Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 1, 47--48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108997

$$x' = \frac{-2y^2 - 2x^2 + px}{2x - p}, \quad y' = -\frac{2py}{2x - p},$$

a to položivše do (9)

$$0 = x[-4(x^2 + y^2) + 4px - p^2].$$

Hledané geometrické místo se tedy skládá z přímky $x = 0$ t. j. z vrcholové tečny, a z čáry o rovnici

$$4(x^2 + y^2) - 4px + p^2 = 0,$$

čili

$$4[y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2] = 0,$$

t. z přímek imaginárných

$$y = i(x - \tfrac{1}{2}p), \quad y = -i(x - \tfrac{1}{2}p),$$

vedených ohniskem a sice o směrnicích $\pm\sqrt{-1}$. Jich vyskytnutí právě tak se vysvětluje jako při ellipse a to si laskavý čtenář bez obtíže sám doplní. *W.*

Úlohy.

Řešení úlohy 13. z roč. XI.

(Napsal pan *Em. Heinemann*, technik.)

Rovnice daných rovin jsou:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &\equiv x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0,\\ A_2 &\equiv x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0,\\ A_3 &\equiv x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 - p_3 = 0,\\ A_4 &\equiv x\cos\alpha_4 + y\cos\beta_4 + z\cos\gamma_4 - p_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Položme determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & -p_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & -p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & -p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & -p_4 \end{vmatrix} = \Delta$$

a subdeterminanty stupně třetího nazvemež $S_{h,k}$.

Rovinami danými stanovený čtyrstěn bude míti vrcholy M_1, M_2, M_3, M_4, jakožto proniky rovin $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Souřadnice libovolného vrcholu na př. M_3 určíme z rovnice 1), použijeme-li Binetova označení determinantů následovně:

$$x_3 = \frac{(p_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}, \quad y_3 = \frac{(\cos\alpha_1, p_2, \cos\gamma_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)},$$

$$z_3 = \frac{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, p_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}.$$

Opakujeme-li to pro všecky body, shledáme, že vzhledem k determinantu Δ

$$x_k = \frac{S_{k,1}}{S_{k,4}}, \quad y_k = \frac{S_{k,2}}{S_{k,4}}, \quad z_k = \frac{S_{k,3}}{S_{k,4}}. \qquad 2)$$

Výška v_k, jakožto vzdálenost bodu M_k od roviny A_k bude určena rovnicí:

$$v_k = x_k \cos \alpha_k + y_k \cos \beta_k + z_k \cos \gamma_k - p_k,$$

aneb dosadíme-li hodnoty z rovnic 2)

$$v_k = \frac{\cos \alpha_k S_{k,1} + \cos \beta_k S_{k,2} + \cos \gamma_k S_{k,3} - p_k S_{k,4}}{S_{k,4}}$$

čili

$$v_k = \frac{\Delta}{S_{k,4}};$$

bude tedy

$$\Sigma \frac{\cos \alpha_k}{v_k} = \Sigma \frac{\cos \alpha_k S_{k,4}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \Sigma \cos \alpha_k S_{k,4} = 0,$$

neboť $\Sigma \cos \alpha_k S_{k,4}$ představuje determinant Δ, v němž prvky 4tého sloupce nahraženy jsou prvky v sloupci prvém; hodnota tohoto faktoru je tedy 0. Podobně

$$\Sigma \frac{\cos \beta_k}{v_k} = \frac{1}{\Delta} \Sigma \cos \beta_k S_{k,4} = 0,$$

a

$$\Sigma \frac{\cos \gamma_k}{v_k} = \frac{1}{\Delta} \Sigma \cos \gamma_k S_{k,4} = 0.$$

Zároveň je patrno, že

$$\Sigma \frac{p_k}{v_k} = -1.$$

Úlohy.

1.

Jak velký jest hmotný obsah K vrstvy o výšce $V = 4^7/_8$ cm vykrojené dvěma rovnoběžnými rovinami ze soustředně duté koule, je-li její podstavou mezikruží $M = 24{\cdot}923$ □ cm?

Prof. *Vavř. Jelínek.*

2.

Kouli $T = 9{\cdot}945$ kgr. těžkou ze hmoty o specifické váze $\tau = 7{\cdot}543$ máme kuželovitě zakončiti, až by byla o $t = 2{\cdot}088$ kgr. lehčí; jak dlouhé budou strany s kužele, mají-li býti tětivami koule?

Týž.