Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

O šestnácti přímkách ploch posouvání stupně čtvrtého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 4, 149--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109030

O šestnácti přímkách ploch posouvání stupně čtvrtého.

Napsal

Ant. Sucharda,

professor v Táboře.

1. V prvním čísle XIII. ročníku tohoto časopisu (pag. 1.) bylo mi dovoleno uvésti výtvarný zákon ploch posouvání, jak jej podává prof. F. Tilšer ve svých přednáškách o organické geometrii formy na c. k. české vys. škole technické v Praze.

Ze zákona toho vychází, že každá plocha posouvání má dvě soustavy křivek shodných a homothetických. Křivky jedné soustavy jsou shodny s křivkou řídící, křivky soustavy druhé s křivkou tvořící.

Předpokládejme, že jsou stupně druhého. Křivka řídící má pak dva body v rovině smíru (rovině úběžné); každému z nich přísluší jedna křivka druhé soustavy, tak že tedy ploše posouvání náleží v nekonečnu křivka stupně čtvrtého, z čehož zase jde, že plocha sama jest čtvrtého stupně.

Křivky té které soustavy, jsouce křivkami rovinnými, obsaženy jsou (patrně po dvou) v rovinách jedné osnovy. Pronikají se ovšem ve čtyřech bodech, z nichž však dva jsou nekonečně vzdáleny, jelikož křivky jsou homothetické, tak že v konečnu zbývají pouze dva. Geometrickým místem těchto dvou bodů nutně jest dvojná křivka plochy, křivka to stupně druhého, poněvadž v jedné rovině vždy jen dva její body jsou obsaženy. Z toho jde:

*Plochy posouvání, když křivka řídící i tvořící jsou druhého stupně, jsou obecně stupně čtvrtého a mají dvojnou křivku druhého stupně.**)

---

*) Srovnej s mým pojednáním: Ueber eine Gattung Rückungsflächen, jež zatím vyšlo v XCII. sv. zased. zpráv cís. akademie věd ve Vídni, 1885.

2. V „Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1863“ ukázal E. Kummer, že plochy čtvrtého stupně, mající dvojnou křivku stupně druhého, mají po šestnácti přímkách.

Vzhledem k tomu, co svrchu bylo uvedeno, musí i každá plocha posouvání čtvrtého stupně míti šestnácte přímek. Účelem řádků dalších jest ukázati, kterak přímky tyto jsou umístěny.

Ku zjednání příslušné odpovědi užil jsem transformace, již uvádí C. F. Gaiser ve Crellově žurnale, sv. 70., pag. 249. Transformace jest tato:

Vzhledem k určité ploše stupně druhého P a bodu p lze libovolnému bodu a přidružiti jediný a' tím, že se určí proniky m n přímky prosnovu p (prostorového svazku o středu p) s plochou P, a ku bodům a m n vyhledá čtvrtý harmonicky sdružený a'. Vymíniti dlužno tu body křivky stupně druhého C, v níž P proniká polárnou rovinu $\overline{\text{R}}$ bodu p vzhledem ku ploše P; každému z těchto bodů přísluší totiž všechny body přímky, jež určena jím a bodem p. Dále jest výjimkou bod p; jemu jsou přidruženy všechny body roviny $\overline{\text{R}}$.

Je-li P plocha stupně čtvrtého s dvojnou křivkou C druhého stupně v rovině $\overline{\text{R}}$ — křivka ta nesmí degenerovati v přímky — tož obecný bod plochy, neobsažený v dvojné křivce, určuje s křivkou touto plochu kuželovou K stupně druhého. Dvojná její rovina může se pojati za zvláštní plochu stupně druhého, která s plochou kuželovou proniká se ve zvláštní křivce čtvrtého stupně (dvojné křivce stupně druhého.)

Takto určují spolu svazek druhého stupně.

Libovolná další plocha tohoto svazku může s bodem p býti základem naší transformace.

Ploše P čtvrtého stupně pak přísluší:

1. rovina $\overline{\text{R}}$ jakožto jednoduchá,
2. dvojná plocha kuželová K stupně druhého,
3. plocha třetího stupně, jež p neobsahuje, za to však dvojnou křivku C stupně druhého jako křivku jednoduchou.

C. F. Gaiser ukazuje dále, že z dvaceti sedmi přímek této plochy třetího stupně šestnácte jich se proniká s křivkou C; každé z těchto že přísluší v ploše stupně čtvrtého přímka, čímž shledává se oněch šestnácte přímek, o nichž chceme jednati.

Dále ještě připomíná, že, pokud se týče vzájemného se pronikání neb nepronikání, platí o těchto šestnácti přímkách totéž co o zmíněných šestnácti přímkách pomocné plochy stupně třetího.

Vyšetříme-li tedy tuto plochu stupně třetího, vyhledajíce v ní oněch šestnáct přímek, jež dvojnou křivku pronikají, dojdeme cíle, jejž svrchu jsme si vytkli.

3. Volím k tomu účelu plochu posouvání hyperbolo-hyperbolickou, t. j. plochu, jejíž tvořící i řídící křivka jest hyperbola. Plocha tato, v realných částech do nekonečna se prostírajíc, vzbuzuje naději, že přímky hledané budou realné.

Hyperboly řídící i tvořící buďtež pro jednoduchosť stejnoramenné, první v rovině $\overline{XZ}$ (soustavy souřadné pravoúhlé), s poloosou a, druhá v rovině $\overline{XY}$ s poloosou b; realné osy obou buďtež v ose $\overline{X}$. Hyperbola tvořící měj mimo to střed v hyperbole řídící, a její od středu hyperboly této vzdálenější vrchol procházej počátkem soustavy. S tímto bodem sjednocuj se při svrchu zmíněné transformaci bod p.

Plocha stupně druhého, vzhledem k níž má se transformace provésti, má obsahovati plochy posouvání hyperbolu dvojnou; rovina $\overline{R}$ této hyperboly má býti polárnou bodu $p \equiv o$ vzhledem ku ploše druhého stupně.

Za tuto plochu zvolil jsem hyperboloid rotační, jehož střed je v ose $\overline{X}$, a osa laterálná stejnosměrna s osou $\overline{Z}$ soustavy souřadné.

Je-li rovnice hyperboly řídící

$$\begin{aligned}(x-a-b)^2-z^2-a^2&=0\\ y&=0\end{aligned}$$

a hyperboly tvořící

$$\begin{aligned}x^2-2bx-y^2&=0\\ z&=0,\end{aligned}$$

bude rovnice plochy posouvání vzhledem k bodu $p \equiv o$ jakožto počátku tato:

$$(x-a-b \mp \sqrt{a^2+z^2})^2-y^2-b^2=0. \tag{1}$$

Rovnice jednodílného rotačního hyperboloidu jest pak

$$(x-2a)^2+y^2-z^2-a^2=0. \tag{2}$$

a rovnice libovolné přímky prosnovu p:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$
$$z = \frac{z_1}{x_1} x, \tag{3}$$

značí-li x_1 y_1 z_1 souřadnice bodu, jejž transformujeme.

Souřadnice proniku přímky této s hyperboloidem jsou zajisté:

$$^{1,2}x = ax_1 \frac{2x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 3(z_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2} \tag{4}$$

$$^{1,2}y = ay_1 \frac{2x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 3(z_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2} \tag{5}$$

$$^{1,2}z = az_1 \frac{2x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 3(z_1^2 - y_1^2)}}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}. \tag{6}$$

Znajíce takto souřadnice bodů, v nichž přímka prosnovu p proniká hyperboloid, vyšetřme souřadnice x' y' z' bodu, s bodem x_1 y_1 z_1 harmonicky sdruženého vzhledem ku bodům těm jako základním.

Substitucí do rovnic tvaru

$$({}^1x\,{}^2x\,x_1\,x') = -1$$

a řešením příslušným obdržíme

$$x' = \frac{{}^2x(x_1 - 2\,{}^1x) + x_1\,{}^1x}{2x_1 - {}^1x - {}^2x} \tag{7}$$

$$y' = \frac{{}^2y(y_1 - 2\,{}^1y) + y_1\,{}^1y}{2y_1 - {}^1y - {}^2y} \tag{8}$$

$$z' = \frac{{}^2z(z_1 - 2\,{}^1z) + z_1\,{}^1z}{2z_1 - {}^1z - {}^2z}. \tag{9}$$

Do těchto rovnic třeba za ${}^1x\,{}^2x$, ${}^1y\,{}^2y$, ${}^1z\,{}^2z$ dosaditi z rovnic (4) (5) (6), načež po příslušné redukci vychází:

$$x' = ax_1 \frac{2x_1 - 3a}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 2ax_1} \tag{10}$$

$$y' = ay_1 \frac{2x_1 - 3a}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 2ax_1} \tag{11}$$

$$z' = az_1 \frac{2x_1 - 3a}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 2ax_1}. \tag{12}$$

Vyloučíme-li z těchto tří rovnic a z rovnice (1) kdež místo $x\,y\,z$ píšeme $x_1 y_1 z_1$ tyto tři veličiny, obdržíme žádanou rovnici stupně osmého.

Práci tu takto vykonáme: Řešíce rovnice (10) (11) (12) podle $x_1\, y_1\, z_1$, obdržíme

$$x_1 = ax' \frac{2x' - 3a}{x'^2 + y'^2 - z'^2 - 2ax'}$$

$$y_1 = ay' \frac{2x' - 3a}{x'^2 + y'^2 - z'^2 - 2ax'}$$

$$z_1 = az' \frac{2x' - 3a}{x'^2 + y'^2 - z'^2 - 2ax'}.$$

Nalezené pro $x_1\, y_1\, z_1$ hodnoty substitujeme do rovnice (1). Po provedené substituci a redukci příslušné konečně veskrze místo $x'\, y'\, z'$ píšeme $x\ y\ z$.

Tak obdržíme hledanou rovnici stupně osmého, již ihned možno snížiti na stupeň sedmý vynecháním činitele $x - a - b$, jenž s nullou srovnán byv, patrně znamená rovinu R, z počátku tohoto pojednání zmíněnou.

4. Ponechávajíce si vypisování obšírné a nepřehledné rovnice sedmého stupně v původní její formě, uveďme hned, že po vhodném rozkladu zní

$$[(a-b)x^2 - (a+b)(y^2 - z^2)]^2[xy^2 + r(x^2 - z^2) - \mathrm{R}y^2 - \mathrm{R}(\mathrm{R} + 2r)x + \mathrm{R}^2(\mathrm{R} + r)] = 0. \qquad (13)$$

Prvý činitel s nullou srovnán znamená dvojnou plochu kuželovou, určenou bodem p a hyperbolou dvojnou, činitel druhý s nullou srovnán, hledanou plochu stupně třetího.

Rovnice její zjednoduší se, zavedeme-li $x + a$ na místě x, i zní pak takto:

$$xy^2 + b(x^2 - z^2) - a^2 x = 0. \qquad (14)$$

Plocha ta proniká rovinu $\overline{XY}$ v křivce

$$z = 0, \quad x(y^2 + bx - a^2) = 0,$$

tedy patrně v ose $\overline{Y}$ a v parabole, jejíž vrchol jest v ose $\overline{X}$ od počátku soustavy o $\frac{a^2}{b}$ vzdálen, a jež osu $\overline{Y}$ proniká v bodech $y = \pm a$.

Určeme pronik plochy té s libovolnou rovinou osnovu (svazku), jehož osou jest $\overline{Y}$.

Dlužno k tomu účelu do (14) vložiti $z = \mu x$, při čemž μ značí tangentu odchylky roviny od $\overline{XY}$.

Obdržíme:

$$x[y^2 + bx(1 - \mu^2) - a^2] = 0, \qquad (15)$$

z čehož patrno, že pronik ten obecně skládá se z přímky a z paraboly. Přímkou tou jest osa $\overline{Y}$, parabola pak protíná ji vždy v bodech $y = \pm a$.

Jsou tedy body m n této osy, pro něž platí $y = \pm a$, dvojnými body plochy třetího stupně. Body tyto odpovídají dvěma dvojným bodům smíru (bodům úběžným) plochy posouvání, obsaženým v křivce tvořící.

Vyšetřme proniky plochy s rovinami osnovy $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$, $\overline{XY}$.

Položíce nejprvé do (14) $y = u$, obdržíme

$$b(x^2 - z^2) + x(u^2 - a^2) = 0, \tag{16}$$

což znamená stejnoramenné hyperboly.

Jich asymptoty jsou stejnosměrny s přímkami, úhly os $\overline{X}$ a $\overline{Z}$ rozpolujícími. Z toho jde:

Plocha má též dva dvojné body smíru p_∞ q_∞. Tyto jsou v přímkách úhly os $\overline{X}$, $\overline{Z}$ rozpolujících a odpovídají dvěma v rovině křivky řídící obsaženým dvojným bodům smíru plochy posouvání, s nimiž se sjednocují.

Položíme-li do (14) $x = v$, obdržíme pronik s rovinou osnovy $\overline{YZ}$ v tvaru

$$vy^2 - bz^2 + v(bv - a^2) = 0, \tag{17}$$

z čehož zřejmo, že proniky tyto obecně opět jsou hyperboly, avšak nikoli homothetické.

Kladouce konečně do (14) $z = w$, obdržíme pronik s rovinou osnovy $\overline{XY}$ v tvaru

$$xy^2 + b(x^2 - w^2) - a^2x = 0, \tag{18}$$

z čehož jde, že proniky tyto jsou obecně křivky třetího stupně.

Přihlédněme nyní ku přímkám plochy uvažované.

V rovinách osnovu $z = \mu x$ jsou, jak z rovnice (15) vychází, přímky pro $\mu = \pm 1$. Rovnice jejich jsou

$$\begin{array}{llll} y = a & y = a & y = -a & y = -a \\ x = z & x = -z & x = z & x = -z \end{array}$$

a zřejmo z toho, že dvě z nich $\overline{A}$, $\overline{B}$ pronikají osu $\overline{Y}$ v bodě $y = a$, druhé dvě, $\overline{C}$, $\overline{D}$ v bodě $y = -a$, a jsou stejnosměrny s přímkami, úhly os $\overline{X}\,\overline{Z}$ rozpolujícími. Přímky $\overline{A}$, $\overline{B}$ patrně procházejí dvojným bodem m, přímky $\overline{C}$, $\overline{D}$ dvojným bodem n; přímky $\overline{A}\,\overline{C}$ dvojným bodem smíru p_∞, přímky $\overline{B}\,\overline{D}$ dvojným bodem smíru q_∞.

V rovinách osnovy $\overline{XZ}$ jsou, jak z rovnice (16) vychází, čtyři přímky pro $y = \pm a$. Jest však na pohled zřejmo, že jsou totožny s přímkami, jež jsme právě z rovnice (15) odvodili.

V rovinách osnovy $\overline{YZ}$ jest, jak z rovnice (17) vychází, dvé přímek pro $v = \frac{a^2}{b}$.

Rovnice jich jsou

$$\begin{aligned} bx &= a^2 \qquad & bx &= a^2 \\ ay &= bz \qquad & ay &= -bz. \end{aligned}$$

Jsou to přímky $\overline{E}\,\overline{F}$, procházející vrcholem paraboly v $\overline{XY}$ obsažené. Snadně se pozná, že s přímkami $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ se nepronikají.

V rovinách osnovy $\overline{XY}$ jest, jak z rovnice (18) vychází, jediná přímka pro $w = 0$.

Její rovnice jest $z = 0$, $x = 0$. Jest to osa $\overline{Y}$.

Poněvadž plocha má v rovinách osnovy $\overline{XZ}$ vesměs křivky stupně druhého, musí míti přímku smíru $\overline{C}_\infty$ (přímku úběžnou) společnou všem těmto rovinám.

Z obdobné příčiny náleží jí též přímka smíru $\overline{H}_\infty$ (společná rovinám osnovy $\overline{YZ}$.)

Majíc plocha uvažovaná v rovině smíru dvě přímky, musí tam míti i třetí: $\overline{K}_\infty$. Více přímek v ploše té není.

5. Abychom přímky nalezené blíže mohli posouditi, povšimněme si, že přímku plochy stupně třetího, prochází-li dvěma dvojnými body této plochy, dlužno považovati za čtyrnásobnou.*)

Z toho jde, připomeneme-li si, že přímka $\overline{A}$ prochází dvojnými body m, p_∞, $\overline{B}$ dvojnými body m, q_∞, $\overline{C}$ dvojnými body n, p_∞, $\overline{D}$ dvojnými body n, q_∞, $\overline{Y}$ dvojnými body $m\,n$, následující:

Přímky $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{Y}$ jsou přímky čtyrnásobné. Přímky $\overline{E}$, $\overline{F}$ jsou přímky jednoduché.

Abychom poznali, kterak jest v té příčině s přímkami smíru, transformujme si uvažovanou plochu homologicky.

Je-li tu modul roven -1, bude třeba, jak snadně se pozná, zavésti do rovnice plochy za x, y, z

---

*) Srovnej: Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes II. díl, 3. vydání, pag. 412. odst. 314.

$$\frac{xU}{2x-U},\ \frac{yU}{2x-U},\ \frac{zU}{2x-U},$$

při čemž střed homologie jest v počátku soustavy a U značí vzdálenosť jeho od roviny homologie.

Vložíme-li pak do výsledku substituce $x = \frac{U}{2}$, což znamená rovnici roviny, rovině smíru přidružené, obdržíme

$$y^2 = 0,$$

což značí dvě sjednocené přímky.

V přímkách těchto patrně obsaženy jsou body ku p_∞ q přidružené. Z toho zřejmo:

Dvě ze tří prv uvedených přímek smíru splývají v jedinou. Tato prochází oběma dvojnými body smíru.

Nutno ji tudíž považovati též za čtyrnásobnou.

Plocha třetího stupně, jež vznikla při transformaci plochy posouvání, má tedy

čtyrnásobné přímky $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{Y}$, $\overline{G}_\infty \equiv \overline{H}_\infty$,
jednoduché přímky $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{K}_\infty$, vesměs realné;

celkem tudíž dvacetsedm přímek realných.

Jelikož rovnice hyperboly dvojné, jež jako jednoduchá křivka je obsažena v ploše stupně třetího (srov. 3. odst. 2.), jest

$$y^2 - z^2 - a^2 + b^2 = 0$$
$$x - b = 0,$$

poznáváme, že jen přímky $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ s touto hyperbolou se pronikají. Z počátku však jsme pravili, že přímky dle původní transformace těmto přidružené jsou právě hledané přímky plochy posouvání. Poněvadž pak každá z těchto čtyř přímek prochází dvěma ze čtyř dvojných bodů plochy stupně třetího, kterýmž přísluší čtyři *dvojné body smíru* plochy posouvání, jest patrno, že čtyřem přímkám čtyrnásobným $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ přísluší takové též *čtyři přímky smíru* plochy posouvání.

Shledáváme tedy konečně:

Plocha hyperbolicko-hyperbolická má čtyři přímky smíru, z nichž každou dlužno počítati za čtyrnásobnou, čili:

Šestnácte přímek plochy hyperbolicko-hyperbolické složeno jest ze čtyř skupin po čtyrech, splývajících vždy v jedinou přímku smíru.

Jest patrno, že pokud při ploše posouvání čtvrtého stupně jsou ony čtyři přímky smíru, jež jsme právě poznali, realnými, že je pak realných všech šestnácte přímek této plochy. Jelikož pak realny jsou ty čtyři přímky jen tehdy, jsou-li realny všechny čtyři dvojné body smíru té plochy (body smíru křivky řídící a tvořící), kdežto v případě jiném žádná z nich není realna, lze říci:

Plôchy posouvání stupně čtvrtého mají buď šestnácte realných nebo šestnácte imaginarných přímek smíru.

Přímky ty seřaděny jsou ve *čtyři čtyrnásobné*, má-li plocha *čtyři různé* body dvojné.

Splynou-li dva z nich, budou přímky jen *dvě*, však *osminásobné*, jelikož každá třemi dvojnými body prochází. *Splynou-li* konečně *dva* a *dva* dvojné body v jeden, bude přímka *jediná*, *šestnáctinásobná*.

Podle toho má plocha

hyperb-hyperbolická	*čtyři realné přímky čtyrnásobné*
elliptícko-hyperbolická a elliptícko-elliptická	*čtyři imaginarné přímky čtyrnásobné*
hyperb.-parabolická	*dvě realné přímky osminásobné*
elliptícko-parabolická	*dvě imaginarné přímky osminásobné*
parabolicko-parabolická	*jednu realnou přímku šestnáctinásobnou.*

V Táboře, 8. května 1885.

O elektrických strojích influenčních.

Píše

Dr. K. Domalíp.

Otto z Quericke zřídil, jak známo, první stroj elektrický. Tento stroj, jakož i ostatní na stejném principu založené stroje nebyly dosti výhodné, jelikož energie mechanická, z které v těchto strojích energie elektrická vzniká, nevyužitkuje se dostatečně k vlastnímu účelu.

Volta podal svým elektroforem nový princip, na jehož základě bylo lze sestaviti stroje elektrické, které výhodněji energii