

Vilém Havlík

Nomogramy transparentální

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 266--270

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109014>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1922

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

1.  $p_1 + q_1 > p_2 + q_2 > p_3 + q_3$
2.  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 > p_3 + q_3, q_1 > q_2$
3.  $p_1 + q_1 > p_2 + q_2 = p_3 + q_3, q_2 > q_3$
4.  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3, q_1 > q_2 > q_3$

Ve všech případech jest  $l_1 > l_3$ , tu jest tedy seřadovací vztah *intransitivní*.

Naproti tomu v případě *b)*  $l_1 < l_3 < s_2$  mohou nastati tyto možnosti:

1.  $p_1 + q_1 < p_3 + q_3, p_3 + q_3 > p_2 + q_2$ .

Tu jest  $l_1 \leq s_2$  dle toho, je-li  $p_1 + q_1 \geq p_2 + q_2$ .

2.  $p_1 + q_1 = p_3 + q_3 > p_2 + q_2, q_1 < q_2$ .

Tu jest vždy:  $l_1 < s_2$ .

3.  $p_1 + q_1 < p_3 + q_3 = p_2 + q_2, q_3 > q_2$ .

Zde obráceně  $l_1 > s_2$ .

4.  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3, q_1 < q_3, q_3 > q_2$

Tu jest  $l_1 \leq s_2$  dle toho, je-li  $q_1 \geq q_2$ .

Každé tři prvky  $l_1 < s_2 < l_3$  řídí se zde tedy pravidlem netransitivním, čehož nelze říci, jestliže  $l_1 < l_3 < s_2$ . Pro trojice  $l, s, l'$  nebo  $s, l, s'$  jest tedy vytčený vztah přiřadovací intransitivní, pro trojice  $l, l', s$ ;  $l, s, s'$  pak netransitivní. Tento poznatek lze rozšířiti i na množiny složené z více ( $k$ ) úplně seřazených množin, případně na množiny složené ze dvou ( $k$ ) spočetných množin, jichž prvky jsou opět množiny spočetné a konečné i na množiny s mohutností kontinua.

## Nomogramy transparentální.

Napsal Dr. V. Havlík.

1. V VI. kapitole svého „Traité de Nomographie“ poukázal M. d'Ocagne na možnost užití třetího základního principu theoretické nomografie — na užití „superposice rovin“.

Princip sám i další theorie — obojí jest jednoduché: Při nomogramech intersekčních, kollineačních a pod. přiřazují se sobě vždy jistým způsobem elementy (body a čáry) v jedné operační rovině. Nyní budeme k sobě přiřazovati elementy dvou i více rovin. To tak: na pevnou rovinu položíme jinou, průhlednou rovinu („transparent“) způsobem, jenž by zaručoval určitost té polohy na základě posičních vztahů mezi některými elementy obou rovin, a pak najdeme vztah mezi těmito a ostatními elementy obou rovin — resp. mezi jich kotovými parametry.

2. Abychom odvodili vzorce pro dva nejjednodušší a zároveň nejcennější typy uvažovaných nomogramů, postupujme takto:

V rovině  $R_1$  jsou čtyři systémy křivek  $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ , daných dvojmo parametrickými rovnicemi

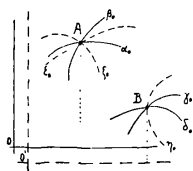
$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(\alpha, \beta), & y &= \psi_1(\alpha, \beta), \\ x &= \varphi_2(\gamma, \delta), & y &= \psi_2(\gamma, \delta); \end{aligned}$$

v rovině  $R_2$  jsou pak tři soustavy  $[\epsilon, \zeta, \eta]$ , dané rovnicemi

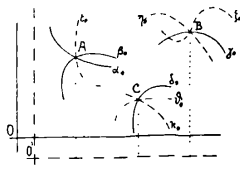
$$\begin{aligned} x' &= \varphi_3(\epsilon, \zeta), & y' &= \psi_3(\epsilon, \zeta), \\ x' &= \Phi(\eta, t), & y' &= \Psi(\eta, t), \end{aligned}$$

kde  $t$  jest proměnný parametr.

$R_2$  položíme na  $R_1$  tak, aby průsečík křivek  $(\alpha_0)$  a  $(\beta_0)$  padl na průsečík  $[(\epsilon_0) \cdot (\zeta_0)]$  a osy  $X$  a  $X'$  byly rovnoběžny. Průsečík



Obr. 1.



Obr. 2.

$[(\gamma_0) \cdot (\delta_0)]$  vytkne nám pak jistou křivku  $(\eta_0)$ . — Z požadavku prvního a z rovnic (2) plynou difference koordinat

$$\begin{aligned} a &= \varphi_1 - \varphi_3 \\ b &= \psi_1 - \psi_3 \end{aligned}$$

které když dosadíme do relací

$$\begin{aligned} y_2 &= \Psi(\eta, t) + a \\ \psi_2 &= \Psi(\eta, t) + b, \end{aligned}$$

jež vyjadřují podmínku, aby bod  $[(\gamma) \cdot (\delta)]$  ležel na křivce  $(\eta)$ , dostaneme rovnice

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \Phi(\eta, t) &= \varphi_2 + \varphi_3 \\ \psi_1 + \Psi(\eta, t) &= \psi_2 + \psi_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

z nichž jest ještě po vhodné specialisaci křivek  $(\eta)$  vyloučiti  $t$ .

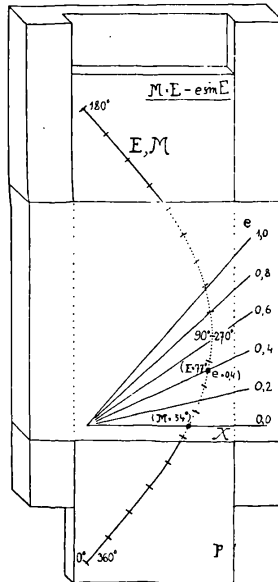
3. Podobně jest tomu při sestavě druhé. V  $R_1$  jsou čtyři systémy dané parametricky:

$$\begin{aligned}
 x &= \varphi_1(\alpha, \beta), & y &= \psi_1(\alpha, \beta), \\
 x &= \Phi_1(\gamma, t_1), & y &= \Psi_1(\gamma, t_1), \\
 x &= \Phi_2(\delta, t_2), & y &= \Psi_2(\delta, t_2),
 \end{aligned}$$

a v rovině  $R_2$  systémů pět:

$$\begin{aligned}
 x &= \Phi_3(\epsilon, t_3), & y &= \Psi_3(\epsilon, t_3), \\
 x &= \varphi_2(\zeta, \eta), & y &= \psi_2(\zeta, \eta), \\
 x &= \Psi_3(\delta, \kappa), & y &= \psi_3(\delta, \kappa);
 \end{aligned}$$

polohu zavedeme pak takovou, aby jednak osy  $X$  a  $X'$  byly rovno-



Obr. 3.

běžny a jednak průsečík  $[(\alpha_0) \cdot (\beta_0)]$  ležel na  $(\epsilon_0)$  a  $[(\zeta_0) \cdot (\eta_0)]$  na  $(\gamma_0)$ . Průsečík  $[(\alpha_0) \cdot (\delta_0)]$  pak ukazuje příslušnou křivku  $(\delta_0)$ . — Z relací pro bod  $A$  plyne:

$$\begin{aligned}
 a &= \varphi_1 - \Phi_3, \\
 b &= \psi_1 - \psi_3,
 \end{aligned}$$

což dosazeno do rovnic pro body  $B$  a  $C$  dá rovnice

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\gamma, t_1) - \Phi_3(\varepsilon, t_3) &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \Psi_1(\gamma, t_1) + \Psi_3(\varepsilon, t_3) &= \psi_1 + \psi_2 \\ \Phi_2(\delta, t_2) + \Phi_3(\varepsilon, t_3) &= \varphi_1 + \varphi_3 \\ \Psi_2(\delta, t_2) + \Psi_3(\varepsilon, t_3) &= \psi_1 + \psi_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

z nichž zbývá eliminovat ještě  $t_1, t_2, t_3$ .

Zavedeme-li nyní do těchto sestav na místo obecných křivek daných parametricky rovnicemi:

$$x = \Phi_i(\alpha_i, t_i) \quad y = \psi_i(\alpha_i, t_i)$$

přímky mající rovnice tvaru

$$x_i f_i(\alpha_i) + y_i g_i(\alpha_i) + h_i(\alpha_i) = 0,$$

dostaneme na místě rovnic (1) a (2) velmi cenné rovnice:

$$f(\eta) [\varphi_1(\alpha, \beta) - \varphi_2(\gamma, \delta) - \varphi_3(\varepsilon, \zeta)] + g(\eta) [\psi_1(\alpha, \beta) - \psi_2(\gamma, \delta) - \psi_3(\varepsilon, \zeta)] + h(\eta) = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &+ [f_1(\gamma) \cdot \varphi_2(\zeta, \eta) + g_1(\gamma) \cdot \psi_2(\zeta, \eta) + h_1(\gamma)] \cdot [g_2(\delta) \cdot f_3(\varepsilon) - f_2(\delta) \cdot g_3(\varepsilon)] + \\ &+ [f_2(\delta) \cdot \varphi_3(\vartheta, k) + g_2(\delta) \cdot \psi_3(\vartheta, k) + h_2(\delta)] \cdot [f_1(\gamma) \cdot g_3(\varepsilon) - g_1(\gamma) \cdot f_3(\varepsilon)] + \\ &+ [f_3(\varepsilon) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + g_3(\varepsilon) \cdot \psi_1(\alpha, \beta) + h_3(\varepsilon)] \cdot [f_1(\gamma) \cdot g_2(\delta) - g_1(\gamma) \cdot f_2(\delta)] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Prakticky užitečný vzorec dostaneme v typu prvním touto specialisací:

$$\Phi = t = x, \quad \Psi = \sqrt{(r(\eta))^2 + x^2}.$$

Totíž:

$$\begin{aligned} &[\varphi_1(\alpha, \beta) - \varphi_2(\gamma, \delta) - \varphi_3(\varepsilon, \zeta)]^2 + [\psi_1(\alpha, \beta) - \psi_2(\gamma, \delta) - \psi_3(\varepsilon, \zeta)]^2 = \\ &= (r(\eta))^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Rovněž různé logaritmické křivky možno s prospěchem zaváděti, arci s příslušnou logaritmickou transformací souřadnic.

Z praktických aplikací budtež uvedeny tyto dvě:

#### 4. Početní pravítka pro rovnici Keplerovu.

Položme v rovnici (6):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, & \psi_1 &= M, \\ \varphi_2 &= \sin E, & \psi_2 &= E, \\ \varphi_3 &= 0, & \psi_3 &= 0, \\ f &= e, & g &= 1, \quad h = 0. \end{aligned}$$

Tím nabude známého tvaru:

$$M = E - e \sin E.$$

Ježto bod  $O(0,0)$  se musí pohybovat po ose  $Y$  a dále musí býti  $X \parallel X'$ , jest jasno, že možno nomogram tento zaříditi jako po-

četní pravítko. Uvážíme-li dále, že podle  $E$  stupňovaná křivka

$$y = \text{arc sin } x$$

a podle  $M$  stupňovaná osa  $Y$  mají stejné „řídící rovnice kotování“:

$$y = E, \quad y = M,$$

nahlédneme snadno, že lze toto pravítko konstruovati, jak obr. 3. znázorňuje. — Užití: Posouvátko  $p$  vysuneme tak, aby přímka  $X$ , naznačená na průsvitném papíře, nalepeném na drážce, protínala křivku ( $E, M$ ) v kotě  $M_0$ ; paprsek ( $e_0$ ) — na průsvitném papíře — protne pak touž křivku v kotě  $E_0$ .

5. *Věta Carnotova.* Známou relaci v trojúhelníku:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

si píšeme ve tvaru

$$(b - c \cos \alpha)^2 + (-c \sin \alpha)^2 = a^2$$

a klademe pak v rovnici (8):

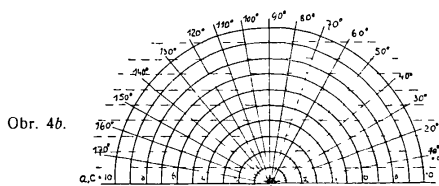
$$r = a$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0,$$

$$\varphi_2 = -b, \quad \psi_2 = 0,$$

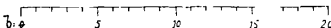
$$\varphi_3 = c \cdot \cos \alpha, \quad \psi_3 = c \sin \alpha.$$

Narýsujeme-li si pak na okraj proužku papíru stupnici pro  $b$  (obr. 4a)



Obr. 4b.

Obr. 4a.



můžeme postupovati takto: Počátek stupnice ( $b$ ) klademe do průsečíku paprsku ( $a_0$ ) a kružnice ( $c_0$ ) tak (na obr. 4b), aby byla rovnoběžna se směrnými přímkami ( $\xi$ ); kružnice ( $a_0$ ) vytýká nám pak na ní bod o kotě  $b_0$ .

\*

Seznal jsem, že princip superposice rovin není třeba pojměti jako nepraktickou theoretickou kombinaci. Jest to princip praktické a skutečně dobré aplikace schopný a právě nejjednodušší soustavy vedou tu ke vzorcům prakticky nejužitečnějším.