Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sýkora

Co znamená součtový vzorec řady, je-li počet členů číslo lomené?

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 2, 184--197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108971`

totiž očekávati, že ze tří negativů jakýmikoliv filtry „červeným“, „žlutým“ a „modrým“ provedených na deskách libovolných možno kopírovati tři obrázky, jež by, zbarveny zase libovolnými barvivy, daly pak obrázek v barvách přirozených. Obrázky takové nemusí býti ještě věrné — věrnost reprodukce dána jest pak jediné přísným dodržením těch podmínek fysikálních, na jichž základě možno ze tří barev základních skládati všechny barevné tony a odstíny.

Jak již dříve připomenuto, má trojbarevný tisk v těchto nepřímých fotografických methodách subtraktivních svůj základ. U nás pěstěno jest reprodukční toto umění s velikým zdarem od r. 1893, kdy známý vynálezce světlotisku *prof. J. Husník* se synem svým *Dr. Jar. Husníkem* trojbarevný tisk znamenitě zdokonalil. Oba závody „Husník a Häusler“ na Žižkově a „Unie-Vilím“ v Praze konkurují vedle rozmanitých jiných způsobů reprodukce trojbarevnými svými tisky s nejpřednějšími firmami světovými.

Co znamená součtový vzorec řady, je-li počet členů číslo lomené?

Napsal

Ant. Sýkora,
professor v Rakovníku.

Otázka, lze-li součtových vzorců řad i tehdy užíti, je-li počet členů dán číslem lomeným nebo smíšeným, jest patrně převésti na otázku zde v čele položenou.

Odpověď k ní dává věta:

„Je-li počet členů řady $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *smíšené číslo* $n = m + \frac{r}{s}$, *podává součtový její vzorec* S_n *součet* m *členů*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m$$

zvětšený o prvých r *částí následujícího po nich členu* u_{m+1}, *rozložíme-li jej na* s *takových částí, jež dle téhož zákona utvořeny jsou, jako řada sama.“*

Důkaz.

A. U řady arithmetické.

Rozložíme-li každý člen řady

$$\text{(I)} \qquad a, \quad a+d, \quad a+2d, \ldots$$

na s částí, postupujících dle téhož zákona, jako řada sama, tvořících tedy zase arithmetickou řadu o počátečném členu α a differenci δ:

$$\text{(A)} \qquad \alpha, \quad \alpha+\delta, \quad \alpha+2\delta, \ \ldots,$$

máme k určení neznámých veličin α, δ patrně rovnice

$$\alpha + (\alpha+\delta) + (\alpha+2\delta) + \ldots + (\alpha + \overline{s-1}\,.\,\delta) = a,$$
$$(\alpha+s\delta) + (\alpha+\overline{s+1}\,.\,\delta) + \ldots + (\alpha+\overline{2s-1}\,.\,\delta) = a+d,$$

jež vyjadřují, že prvých s členů řady (A) jsou částky členu a, a dálších s členů částky druhého členu $a+d$ řady (I).

Rovnice tyto lze psáti v podobě

$$s\alpha + \frac{s(s-1)}{2}\delta = a,$$

$$s\alpha + \frac{s(3s-1)}{2}\delta = a+d;$$

z těch vypočteme

$$\text{(B)} \qquad \alpha = \frac{a}{s} - \frac{s-1}{2}\cdot\frac{d}{s^2}, \qquad \delta = \frac{d}{s^2}.$$

Součet $ms+r$ členů řady (A) jest

$$S' = \frac{ms+r}{2}(2\alpha + \overline{ms+r-1}\,.\,\delta)$$

čili, vložíme-li za α a δ jejich právě stanovené hodnoty,

$$S' = \frac{ms+r}{2}\left[\frac{2a}{s} - (s-1)\frac{d}{s^2} + (ms+r-1)\frac{d}{s^2}\right]$$
$$= \frac{ms+r}{2s}\left[2a + \frac{ms+r-s}{s}\,.\,d\right]$$

anebo

$$S' = \frac{m + \frac{r}{s}}{2}\left[2a + \left(m + \frac{r}{s} - 1\right) d\right].$$

Tutéž hodnotu podává vzorec pro součet řady (I)

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + \overline{n-1} \,.\, d\right),$$

klademe-li
$$n = m + \frac{r}{s}.$$

Jest tedy

$$S' = S_n = S_{m+\frac{r}{s}}.$$

Jelikož vždy součet s členů řady (A) dává jeden člen řady (I), jest vskutku $S_{m+\frac{r}{s}}$ roven součtu m členů řady

$$\text{(M)} \qquad a, \quad a + d, \quad a + 2d, \; \ldots, \; a + (m-1)\, d$$

zvětšenému o prvých r částí

$$\text{(N)} \quad (\alpha + ms\delta) + (\alpha + \overline{ms+1} \,.\, \delta) + \ldots + (\alpha + \overline{ms + r - 1} \,.\, \delta),$$

na něž jsme člen u_{m+1} rozložili.

Tento součet (N) bude se rovnati

$$\begin{aligned} & r\alpha + \frac{r}{2}(2ms + r - 1)\,\delta \\ &= r\left(\frac{a}{s} - \frac{s-1}{2} \cdot \frac{d}{s^2}\right) + \frac{r}{2}(2ms + r - 1)\frac{d}{s^2} \\ &= r\frac{a}{s} + \frac{r}{2}(2ms + r - s)\frac{d}{s^2}, \end{aligned}$$

a pročež (M) + (N) bude roven

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2}\left(2a + \overline{m-1} \,.\, d\right) + r\frac{a}{s} + \frac{r}{2}(2ms + r - s)\frac{d}{s^2} \\ &= \left(m + \frac{r}{s}\right) a + \left[m(m-1) + \frac{r}{s^2}(2ms + r - s)\right]\frac{d}{2} \\ &= \left(m + \frac{r}{s}\right) a + \left[\left(m + \frac{r}{s}\right)^2 - \left(m + \frac{r}{s}\right)\right]\frac{d}{2} \\ &= \left(m + \frac{r}{s}\right) a + \left(m + \frac{r}{s}\right)\left(m + \frac{r}{s} - 1\right)\frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 1. Co značí součet S_n řady

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \ldots,$$

je-li $n = 4^1/_2$?

Součtový vzorec

$$S_n = n\,(3 + 2n)$$

podává při

$$n = 4\,\frac{1}{2}, \qquad S_n = \frac{9}{2}\,(3 + 9) = 54.$$

Rozvedeme-li tuto řadu dle (B) na řadu (A), nabudeme, ježto

$$a = 5, \quad d = 4, \quad s = 2, \quad r = 1, \quad m = 4,$$

$$\alpha = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2, \qquad \delta = 1,$$

tedy řadu

$$(2 + 3) + (4 + 5) + (6 + 7) + (8 + 9) + \ldots$$

a součet

$$(2 + 3) + (4 + 5) + (6 + 7) + (8 + 9) + 10$$
$$= 5 + 9 + 13 + 17 + 10 = 54.$$

Příklad 2. Je-li u téže řady $n = 3^2/_3$, jest

$$m = 3, \quad s = 3, \quad r = 2,$$

pročež

$$\alpha = \frac{5}{3} - \frac{4}{9} = \frac{11}{9}, \qquad \delta = \frac{4}{9},$$

tedy řada

$$\left(\frac{11}{9} + \frac{15}{9} + \frac{19}{9}\right) + \left(\frac{23}{9} + \frac{27}{9} + \frac{31}{9}\right) + \left(\frac{35}{9} + \frac{39}{9} + \frac{43}{9}\right)$$
$$+ \left(\frac{47}{9} + \frac{51}{9} + \frac{55}{9}\right) + \ldots$$

a součet

$$5 + 9 + 13 + \left(\frac{47}{9} + \frac{51}{9}\right) = 27 + \frac{98}{9} = 37\,\frac{8}{9},$$

jakož i vzorec

$$S_n = 3n + 2n^2 \quad \text{za} \quad n = 3^2/_3$$

podává.

B. U řady geometrické.

Rozložíme-li každý člen řady

$$\text{(II)} \qquad a, \quad aq, \quad aq^2, \ldots$$

na s dílů, jež tvoří opět geometrickou řadu, a to o počátečném členu α a podílu γ,

$$\text{(C)} \qquad \alpha, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\gamma^2, \ldots$$

nabudeme k určení veličin α, δ rovnic

$$\alpha + \alpha\gamma + \alpha\gamma^2 + \ldots + \alpha\gamma^{s-1} = a,$$
$$\alpha\gamma^s + \alpha\gamma^{s+1} + \alpha\gamma^{s+2} + \ldots + \alpha\gamma^{2s-1} = aq$$

čili

$$\alpha \cdot \frac{\gamma^s - 1}{\gamma - 1} = a,$$
$$\alpha\gamma^s \cdot \frac{\gamma^s - 1}{\gamma - 1} = aq,$$

z nichž vypočteme hodnoty α, γ

$$\text{(D)} \qquad \alpha = a \cdot \frac{\sqrt[s]{q} - 1}{q - 1}, \qquad \gamma = \sqrt[s]{q}.$$

Součet $(ms + r)$ členů řady (C) jest

$$S' = \alpha \frac{\gamma^{ms+r} - 1}{\gamma - 1}$$

čili

$$S' = a \frac{\sqrt[s]{q} - 1}{q - 1} \cdot \frac{\sqrt[s]{q^{ms+r}} - 1}{\sqrt[s]{q} - 1} = a \frac{\sqrt[s]{q^{ms+r}} - 1}{q - 1}.$$

Součtový vzorec řady (II) při $n = m + \frac{r}{s}$ podává

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{q^{m + \frac{r}{s}} - 1}{q - 1},$$

i jest tedy

$$S_n = S_{m + \frac{r}{s}} = S'.$$

O posledním (dodatečném) členu, příslušném zlomkové části $\frac{r}{s}$ počtu členů, platí zde totéž, jako u řad arithmetických; týž má hodnotu

$$\alpha\gamma^{ms} + \alpha\gamma^{ms+1} + \ldots + \alpha\gamma^{ms+r-1}$$
$$= \alpha\gamma^{ms} \cdot \frac{\gamma^r - 1}{\gamma - 1} = aq^m \frac{\sqrt[s]{q^r} - 1}{q - 1}.$$

Příklad. Stanovme součet řady

$$3, \quad 12, \quad 48, \quad 192, \ldots,$$

při $n = 3^1/_2$.

Vzorce (D) dávají, ježto

$$a = 3, \quad q = 4, \quad m = 3, \quad r = 1, \quad s = 2,$$
$$\alpha = 1, \quad \gamma = 2,$$

pročež řadu

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \ldots$$

a tedy součet dané řady při $n = 3^1/_2$:

$$(1 + 2) + (4 + 8) + (16 + 32) + 64$$
$$= 3 + 12 + 48 + 64 = 127;$$

tutéž hodnotu podává součtový vzorec dané řady

$$S_n = 3 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 4^n - 1$$

při $n = 3^1/_2$.

Poznámka. Z předešlého vysvítá, jaký význam mají vzorce počtu úsporového, důchodového a úmorového (při složitém úrokování), je-li počet období n číslo lomené (smíšené), máme-li jen na paměti, co tu o „dodatečném" členu bylo pověděno. V praxi počítá se arci příslušná část (za příčinou stejných platebných termínů) jinak.

C. U řady složené

(III) $\quad ab, \quad (a + d)\,bq, \quad (a + 2d)\,bq^2, \ldots,$

jejíž členy vznikly znásobením souhlasných členů řady arithmetické a, $a+d$, $a+2d$, ... a řady geometrické b, bq, bq^2, ... a jejíž součtový vzorec jest

$$S_n = ab\frac{1-q^n}{1-q} + bdq\,.\frac{1-nq^{n-1}+(n-1)\,q^n}{(1-q)^2},$$

máme, značí-li α počáteční člen, δ rozdíl arithmetické řady, β počáteční člen a γ podíl geometrické řady, z nichž se „zdrobnělá" řada skládá, a rozložíme-li každý člen řady (III) na s částí, postupujících dle téhož pravidla, jako řada původní,

$$\alpha\beta + (\alpha+\delta)\,\beta\gamma + \ldots + (\alpha + \overline{s-1}\,.\,\delta)\,\beta\gamma^{s-1} = ab,$$

$$(\alpha + s\delta)\,\beta\gamma^s + \ldots + (\alpha + \overline{2s-1}\,.\,\delta)\,\beta\gamma^{2s-1} = (a+d)\,bq,$$

$$(\alpha + 2s\delta)\,\beta\gamma^{2s} + \ldots + (\alpha + \overline{3s-1}\,.\,\delta)\,\beta\gamma^{3s-1} = (a+2d)\,bq^2,$$

$$(\alpha + 3s\delta)\,\beta\gamma^{3s} + \ldots + (\alpha + \overline{4s-1}\,.\,\delta)\,\beta\gamma^{4s-1} = (a+3d)\,bq^3,$$

čili dle uvedeného součtového vzorce

$$\alpha\beta\,.\,\frac{1-\gamma^s}{1-\gamma} + \beta\gamma\delta\,.\,\frac{1-s\gamma^{s-1}+(s-1)\,\gamma^s}{(1-\gamma)^2} = ab,$$

$$(\alpha+s\delta)\,\beta\gamma^s\,.\,\frac{1-\gamma^s}{1-\gamma} + \beta\gamma^{s+1}\delta\,.\,\frac{1-s\gamma^{s-1}+(s-1)\,\gamma^s}{(1-\gamma)^2}$$
$$= (a+d)\,bq,$$

$$(\alpha+2s\delta)\beta\gamma^{2s}\,.\,\frac{1-\gamma^s}{1-\gamma} + \beta\gamma^{2s+1}\,\delta\,.\,\frac{1-s\gamma^{s-1}+(s-1)\,\gamma^s}{(1-\gamma)^2}$$
$$= (a+2d)\,bq^2,$$

$$(\alpha+3s\delta)\,\beta\gamma^{3s}\,\frac{1-\gamma^s}{1-\gamma} + \beta\gamma^{3s+1}\,\delta\,.\,\frac{1-s\gamma^{s-1}+(s-1)\,\gamma^s}{(1-\gamma)^2}$$
$$= (a+3d)\,bq^3.$$

Abychom z rovnic těchto eliminovali α, znásobme 1. až 3tí po řadě γ^s a odečtěme ji pak od následující, tím nabudeme

$$s\beta\gamma^s\delta\,(1-\gamma^s) = [(a+d)\,q - a\,\gamma^s]\,b\,(1-\gamma),$$

$$\text{(M)}\quad s\beta\gamma^{2s}\,\delta\,(1-\gamma^s) = [(a+2d)\,q - (a+d)\,\gamma^s]\,bq\,(1-\gamma),$$

$$s\beta\gamma^{3s}\,\delta\,(1-\gamma^s) = [(a+3d)\,q - (a+2d)\,\gamma^s]\,bq^2\,(1-\gamma).$$

Dělíme-li, odpadne δ a zároveň β

$$\gamma^s = \frac{(a+2d)\,q^2 - (a+d)\,q\gamma^s}{(a+d)\,q - a\gamma^s},$$

$$\gamma^s = \frac{(a+3d)\,q^2 - (a+2d)\,q\gamma^s}{(a+2d)\,q - (a+d)\,\gamma^s}$$

čili

$$a\,(\gamma^s)^2 - 2\,(a+d)\,q\gamma^s + (a+2d)q^2 = 0,$$

$$(a+d)\,(\gamma^s)^2 - 2\,(a+2d)\,q\gamma^s + (a+3d)\,q^2 = 0.$$

Rozdíl obou těchto rovnic jest

$$(\gamma^s)^2 - 2q\gamma^s + q^2 = 0,$$

nebo

$$(\gamma^s - q)^2 = 0,$$

tedy

$$\gamma^s = q, \quad \gamma = \sqrt[s]{q}.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu do rovnic (M), nabudeme

$$s\beta\delta\,(1-q) = bd\,(1-\sqrt[s]{q}),$$

$$\beta\delta = \frac{bd\,(1-\sqrt[s]{q})}{s\,(1-q)},$$

a konečně z původních rovnic

$$\alpha\beta = \frac{b}{1-q}\Big[a\,(1-\sqrt[s]{q}) + \frac{dq\,(1-\sqrt[s]{q})}{1-q} - \frac{d\sqrt[s]{q}}{s}\Big].$$

Jelikož řadu

(E) $\qquad \alpha\beta + (\alpha+\delta)\,\beta\gamma + (\alpha+2\delta)\,\beta\gamma^2 + \ldots$

lze psáti též v podobě

$$\alpha\beta + (\alpha\beta+\beta\delta)\,\gamma + (\alpha\beta+2\beta\delta)\,\gamma^2 + \ldots,$$

jest hodnotami $\alpha\beta$, $\beta\delta$, γ tato řada stanovena.

Jak patrno, vyskytují se v úloze této vlastně jen tři neznámé: $\alpha\beta$, $\beta\delta$, γ, a stačily by tedy k určení řady E jen tři

rovnice; dostali bychom však pro γ dvě hodnoty, z nichž jedna další (čtvrté) rovnici nevyhovuje. Jednotlivě α, β, δ určiti nelze; jedna z těchto veličin jest libovolná.

Příklad. Pro řadu

$$4,\quad 28,\quad 160,\quad 832,\quad 4096,\ldots,$$

jež vznikla násobením souhlasných členů řad

$$4,\quad 7,\quad 10,\quad 13,\quad 16,\ldots,$$
$$1,\quad 4,\quad 16,\quad 64,\quad 256,\ldots,$$

máme $a = 4$, $d = 3$; $b = 1$, $q = 4$, a klademe-li $s = 2$, $r = 1$, jest $\alpha\beta = 1$, $\beta\delta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$, a pročež řada zdrobnělá

$$1,\ 3;\quad 8,\ 20;\quad 48,\ 112;\quad 256,\ 576;\ldots$$

jež vznikne, násobíme-li souhlasné členy řad

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{6}{2},\quad \frac{7}{2},\ldots$$
$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\ldots$$

a jejíž vždy dva členy dávají člen řady dané.

Součet dané řady při $n = 4\frac{1}{2}$ jest tedy

$$(1+3)+(8+20)+(48+112)+(256+576)+1280$$
$$= 4+28+160+832+1280 = 2304.$$

Tutéž hodnotu podává součtový vzorec výše uvedený.

D. Řady Brounckerovy

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

součet n členů dostaneme, rozložíme-li každý člen na rozdíl dvou, jak následuje

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Sečtouce nabudeme

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Co značí tento vzorec při $n=5\frac{1}{2}$?

Rozložme každý člen této řady na dva utvořené dle zákona, dle něhož řada postupuje; nabudeme tu rovnic

$$\frac{1}{x(x+y)}+\frac{1}{(x+y)(x+2y)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{(x+2y)(x+3y)}+\frac{1}{(x+3y)(x+4y)}=\frac{1}{6}$$

čili

$$x(x+2y)=4,$$

$$(x+2y)(x+4y)=12,$$

jichž dělením dostaneme

$$x=2y;$$

nyní již snadno vypočteme, že

$$x=\sqrt{2},\qquad y=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

a proto žádaný rozklad

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{2}{2n(2n+1)}+\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}\right).$$

S_n při $n=5\frac{1}{2}$ značí tedy

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.13}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{78}=\frac{5}{6}+\frac{1}{78}=\frac{11}{13}.$$

Je-li znám součtový vzorec

$$S_n = F(n)$$

řady

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

a je-li n číslo smíšené $m + \frac{r}{s}$, máme pro tento součet

$$S_n = F(m + \frac{r}{s}) = F(\frac{ms + r}{s}),$$

a klademe-li $ms + r = p$,

$$S'_p = F\left(\frac{p}{s}\right)$$

jakožto součtový vzorec pro p členů řady *„zdrobnělé“*, jejíž členy po s sečteny dávají vždy člen řady původní. Její obecný člen ($p$tý) jest rozdíl součtu p členů a $(p-1)$ členu, to jest

$$\text{(P)} \qquad u'_p = F\left(\frac{p}{s}\right) - F\left(\frac{p-1}{s}\right)$$

čili dle znamenání počtu differenčního

$$\text{(P')} \qquad u'_p = \Delta F\left(\frac{p-1}{s}\right), \qquad (\Delta p = 1).$$

Dle toho dostaneme pro řadu *Brounckerovu* obecný člen řady zdrobnělé, jelikož

$$S_n = \frac{n}{n+1} = F(n)$$

$$F\left(\frac{p}{s}\right) = \frac{p}{p+s},$$

$$u'_p = F\left(\frac{p}{s}\right) - F\left(\frac{p-1}{s}\right) = \frac{p}{p+s} - \frac{p-1}{p-1+s},$$

to jest

$$u'_p = \frac{s}{(p+s-1)(p+s)}$$

a tudíž řadu samu

$$\frac{s}{s(s+1)} + \frac{s}{(s+1)(s+2)} + \frac{s}{(s+2)(s+3)} + \ldots,$$

jejíž členy po s sečteny dávají členy řady dané.

Součet p členů této řady jest

$$S'_p = 1 - \frac{s}{s+p} = \frac{p}{s+p}.$$

Pro obecnější řadu *P. du Bois-Reymond*-ovu

$$\frac{x}{1.(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \ldots + \frac{x}{(\overline{n-1}.x+1)(nx+1)},$$

jejíž součet dostaneme obdobně jako u řady předešlé, ježto

$$\frac{x}{(\overline{n-1}.x+1)(nx+1)} = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1},$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{nx+1} = \frac{nx}{nx+1}.$$

Zde jest

$$F\left(\frac{p}{s}\right) = \frac{px}{px+s}$$

a tedy obecný člen řady zdrobnělé

$$u'_p = \frac{px}{px+s} - \frac{(p-1)x}{(p-1)x+s} = \frac{sx}{(\overline{p-1}.x+s)(px+s)}$$

a řada sama

$$\frac{sx}{s(x+s)} + \frac{sx}{(x+s)(2x+s)} + \frac{sx}{(2x+s)(3x+s)} + \ldots$$
$$+ \frac{sx}{(\overline{p-1}.x+s)(px+s)}.$$

Ze vzorce (P) zároveň vysvítá, že zdrobnělá řada bude tím složitější, čím složitější jest součtový vzorec řady původní. Tak na př. pro řadu harmonickou

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

jest přibližně dle součtového vzorce *Mac Laurinova**)

$$S_n = E + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \ldots$$

nebo dle vzorce *Cesarova*

$$S_n = E + \log \sqrt{n(n+1)} + \frac{\vartheta}{6n(n+1)},$$

kdež E značí t. zv. Eulerovu konstantu $= 0\cdot5772156649\ldots$, $\log n$ přirozený logarithmus čísla n a ϑ positivní ryzí zlomek. — Výraz pro obecný člen zdrobnělé řady vypadne značně složitý.

Hodnota dodatečného členu (příslušného zlomkové části $\frac{r}{s}$ počtu členů $m+\frac{r}{s}$) jest

$$F(m+\frac{r}{s}) - F(m),$$

tedy na př. u řady arithmetické

$$(m+\frac{r}{s})a + \frac{d}{2}(m+\frac{r}{s})(m+\frac{r}{s}-1) - ma - \frac{d}{2}m(m-1)$$
$$= \frac{r}{s}a + \frac{d}{2}\frac{r}{s}(2m+\frac{r}{s}-1),$$

*) Součtového vzorce řady nabudeme konečnou integrací jejího obecného členu dle vzorce $S_n = u_n + \Sigma u_n = \Sigma u_{n+1}$, kdež Σ značí konečný integral.

Součtový vzorec Mac Laurinův zní

$$\Sigma u_x = C + \int u_x\,dx - \frac{1}{2}u_x + \frac{B_1}{1.2}\frac{du_x}{dx} - \frac{B_3}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^3u_x}{dx^3} + \ldots$$
$$= C + \int u_x\,dx - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{12}\frac{du_x}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3u_x}{dx^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5u_x}{dx^5} + \ldots$$

a u řady geometrické

$$a \cdot \frac{q^{m+\frac{r}{s}} - 1}{q - 1} - a \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} = aq^m \cdot \frac{q^{\frac{r}{s}} - 1}{q - 1}.$$

O zvláštním postupu při řešení rovnic neurčitých.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

Při řešení neurčité rovnice

$$ax + by = c$$

užívá se nejčastěji methody Eulerovy a methody sblížených hodnot řetězcových.

Přihlédneme-li ke vztahu těchto method, poznáme, že úzce spolu souvisí, neboť, abstrahujeme-li ode všech zjednodušení, která se mohou při methodě Eulerově vyskytnouti a užijeme-li jen zbytků positivních, pak postupným divisím, jež při této methodě se provádějí, odpovídají při methodě řetězců divise, jimiž se podíl z koefficientů při neznámých převádí v řetězec.

Methoda na vlastnostech řetězců založená má tu výhodu, že nezavádějí se při ní nové veličiny, kdežto při methodě Eulerově, jsou-li koefficienty při neznámých velká čísla, často se stává, že mnoho nových veličin v počet se zavádí.

Ukážeme, jak možno postupovati při řešení neurčitých rovnic, aniž bychom předpokládali znalost řetězců a aniž bychom zaváděli do počtu nových veličin.

Postup methody vynikne nejlépe na několika příkladech zvláštních.

Budiž řešiti rovnici

$$38x + 29y - 1000 = 0.$$

Vytkněme v rovnici dané koefficient o menší absolutní hodnotě před závorku a zbytky pišme mimo závorku; v našem případě jest to koefficient 29.