpha + \beta)^2(\gamma + \delta)^2 + 16\alpha\beta\gamma\delta - 4\alpha\beta(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta(\alpha + \beta)^2$$
$$= (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2,$$

tedy

$$2(4u)^2 = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2(\alpha\beta + \gamma\delta) \pm (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$$

a jednotlivě

$$2(4u_1)^2 = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2(\alpha\beta + \gamma\delta) + (\alpha - \beta)(\gamma - \delta),$$
$$2(4u_2)^2 = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2(\alpha\beta + \gamma\delta) - (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$$

čili

$$(4u_1)^2 = (\alpha - \delta)(\gamma - \beta),$$
$$(4u_2)^2 = (\alpha - \gamma)(\delta - \beta).$$

Jelikož dle (A) jest $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, jest

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) > 0 \quad \text{a} \quad u_1 > u_2;$$

diskriminant

$$D = 4 \,.\, 16^2 (4u)^2 (u_1^2 - u^2)(u^2 - u_2^2)$$
$$= 4(4u)^2[(\alpha - \delta)(\gamma - \beta) - (4u)^2][(4u)^2 - (\alpha - \gamma)(\delta - \beta)]$$

a konečně dle (II′)

$$\text{(III)} \qquad M\xi = N \pm 32 \,.\, 4u\sqrt{(u_1^2 - u^2)(u^2 - u_2^2)}$$

čili (III′)

$$M\xi = N \pm 2 \,.\, 4u\sqrt{[(\alpha - \delta)(\gamma - \beta) - (4u)^2][(4u)^2 - (\alpha - \gamma)(\delta - \beta)]}.$$

Rovnice tato podává úhlopříčku $x = \sqrt{\xi}$ příslušnou libovolné hodnotě plochy u. Z ní poznáváme, že ξ jest reálné, pokud

$$u_1 \geqq u \geqq u_2,$$

a že největší hodnota, již u může míti, má-li býti čtyrúhelník možný, jest $u = u_1$, nejmenší pak $u = u_2$.

Největší hodnota u,

$$u_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

podává při hodnotě úhlopříčky $x = \sqrt{\xi}$ dle rovnice (III), jelikož tu diskriminant D zmizí,

$$\xi_1 = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}} = \frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}},$$

z čehož poznáváme, že žádaný čtyrúhelník jest do kruhu vepsán. O tom lze se přesvědčiti, vypočteme-li úhel φ sevřený stranami a, b a úhel ψ sevřený stranami c, d,

$$2ab\cos\varphi = a^2+b^2-x_1^2$$
$$= a^2+b^2-\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$
$$= \frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}\cdot$$

čili

$$\cos\varphi = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

a podobně

$$2cd\cos\psi = c^2+d^2-x_1^2$$
$$= \frac{cd(c^2+d^2-a^2-b^2)}{ab+cd}$$

čili

$$\cos\psi = -\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} = -\cos\varphi,$$

pročež

$$\varphi+\psi = \pi.$$

Nejmenší hodnotě u,

$$u_2 = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d)}$$

přísluší hodnota

$$\xi_2 = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha - \beta - \gamma + \delta} = \frac{(ac - bd)(bc - ad)}{ab - cd}$$

a úhlopříčka

$$x_2 = \sqrt{\frac{(ac - bd)(bc - ad)}{ab - cd}}.$$

Hodnota u_2 značí rovněž plochu čtyrúhelníka do kruhu vepsaného, ale takového, jehož dvě strany (na př. b a d) se protínají (čtyrúhelníka přeloženého) a jehož jeden trojúhelník, na jakéž jest úhlopříčkou x_2 rozdělen, jest vzíti odčetné. — Znamená-li φ' úhel sevřený stranami a, b; ψ' úhel sevřený stranami c, d, tu máme

$$\begin{aligned}\cos\varphi' &= \frac{a^2 + b^2 - x_2^2}{2ab} \\ &= \frac{1}{2ab}\left[a^2 + b^2 - \frac{(ac - bd)(bc - ad)}{ab - cd}\right] \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\psi' &= \frac{c^2 + d^2 - x_2^2}{2cd} \\ &= \frac{1}{2cd}\left[c^2 + d^2 - \frac{(ac - bd)(bc - ad)}{ab - cd}\right] \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)},\end{aligned}$$

pročež

$$\cos\psi' = \cos\varphi' \quad \text{a} \quad \psi' = \varphi',$$

z čehož následuje, že úhly φ' a ψ' jsou obvodové úhly v kruhu na téže straně úhlopříčky x_2.

Dále pak jest rozdíl $\varDelta$ trojúhelníků

$$(a, b, x_2) = \frac{1}{2} ab \sin\varphi', \qquad (c, d, x_2) = \frac{1}{2} cd \sin\varphi',$$

$$\varDelta = \frac{1}{2}(ab - cd)\sin\varphi';$$

ježto však

$$\cos\varphi' = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)},$$

jest

$$\sin\varphi' = \sqrt{1 - \cos^2\varphi'} = \sqrt{(1 + \cos\varphi')(1 - \cos\varphi')}$$

$$= \frac{1}{2(ab - cd)}\sqrt{[(a + b)^2 - (c + d)^2][(c - d)^2 - (a - b)^2]}$$

a tím

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{[(a + b)^2 - (c + d)^2][(c - d)^2 - (a - b)^2]}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d)},$$

t. j.

$$u_2 = \Delta, \quad \text{c.b.d.}$$

Poznámka redakční.

1. Že čtyrúhelník ABCD sestrojený ze stran a, b, c, d má největší obsah tenkráte, lze-li jej do kružnice vepsati, můžeme krátce dokázati takto:

Dle označení v článku užitého jest

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$$
$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos D,$$

tudíž

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos B - 2cd\cos D;$$

mimo to jest

$$4u = 2ab\sin B + 2cd\sin D.$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá

$$16u^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd\cos(B + D)$$
$$= 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2}.$$

Jest tedy

$$u = \frac{1}{4}\sqrt{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{B + D}{2}}$$

čili

$$u = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}},$$

klademe-li

$$a + b + c + d = 2s.$$

Obecný vzorec tento, platný pro každý konvexní čtyrúhelník, vyvodil francouzský mathematik *Gérono.*

Největší hodnoty nabude u patrně, jest-li

$$\cos\frac{B+D}{2} = 0,$$

t. j. je-li

$$B + D = A + C = 2R;$$

potom čtyrúhelník ABCD lze vepsati do kružnice a obsah jeho vyjadřuje se známým vzorcem Brahmeguptovým

$$u = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

2. Jde-li o to, abychom sestrojili *konvexní čtyrúhelník* ABCD *vepsaný v kružnici*, dány-li délky stran jeho a, b, c, d, hleďme sestrojiti délky úhlopříček $\overline{AC} = x$, $\overline{BD} = y$.

Tyto, jak známo, vyhovují rovnicím

$$xy = ac + bd, \qquad \frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc},$$

(viz na př. Strnad, Geometrie pro vyšší školy reálné, II. vyd. str. 163).

Sestrojme nejprve délky

$$b_1 = \frac{cd}{a}, \qquad c_1 = \frac{bd}{a}, \qquad d_1 = \frac{bc}{a}$$

a na ramena XY libovolného úhlu α přenesme od vrcholu O úsečky:

na X: $\quad OE = a, \quad OF = b + b_1,$
na Y: $\quad OG = c + c_1, \quad OH = d + d_1.$

Veďme příčku GK || HF, stanovme $OL = \sqrt{\overline{OE}\,.\,\overline{OK}}$, přenesme na X délku OM = OL a veďme MN || FH. Potom jest $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$.

Důkaz: Dle sestrojení jest

$$OE : OM = OM : OK = ON : OG,$$

pročež EN || MG a tudíž

$$\triangle OEG = \triangle OMN$$

čili

$$\frac{1}{2} a (c + c_1) \sin \alpha = \frac{1}{2} \overline{OM} . \overline{ON} . \sin \alpha.$$

Jest tedy

$$\overline{OM} . \overline{ON} = a (c + c_1) = ac + bd;$$

mimo to jest

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{OF}{OH} = \frac{b + b_1}{d + d_1} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Z toho patrno, že

$$\overline{OM} = x, \quad \overline{ON} = y$$

jsou délky úhlopříček čtyrúhelníka tětivového, stranami a, b, c, d určeného.

Trojúhelník z těžnic daného trojúhelníka.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Poznamenáme-li nejdelší stranu nerovnostranného trojúhelníka písmenem a, nejkratší c, tak že

(A) $$a > b > c,$$

a příslušné těžnice po řadě α, β, γ, máme (v. str. 86. t. r.)