Nemáme tedy právo, výrazy A a A″ pokládati za identické. Zda-li mají pro jednotlivé (třebas i soujemné) hodnoty veličiny t úkony jejich A a A″ (z nichž první jest dán v mezích $0 \lesseqgtr t < 2$, druhý v mezích $-\infty \lesseqgtr t \lesseqgtr +\infty$) stejné hodnoty, mohlo by se vyšetřiti pouze pomocí úvah, na všeobecné theorii funkcí jedné proměnné založených.

Postupným derivováním řady A dle t zjednáme si nové řady, které zase nejsou řadami absolutně konvergentními, když je rozvineme dle mocností veličiny t, a které tudíž také nesmíme pokládati za identické s postupnými derivacemi výrazu A″, totiž s veličinami: $-2, 0, 0 \ldots.$

Doklady pro to, že řady derivováním řady A zjednané s derivacemi výrazu A″ nesouhlasí, zjednáme si v jednotlivých případech snadným výpočtem. Záporně vzata první derivace řady A:

$$B = \sum_{0}^{\infty} t^{n-1}(1-t)^{e_n - 1}\,[te_n - n(1-t)]$$

poskytuje na př. pro $t = \frac{1}{2}$ řadu:

$$\frac{e_0}{2^{e_0-1}} + \frac{e_1 - 1}{2^{e_1}} + \frac{e_2 - 2}{2^{e_2+1}} + \frac{e_3 - 3}{2^{e_3+2}} + \ldots$$

jejíž numerická hodnota není 2, nýbrž

$$\frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^7} + \frac{9}{2^{14}} + \ldots = 0{\cdot}9692993 \ldots.$$

Hoene-Wrońského Canony logarithmů.

Napsal

J. Beneš v Praze.

Nejrůznější, přečetná vydání tabulek logarithmických neliší se podstatně, nehledíme-li na různosť typografické úpravy, od pravzorů svých ze století sedmnáctého, od logarithmických kánonů Briggsových, Napierových, Vlacqových, Ursinových a j., a vyžadují všechny celkem i stejného postupu při upotřebení praktickém. Sestaveny jsou tak, aby vzájemně sobě odpovídající čísla a logarithmy stanoveny byly pohodlně a jistě cestou nejpřímější, dle možnosti jediným vypsáním a příslušnou interpolační opravou. Argumentem, prostou arithmetickou řadu tvořícím jsou nyní pravidlem čísla — tabulky antilogarithmické, u nichž tomu tak kdysi bývalo s logarithmy, vyšly z užívání. Pro úpravu jest pak rozhodující okolností časová úspora a spojený s ní, neméně důležitý psychologický důsledek: postup nevyžaduje tu značnějšího napjetí myšlenkového.

Za to otázka po prostoru tabulkám nutně věnovaném ustupuje zvykle do pozadí. Byla sice úprava zdokonalena zjevně i v tom směru, ale různé ty změny jsou jen spíše typografického a vždy formálního rázu — o tom pak, zda nebyla by možnou změna věcného rázu, neučiněno ani mnohých, výsledky významnějších pokusů, ježto praxe, zvyklosť a spojená s ní jistota počtářská zůstaly zde právem panujícími momenty.

Nedivno tedy, že otázkou po úspoře prostoru v tabulkách logarithmických zabýval se duch člověka, z jehož i jiných prací, podobně jako z průběhu jeho života zírá podivínství, spojené však s nepopíratelnými příznaky genia, jehož stopy, nehledě na problematický praktický výsledek, zjevny jsou i na zajímavém pokusu, s nímž chci studentstvo v následujících řádcích obeznámiti.

I.

R. 1827 vydal v Paříži usedlý vystěhovalec z Poznaňska, z rodu Hoene, s přijatým jménem Wroński, dílko *Canons de logarithmes de H. W.* (stran 64), na němž již z titulu znáti zálibu autorovu v nezvyklostech, jakou jest návrat ku starému jménu kánon, jímž počtáři století minulých *) označovali každý obecný vzorec (na příklad pro kořeny rovnice stupně druhého neb třetího) a každou tabulku čísel, v nichž nějaké, obyčejně aritmetické řadě čísel odpovídala dle určitého zákona řada jiná, čili kánonem slula tehdy tabulka některé funkce. Tak označována tabulka funkcí goniometrických jmenem *Canon Triangulorum (naturale)* a po zavedení logarithmů nazývána tabulka logarithmů těchže funkcí *Canon Triangulorum artificiale.*

Dílko Wrońského obsahuje 6 tabulek logarithmických

*) V tomto století užil slova toho Jacobi r. 1843.

v novém, nezvyklém uspořádání a zároveň (s dodatkem o methodě pro řešení rovnic pátého stupně) theorii a návod, jak tabulek upotřebiti. Každá z nich obsažena na jediné stránce a zastupuje úplné tabulky briggických logarithmů čili úplný kánon. Jsou opatřeny čísly, a sice tvoří kánon čís. 1. tabulku logarithmů čtyřmístných, kánony čís. 1. bis, 2. a 3. jsou třemi různými varianty logarithmů pětimístných, kánon čís. 3. bis šestimístných a čís. 4. konečně sedmimístných.

Z nich byl onen čís. 1. bis otištěn v letech čtyřicátých v encyklopaedii Lalanneově *„Un million de faits“* a všechny s textem ruským vydal znovu *Annĕnkov* r. 1845 v Petrohradě, jinak ale nedošly, podobně jako ostatní práce Wrońského, zasloužené pozornosti a neminu se tuším s pravdou, řeknu-li, že příčinou toho byl autor, jenž jest pathologickým zjevem tehdejší vědecké společnosti, obětí slávy francouzské školy mathematické, obětí komplikovaných poměrů, v nichž žil a myslil, a obětí vlastní roztříštěnosti myšlenkové. Teprvé od let sedmdesátých obrácena znovu v Anglii, Francii, Italii, Polsce a Belgii pozornosť k jeho pracím, ano vyskytla se celá řada seriosních pracovníků, očišťujících jméno Wroński z pohany, posměchu a zapomenutí, v něž uvrženo od roku 1811. rozhodnutím Institutu francouzského.

V Polsce vedle L. Niedźwieckého jest to zvláště S. Dickstein, který nedávno řadu svých prací o Wrońském rozmnožil prvním polským vydáním kánonů Wrońského*), dle něhož podávám výklad kánonu čís. 1. bis, otištěného na str. 32. Zvolil jsem právě ten, poněvadž odpovídá běžným v našich školách pětimístným tabulkám Studničkovým a zaujímá ze tří variantů nejmenší prostor. Význam některých konstant, vytištěných pro vyplnění místa v jeho levém dolním a pravém horním rohu, netřeba vykládati.

Při výkladu prosím čtenáře, by se mne neptal, proč to či ono tak a nejinak upraveno — jsem přesvědčen, že po přečtení pozorném a po provedení několika příkladů dovede kánonu užívati a nebude již tak zvědavým.

*) *Kanony logarytmów Hoene-Wrońskiego.* Wydał S. Dickstein. Warszawa. Wydawnictwo redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych“. 1890. Str. 30; se šesti tabulkami.

II.

Všimněme si kánonu blíže.

Sestává z pásem A, B, C_1, C_2, D_1, D_2, D_3 a E, a ze sloupců I—IV., (0)—(10). Každé z pásem C_1, C_2 a E tvoří 5 řádek, pásma A a B obsahují po čtyřech a D_1, D_2 a D_3 po třech řádcích. Označujme si na dále obdélník společný na př. pásmům C_1 a C_2 se sloupci (3), (4) a (5) znakem [C_1, C_2 | (3), (4), (5)]. Popatřme nejprvé na obdélník [B | (10)]. Rozdělen jest svislicí ve dva: v levém jsou pod sebou čísla 1, 2, 4, 5, z nichž kterékoli označme sobě na dále krátce ω. Desítinásobky čísel ω jsou v levé polovici obdélníku [B | (0)] a také v horní polovici obdélníku [B | I—IV]. Dále tvoří čísla ω první řádky obdélníků [C_1 | I—IV] a [D_1 | I—IV]: v prvním předložena jim dolní tečka a této nula, v druhém nula a této podobně tečka. V obou napsány postupně dolů obdobným způsobem násobky čísel ω. Levé poloviny obdélníků [B | (0)], [B | (1)], . . ., [B | (9)] obsahují v prvním řádku čísla 10, 11, . . ., 19 a pod těmito jejich násobky čísly ω, označené tečkami v pravo dole. Všimneme-li si číslic v pravo za svislicemi, poznáme v nich snadno, obyčejné tabulky při ruce majíce, první desetinky mantiss pro logarithmy briggické dvouciferných čísel, před svislicemi umístěných — na př. vedle 64. číslici 8 a log 64 = ·8 . . . Pohlédněme na kterém řádku pásma B od shora se nalézají (v našem příkladě na třetím). V čtyřciferném čísle (0618) právě tolikátého (třetího) řádku pásma A a v tomže sloupci (6) umístěného poznáváme 2., 3., 4. a 5. místo mantissy, takže log 64 = ·8|0618. Podobně na př. log 13 = ·1 . . . dle *prvního* řádku obdélníku [B | (3)] a log 13 = ·1|1394 dle *prvního* řádku obdélníku [A | (3)].

Možno tedy z kánonu přímo vypsati pětimístní logarithmus briggický čísel 10, 11, . . ., 19, jakož i jejich násobků číslem ω a některou celistvou mocninou čísla deset.

Jedná se ale o čísla ostatní. Obyčejné pětimístné logarithmy dovolují přímo vypsati logarithmus každého čtyřciferného čísla.

Snažme se nejprvé logarithmus takového čísla (na př. 6348) z kánonu stanoviti. Nedbajíce pravého významu desetinných míst v čísle, rozdělme si číslo po dvou číslicích dolní tečkou

(63.48) a považujme, pominouce zvyku, tečku tuto jako oddělující desítky od jednotek. Všimněme si počtu desítek (63.) a vyhledejme v pásmu B a A uvedeným již způsobem mantissu pro číslo, mající týž nebo nejblíže nižší počet desítek (60). V našem příkladě nalezají se její části ve sloupci (5) na *třetích* řádcích pásem B a A. Položme malík levé ruky v pásmu B na *právě tolikátý ze sloupců I—IV, na kolikátém řádku jsme* byli právě *v pásmech* B *a* A *mantissu vyhlídli* (na III.), ukazováčkem pak, nebo jiným vhodným prstem levé ruky označme sobě sloupec (5).

Dosud oddělili jsme z daného *čísla* (63.48) jeho *složku počáteční* (60.) a stanovili odpovídající této *počáteční složku mantissy* (·7 | 7815). V různých příkladech, jaké si provedeme, zbývají nám 0, 1, 2 nebo 3 desítky, odečteme-li počáteční složku čísla od skutečného počtu jeho desítek (v našem příkladě 63.—60. = 3.). Přidělme k nim počet jednotek (4, tedy dohromady 3.4) a pošiňme oba prsty, každý na dotyčném sloupci zachovajíce, dolů do pásem C_1 a C_2, a sice až tam, kde v nich ve sloupci malíkem označeném nalezneme číslo, ze zbytku desítek a přidělených jednotek právě určené, nebo číslo témuž nejblíže nižší (v našem příkladě na 3. řádku pásma C_2, ve sloupci III. číslo o dvě jednotky nižší: 3.2).

Toto tvoří druhou, *střední složku* daného *čísla* a zbytek jednotek (3.4 — 3.2 = 0.2) s přiděleným počtem desetin (v našem př. 8, tedy 0.28) poslouží nám později pro *konečnou složku čísla* a její doplňky. Tam kde křižuje se řádka, v níž nalezena složka střední, se sloupcem složky prvé, ukazováčkem označeným, nalezá se čtyřciferné číslo (2257), tvořící *střední složku mantissy* a patřící pod 2., 3., 4. a 5. desetinné místo počáteční složky mantissy a tam tedy také napsané.

Všimněme si jaké číslo nalezá se v sloupci (10) na témže řádku, kde jest střední složka čísla a mantissy a vypišme si je (α) po straně (0.2); na témže řádku, však ve sloupci I jest číslo (0.8) doplňující se s předešlým na desítku (0.2 + 0.8 = 1.0).

Sjeďme nyní opět malíkem a ukazováčkem dolů, do pásem D_1, D_2 a D_3 až tam, kde se nám ve sloupci malíkem označeném objeví číslo (*konečná složka* daného *čísla*) rovné nebo nejblíže nižší onomu, jež utvořeno ze zbytku jednotek přidáním desetin (0.28). (V našem příkladě najdeme číslo právě rovné a sice na prvé řádce pásma D_3 ve sloupci III.; jest tedy v příkladě tom dané číslo již vyčerpáno.)

Na tomže řádku, kde nalezena konečná složka čísla, *však ve sloupci* (6) *sousedícím na pravo onomu, na němž ukazováček držíme,* umístěna tříciferná (3., 4. a 5. des. místo) *konečná složka mantissy* (189).

Zbývá nyní oprava konečné složky logarithmu. Zárodkem jejím jest číslo α (0.2), výše po straně vypsané. Nápadné snad bylo čtenáři, že složka konečná mantissy vytištěna jest jaksi nedůsledně, ne ve sloupci, v němž byla počáteční a střední složka téže, nýbrž ve sloupci v pravo sousedícím tomuto. Rozdíl těchto dvou sousedních čísel (202 — 189 = 13), násoben číslem α (0.2), považovaným jako desetinný zlomek (0·2), dá opravu konečné složky mantissní (0·2 $\times$ 13 = 2·6); oprava se po straně ku složce přičte, tak jakoby tečka byla mezí místa desetinného 5. a 6.

Aby zmíněný posledně rozdíl nemusel býti teprve stanoven, jsou jím vyplněny obdélníky pásma E a vyhledá se v něm následovně: Povšimneme sobě čísla, napsaného ve sloupci I na tomže řádku, v němž nalezena konečná složka. Platnou jeho číslici (7) vyhledáme sobě v obdélníku [E | (10)], v jehož pěti řádcích jsou vždy dvě číslice od sebe čárkou oddělené. Na téže řádce pásma E (řádka 2.), na téže straně čárky v onom sloupci, v němž nalezena počáteční a střední složka mantissy (tedy ve sl. (5) pro náš př.) vidíme dvouciferné číslo (13), jenž jest hledaným rozdílem příslušných dvou sousedních trojciferných čísel pásem D_1, D_2, D_3.

Při vypisování složek zvykneme sobě určitého sestavení, na př. asi tohoto pro náš příklad:

	Číslo 63.48	Mantissa	Oprava
Počáteční složka	60.	·77815	0.2
Střední „	3.2	2257	13
Konečná „	.28	(S opravou) 192	2.6
	log 6348	= ·80264	Koneč. sl. 189
			191.6

Často se stane, že střední složka čísla a tedy také i logarithmu jest nulou, důsledně bylo pak číslo α = 1.0, poznáváme však snadno, že oprava třetí složky logarithmu odpadá, vypíšeme-li složku samu *v tomto případě* právě z onoho sloupce, v němž byla počáteční a střední složka mantissní.

Čtyrciferné číslo za příklad volené vyčerpalo se úplně svými třemi složkami; u jiných čtyrciferných zbývá 1, 2 až 3 desetinky (ve smyslu umluveného na počátku pojmenování). Tu přidáme k těmto na pravo nulu a provedeme pomocí pásem D_1, D_2, D_3 a E pochod, jakým jsme postupovali při konečných složkách, s tím však rozdílem, že opětovanou takto konečnou složku píšeme i v logarithmu o jedno místo na pravo. Podobně pokračujeme, je-li dané číslo pěticiferné: Ku zbytku po třetí složce přidáme tu ovšem ne nulu, nýbrž pátou číslici a v postupu se dle potřeby i pokračuje a to na př. pro číslo 37279 asi takto:

37.279	Logarithmus	Opravy		
36.	·55630	0.4	0.4	0.4
1.2	1424	4	11	6
.06	696	1.6	4.4	2.4
.18	2094	68	205	114
.10	1164	696	209 4	116 4
log 37 279 =	·57146			

Snadno se čtenář domyslí opačného pochodu pro stanovení čísla k logarithmu danému. Postup vyžaduje ovšem také náležité pozornosti a cviku, který se však po málo příkladech dostavuje. Mnohý z naznačených výkonů pak odpadne nebo se rychle v paměti provede. Cvičení brzo ukážou, že jistota 5. desetinky poněkud kolísá.

Mnohá slabá stránka, hlavně pak rušící zdlouhavosť postupu odpadla by při logarithmech o základu 2. Za to pokud so prostoru týče, redukuje se tento v kánonu č. 4. oproti tabulkám, vydaným Bordou, na $\frac{1}{91}$.

III.

Theoretický podklad kánonů Wrońského zřídlí ve vzorcích počtu differenčního*), upotřebených na logarithmus. Pro pětimístné tabulky jest jednoduše asi tento:

Označíme-li

$$\log(a+b) - \log a = \triangle_b \log a,$$

jest v mezích přesnosti určitých tabulek

$$\log(a+b) \doteq \log a + b \triangle_1 \log a,$$

jakož i

$$\log(a+b) \doteq \log a + \triangle_b \log a,$$

je-li jen a nápadně $> b$.

Podobně pro $p > s > k$ jest

$$\log(p+s+k) \doteq \log(p+s) + k \triangle_1 \log(p+s)$$
$$\doteq \log p + \triangle_s \log a + k \triangle_1 \log(p+s),$$

a jak snadno dále plyne

$$\log(\omega p + \omega s + \omega k) \doteq \log(\omega p) + \triangle_s \log p + k \triangle_1 \log(p+s).$$

Již pro samotné logarithmy platí za podobných okolností, že pro $s < t$ jest

$$\log(p+s) \doteq \log(p+t) - \left(1 - \frac{s}{t}\right) \triangle_t \log p;$$

tím spíše pro differenci $\triangle_1$ platí vztah

$$\triangle_1 \log(p+s)$$
$$= \triangle_1 \log(p+t) + \left(1 - \frac{s}{t}\right) \{\triangle_1 \log p - \triangle_1 \log(p+t)\}.$$

Jest tedy platným vzorec

*) Viz Booleovo kompendium téhož: A treatise on the calculus of finite differences. Londýn 1886. Třetí, Moultonovo vydání.

$$\log(\omega p + \omega s + \omega k) \doteq \log(\omega p) + \triangle_s \log p + k \triangle_1 \log(p+t)$$
$$+ \left(1 - \frac{s}{t}\right) z \{\triangle_1 \log p - \triangle_1 \log(p+t)\},$$

v němž ωp, ωs, ωk jsou počáteční, střední a konečná složka čísla, log (ωp) počáteční, $\triangle_s \log p$ střední, $k \triangle_1 \log(p+t)$ konečná složka mantissy a člen $\left(1 - \frac{s}{t}\right) z \{\triangle_1 \log p - \triangle_1 (p+t)\}$ její opravou, již různým rozdělením činitelů členu můžeme vykonati i jiným způsobem, než výše vyznačeným.

Kánon sedmimístný vyžaduje pro přesnosť 7. des. místa další opravný člen

$$-k \frac{s(t-s)}{1.2} \triangle_1{}^3 \log p,$$

jehož hodnota pro menší kánony mizí. Uvedený vzorek pro $\log(\omega p + \omega s + \omega k)$ jest výhodný hlavně tím, že jen počáteční složka mantissy jest odvislou od součinitele ω.

Číslo k při opakujících se konečných složkách sestává z čísel k_1, $k_2, \ldots$, klesajících v pořadí desetinek. Různé kánony Wrońského liší se od sebe hodnotami ω, p, s, k, t; v otištěném tu kánonu 1. bis jest

$$\omega = 1,\ 2,\ 4,\ 5,$$
$$p = 110,\ 120, \ldots,\ 190,$$
$$s = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 10,$$
$$k = 0{\cdot}1,\ 0{\cdot}2, \ldots,\ 0{\cdot}9$$

a $$t = 10.$$

I	II	III	IV	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
Hoene-Wrońského canon logarithmů čís. 1 bis.				0000	4139	7918	1394	4613	7609	0412	3045	5527	7875	0·43429	A
				0103	4242	8021	1497	4716	7712	0515	3148	5630	7978	9·63778	
				0206	4345	8124	1600	4819	7815	0618	3251	5733	8081		
				9897	4036	7815	1291	4510	7506	0309	2942	5424	7772		
10	20	40	50	10. 0	11. 0	12. 0	13. 1	14. 1	15. 1	16. 2	17. 2	18. 2	19. 2	1 0·5	B
				20. 3	22. 3	24. 3	26. 4	28. 4	30. 4	32. 5	34. 5	36. 5	38. 5	2 1	
20	40	80	100	40. 6	44. 6	48. 6	52. 7	56. 7	60. 7	64. 8	68. 8	72. 8	76. 8	4 2	
				50. 6	55. 7	60. 7	65. 8	70. 8	75. 8	80. 9	85. 9	90. 9	95. 9	5 2·5	
0.1	0.2	0.4	0.5	0432	0393	0361	0333	0309	0289	0271	0255	0241	0228	0.9	C_1
0.2	0.4	0.8	1.0	0860	0783	0718	0663	0616	0575	0540	0508	0480	0455	0.8	
0.3	0.6	1.2	1.5	1284	1169	1073	0991	0921	0860	0807	0760	0718	0681	0.7	
0.4	0.8	1.6	2.0	1703	1551	1424	1316	1223	1143	1072	1010	0955	0905	0.6	
0.5	1.0	2.0	2.5	2119	1931	1773	1639	1524	1424	1336	1259	1190	1128	0.5	
0.6	1.2	2.4	3.0	2531	2307	2119	1960	1822	1703	1599	1506	1424	1351	0.4	C_2
0.7	1.4	2.8	3.5	2938	2680	2462	2278	2119	1981	1860	1752	1657	1572	0.3	
0.8	1.6	3.2	4.0	3342	3049	2803	2594	2413	2257	2119	1997	1889	1792	0.2	
0.9	1.8	3.6	4.5	3743	3416	3141	2907	2706	2531	2377	2240	2119	2010	0.1	
1.0	2.0	4.0	5.0	4139	3779	3476	3219	2996	2803	2633	2482	2348	2228	0.0	
.01	.02	.04	.05	043	039	036	033	031	029	027	025	024	023	022	D_1
.02	.04	.08	.10	086	079	072	067	062	058	054	051	048	046	043	
.03	.06	.12	.15	130	118	108	100	093	087	081	076	072	068	065	
.04	.08	.16	.20	173	157	144	133	124	115	108	102	096	091	087	D_2
.05	.10	.20	.25	216	197	180	166	155	144	135	127	120	114	108	
.06	.12	.24	.30	259	236	216	200	185	173	162	153	144	137	130	
.07	.14	.28	.35	302	275	252	233	216	202	189	178	168	160	152	D_3
.08	.16	.32	.40	346	314	288	266	247	231	216	204	192	182	173	
.09	.18	.36	.45	389	354	324	300	278	260	244	229	217	205	195	
$\pi = 3{\cdot}14159\,265$				04,23	03,20	03,17	02,14	02,12	02,11	02,10	01,08	01,08	01,07	1, 6	E
$\log \pi = 0{,}49715$				08,27	07,23	06,19	05,17	04,14	04,13	03,11	03,10	03,09	02,08	2, 7	
$e = 2{\cdot}71828\,18$				12,31	10,26	08,22	07,19	06,16	05,14	05,13	04,11	04,10	03,09	3, 8	
radián = 206265″				16,35	13,29	11,25	09,21	08,18	07,16	06,14	06,13	05,11	04,10	4, 9	
log. rad. = 5·31443				20,39	16,33	14,28	12,24	10,21	09,18	08,16	07,14	06,13	06,11	5,10	