Antonín Sýkora

# Trojúhelník z výšek daného trojúhelníka

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 32 (1903), No. 2, 202--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108970

Determinant z koefficientů při $x$ a $y$ ve výrazech

$$x + 0 \,.\, y,$$
$$0 \,.\, x + y$$

jest roven 1 aneb $-1$, když rovnici předloženou píšeme ve tvaru

$$a\,(x + 0 \,.\, y) - b\,(0 \,.\, x - y) - c = 0,$$

a pak volíme determinant soustavy

$$x + 0 \,.\, y,$$
$$0 \,.\, x - y.$$

---

# Trojúhelník z výšek daného trojúhelníka.

Napsal

**Antonín Sýkora,**
professor v Rakovníku.

1. *Sestrojíme-li z výšek daného trojúhelníka jako stran trojúhelník nový, a z výšek tohoto právě tak trojúhelník opět nový, jest tento původnímu podoben.*

Jsou-li $a$, $b$, $c$ strany, $a'$, $b'$, $c'$ příslušné výšky a P plocha daného trojúhelníka, jest

$$aa' = bb' = cc' = 2\mathrm{P}$$

a tedy

$$\text{(I)} \qquad a' = \frac{2\mathrm{P}}{a}, \qquad b' = \frac{2\mathrm{P}}{b}, \qquad c' = \frac{2\mathrm{P}}{c}.$$

Jsou-li dále $a''$, $b''$, $c''$ výšky druhého trojúhelníka, jehož plocha budiž P′, příslušné po řadě stranám $a'$, $b'$, $c'$, tu jest

$$a'a'' = b'b'' = c'c'' = 2\mathrm{P}'$$

čili

$$a'' = \frac{2\mathrm{P}'}{a'}, \qquad b'' = \frac{2\mathrm{P}'}{b'}, \qquad c'' = \frac{2\mathrm{P}'}{c'},$$

a vložíme-li za $a'$, $b'$, $c'$ jich hodnoty z (I),

$$a'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\,a, \quad b'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\,b, \quad c'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\,c$$

aneb

$$\frac{a''}{a}=\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}=\frac{P'}{P},$$

t. j. výšky $a''$, $b''$, $c''$ druhého trojúhelníka jsou úměrny stranám trojúhelníka původního.

Sestrojíme-li tedy z výšek $a''$, $b''$, $c''$ jako stran nový trojúhelník, bude týž původnímu podoben.

Jelikož

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

$$P'=\frac{1}{4}\sqrt{(a'+b'+c')(a'+b'-c')(a'-b'+c')(-a'+b'+c')}$$

čili vložíme-li za $a'$, $b'$, $c'$ jejich hodnoty z (I)

$$P'=P^2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},$$

jest poměr

$$\frac{P'}{P}=P\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$$\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{e}\right)}.$$

Poměr tento jest vždy ryzí zlomek; neboť označíme-li nejdelší stranu původního trojúhelníka písmenem $a$, nejkratší $c$, máme-li tedy $a \geqq b \geqq c$, jest i $a'' \geqq b'' \geqq c''$, při čemž znaménkem $\geqq$ hledíme k tomu, že dvě neb i tři strany mohou býti stejné; pročež jest zase $a''$ nejdelší, $c''$ nejkratší stranou třetího trojúhelníka.

Jelikož výška trojúhelníka příslušná některé jeho straně jest menší než každá z obou ostatních stran, nejvýš jí rovna, jest

$$a'' \leqq b' \leqq c,$$

t. j. nejdelší strana trojúhelníka $(a''b''c'')$ jest kratší než nejkratší strana trojúhelníka původního, nejvýš jí rovna. — Tím více tedy $a'' < a$,

a $$\frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} = \frac{P'}{P} < 1.$$

*Poznámka.* Při trojúhelníku rovnostranném jest

$$a' = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad a'' = \frac{a'}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a.$$

Dále jest poměr

$$\frac{P''}{P'} = \frac{1}{4}\sqrt{(a'+b'+c')(a'+b'-c')(a'-b'+c')(-a'+b'+c')}$$
$$\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'}\right)\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)\left(-\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)},$$

jelikož trojúhelník třetí odvozen jest z druhého právě jako druhý z prvého; nahradíme-li tu $a'$, $b'$, $c'$ jejich hodnotami z (I),

$$\frac{P''}{P'} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$
$$\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},$$

pročež

$$\frac{P''}{P'} = \frac{P'}{P},$$

t. j.: Odvozujeme-li z daného trojúhelníka nové, tak, že z výšek jeho a podobně i z výšek každého následujícího jako stran sestrojíme trojúhelník další, tvoří jejich plošné obsahy geometrickou řadu sestupnou. Příslušné strany a tedy i obvody těchto trojúhelníků tvoří řadu geometrickou jen tehdy, béřeme-li je ob jeden

$$a : a'' : a^{IV} : \ldots = b : b'' : b^{IV} : \ldots = c : c'' : c^{IV} : \ldots$$
$$a' : a''' : a^{V} : \ldots = b' : b''' : b^{V} : \ldots = c' : c''' : c^{V} : \ldots$$

Sestrojiti trojúhelník z výšek daného trojúhelníka jako stran jest jen tehdy možno, je-li

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

2. Má-li trojúhelník sestrojený z výšek daného trojúhelníka jako stran býti jemu *podoben*, není tento libovolný; neboť předpokládáme-li, že jeho strany vyhovují dvojí nerovnosti

$$a > b > c,$$

tuť máme, značí-li $a'$, $b'$, $c'$ příslušné výšky a současně strany nového trojúhelníka

$$c' > b' > a',$$

a jakožto výminku podobnosti obou trojúhelníků

$$a' : b' : c' = c : b : a;$$

zároveň však

$$a' : b' : c' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

tedy

$$c : b : a = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

kterážto úměra se redukuje na

$$b^2 = ac \quad \text{čili} \quad a : b = b : c,$$

t. j. *má-li trojúhelník sestrojený z výšek daného trojúhelníka jako stran býti původnímu podoben, třeba, aby jedna strana původního trojúhelníka byla geometrickým průměrem obou stran ostatních.*

Skutečně jest, je-li výmince $b^2 = ac$ vyhověno,

$$\begin{aligned} a' : b' : c' &= \frac{2P}{a} : \frac{2P}{b} : \frac{2P}{c} \\ &= \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \\ &= bc : ac : ab \\ &= bc : b^2 : ab \\ &= c : b : a, \end{aligned}$$

t. j. strany trojúhelníka z výšek úměrny stranám trojúhelníka původního, a tedy

$$\triangle (a'b'c') \sim \triangle (abc).$$

V případě tomto jest

$$16P^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - ac)^2 ;$$

$$a' = \frac{2P}{a} = \frac{2P}{ac} \cdot c, \quad b' = \frac{2P}{b} = \frac{2P}{b^2} \cdot b = \frac{2P}{ac} \cdot b,$$

$$c' = \frac{2P}{c} = \frac{2P}{ac} \cdot a;$$

$\frac{2P}{ac}$ však $= \sin \beta$, kdež $\beta$ značí úhel trojúhelníka $(abc)$ ležící proti straně $b = \sqrt{ac}$; jest tedy

$$a' = c \sin \beta, \qquad b' = b \sin \beta, \qquad c' = a \sin \beta.$$

Jelikož $a \geqq b \geqq c$, jest i $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$, pročež úhel $\beta$ vždy ostrý; největší hodnotu, jíž (při stálém $a$) míti může, vyšetříme, rozřešíme-li rovnici

$$(b^2 =)\, ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

dle $c$; tím nabudeme

$$c = \frac{a}{2}[1 + 2 \cos \beta \pm \sqrt{(1 + 2 \cos \beta)^2 - 4}]$$

$$= \frac{a}{2}[1 + 2 \cos \beta \pm \sqrt{(3 + 2 \cos \beta)(2 \cos \beta - 1)}],$$

z čehož patrno, že $\cos \beta \geqq \frac{1}{2}$ a $\beta \leqq 60^0$. Největší hodnota, jíž úhel $\beta$ nabýti může, jest $\beta = 60^0$ a příslušný $\sin \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; jest tedy poměrné číslo

$$\frac{a'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{a} = \sin \beta \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

3. Kdyby daný trojúhelník měl býti zároveň pravoúhlý, bylo by (hledíc k nerovnosti $a > b > c$)

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

a ježto

$$b^2 = ac,$$
$$a^2 = ac + c^2$$

anebo

$$c^2 = a(a - c)$$

čili

$$c = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

t. j. jedna odvěsna takového trojúhelníka jest stranou pravidelného desítiúhelníka vepsaného do kruhu, jehož poloměr $= a$, čili přeponě.

---

# Příspěvky k arithmetice.

Napsal

**Antonín Sýkora,**
professor v Rakovníku.

## I.

### *Důkaz, že $ab = ba$.*

$a$-krát $b$ značí $a$ skupin po $b$ jednotkách. Vezmeme-li z každé skupiny po jednotce, a utvoříme z nich novou skupinu, obsahuje tato $a$ jednotek. Takových skupin lze utvořiti patrně $b$; nabudeme tedy takto $b$-krát $a$, pročež

$$a\text{-krát } b = b\text{-krát } a.$$

Důkaz tento liší se od obvyklého — jenž záleží v uspořádání jednotek součinu $ab$ v $a$-řádek po $b$ jednotkách — tím, že nezávisí na geometrickém názoru seřadění v podobě obdélníka; proto myslím, že nebude se zdáti zbytečným v době, kdy „arithmetisování mathematiky“ jest moderním.

Že důkaz ten učiniti lze názorným právě tak jako onen obvyklý, patrno samo sebou. I důkaz o třech činitelích, jaký má ve své theorii čísel Lejeune Dirichlet, lze takto provésti, klademe-li místo jednotek libovolné číslo $c$.

## II.

Některé věty o mocninách a odmocninách uvádějí se v učebnicích algebry jednostranně. Jelikož totiž mocněnce a mocnitele nelze zaměniti, mělo by se při mocnění mocniny přihlížeti k *oběma* těmto částem.