Antonín Pleskot

O zvláštním postupu při řešení rovnic neurčitých

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 2, 197--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108969

a u řady geometrické

$$a\,.\,\frac{q^{m+\frac{r}{s}}-1}{q-1}-a\,.\,\frac{q^m-1}{q-1}=aq^m\,.\,\frac{q^{\frac{r}{s}}-1}{q-1}\,.$$

O zvláštním postupu při řešení rovnic neurčitých.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

Při řešení neurčité rovnice

$$ax+by=c$$

užívá se nejčastěji methody Eulerovy a methody sblížených hodnot řetězcových.

Přihlédneme-li ke vztahu těchto method, poznáme, že úzce spolu souvisí, neboť, abstrahujeme-li ode všech zjednodušení, která se mohou při methodě Eulerově vyskytnouti a užijeme-li jen zbytků positivních, pak postupným divisím, jež při této methodě se provádějí, odpovídají při methodě řetězců divise, jimiž se podíl z koefficientů při neznámých převádí v řetězec.

Methoda na vlastnostech řetězců založená má tu výhodu, že nezavádějí se při ní nové veličiny, kdežto při methodě Eulerově, jsou-li koefficienty při neznámých velká čísla, často se stává, že mnoho nových veličin v počet se zavádí.

Ukážeme, jak možno postupovati při řešení neurčitých rovnic, aniž bychom předpokládali znalost řetězců a aniž bychom zaváděli do počtu nových veličin.

Postup methody vynikne nejlépe na několika příkladech zvláštních.

Budiž řešiti rovnici

$$38x+29y-1000=0.$$

Vytkněme v rovnici dané koefficient o menší absolutní hodnotě před závorku a zbytky pišme mimo závorku; v našem případě jest to koefficient 29.

Tím dostaneme rovnici

$$29(x+y-34)+9x-14=0.$$

Považujme v této rovnici za neznámé veličiny výraz $(x+y-34)$ a veličinu x a postupujme opět tak, že koefficient o menší absolutní hodnotě při neznámých, v našem případě 9, vytkneme, a zbytky opět pišme mimo závorky.

Tím přemění se rovnice předchozí v rovnici

$$9(3x+3y-102+x-1)+2(x+y-34)-5=0,$$

t. j. v rovnici

$$9(4x+3y-103)+2(x+y-34)-5=0.$$

Považujeme-li v této rovnici za neznámé výrazy

$$(4x+3y-103) \quad \text{a} \quad (x+y-34)$$

a vytkneme-li koefficient 2, přijdeme k rovnici

$$2(16x+12y-412+x+y-34-2)+(4x+3y-103)-1=0,$$

t. j.

$$2(17x+13y-448)+(4x+3y-103)-1=0.$$

Pokládáme-li v této rovnici výrazy

$$(17x+13y-448) \quad \text{a} \quad (4x+3y-103)$$

za neznámé, pak koefficient při neznámé

$$4x+3y-103$$

jest již roven jedné a k tomu směřuje náš postup.

Položíme-li nyní druhou neznámou, t. j.

$$17x+13y-448=t,$$

kdež t libovolné číslo celistvé značí, pak k určení x a y máme rovnice

$$17x+13y=448+t,$$
$$4x+3y-103=1-2t,$$

t. j.

$$17x+13y=448+t,$$
$$4x+3y=104-2t.$$

Ukážeme později, že determinant soustavy poslední, ať předložena jest rovnice jakákoli, vždy rovná se 1 aneb — 1. Pro naši soustavu jest roven — 1 a pak

$$x = -\begin{vmatrix} 448 + t, & 13 \\ 104 - 2t, & 3 \end{vmatrix} = 8 - 29t,$$

$$y = -\begin{vmatrix} 17, & 448 + t \\ 4, & 104 - 2t \end{vmatrix} = 24 + 38t.$$

Při postupu našem možno zavésti i zbytky negativní, čímž mnohdy výpočty se valně zjednoduší.

Budiž předložena rovnice

$$17x - 31y - 40 = 0.$$

Postup řešení jest tento:

Vytkněme 17 a při tom položme

$$31 = 2 . 17 - 3;$$

pak máme

$$17(x - 2y - 2) + 3y - 6 = 0.$$

Vytkneme-li v této rovnici koefficient 3 a položíme-li

$$17 = 3 . 6 - 1,$$

přijdeme k rovnici

$$3(6x - 12y - 12 + y - 2) - (x - 2y - 2) = 0,$$

t. j. k rovnici

$$3(6x - 11y - 14) - (x - 2y - 2) = 0.$$

Položíme-li

$$6x - 11y - 14 = t,$$

pak

$$x - 2y - 2 = 3t,$$

t. j.

$$6x - 11y = 14 + t,$$
$$x - 2y = 2 + 3t.$$

Ze soustavy této plyne

$$x = -\begin{vmatrix} 14+t, & -11 \\ 2+3t, & -2 \end{vmatrix} = 6 - 31t,$$

$$y = -\begin{vmatrix} 6, & 14+t \\ 1, & 2+3t \end{vmatrix} = 2 - 17t.$$

Kontrola, že výpočet byl správně veden, jest velice jednoduchá. Odstraníme-li v poslední redukované rovnici závorky a sloučíme-li, což snadno lze z paměti provésti, musíme dospěti k dané rovnici, byl-li příklad správně počítán.

Jsou-li koefficienty při neznámých aneb členy v závorkách čísla větší, můžeme si k vůli pohodlnějšímu počítání příslušné úkony napřed naznačiti.

Je-li na př. předložena rovnice

$$101x + 411y - 613 = 0,$$

postupujeme takto:

$$101(x + 4y - 6) + 7y - 7 = 0,$$
$$7[14(x + 4y - 6) + y - 1] + 3(x + 4y - 6) = 0,$$
$$7(14x + 56y - 84 + y - 1) + 3(x + 4y - 6) = 0,$$
$$7(14x + 57y - 85) + 3(x + 4y - 6) = 0,$$
$$3[2(14x + 57y - 85) + (x + 4y - 6)] + (14x + 57y - 85) = 0,$$
$$3(28x + 114y - 170 + x + 4y - 6) + (14x + 57y - 85) = 0,$$
$$3(29x + 118y - 176) + (14x + 57y - 85) = 0.$$

Položíme-li

$$29x + 118y - 176 = t,$$

pak

$$14x + 57y - 85 = -3t,$$

t. j.

$$29x + 118y = 176 + t,$$
$$14x + 57y = 85 - 3t.$$

Ze soustavy této plyne

$$x = \begin{vmatrix} 176+t, & 118 \\ 85-3t, & 57 \end{vmatrix} = 2 + 411t,$$

$$y = \begin{vmatrix} 29, & 176+t \\ 14, & 85-3t \end{vmatrix} = 1 - 101t.$$

Zbývá pouze dokázati, že determinant soustavy rovnic, z nichž x i y se určují, jest roven ± 1.

To však lze snadno odůvodniti.

Předpokládejme, že redukcí předložené rovnice

$$ax + by - c = 0$$

dospěli jsme k rovnici

$$(\alpha) \quad m(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + n(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) - \gamma_3 = 0$$

a že determinant z koefficientů při x a y ve výrazech

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2,$$

t. j.

$$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = \pm 1.$$

Tu snadno lze ukázati, že i při další redukci determinant příslušné soustavy bude roven ± 1.

Redukujeme-li totiž rovnici (α) dále a položíme-li

$$m = np \pm \varepsilon,$$

kdež p i ε čísla celistvá značí a $|m| > |n|$, pak nabudeme rovnice

$$n[x(p\alpha_1 + \alpha_2) + y(p\beta_1 + \beta_2) + p\gamma_1 + \gamma_2]$$
$$\pm \varepsilon(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) - \gamma_3 = 0.$$

Determinant z koefficientů při x a y ve výrazech

$$x(p\alpha_1 + \alpha_2) + y(p\beta_1 + \beta_2),$$
$$\alpha_1 x + \beta_1 y,$$

jest roven výrazu

$$(p\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1 - \alpha_1(p\beta_1 + \beta_2) = \beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2, \quad \text{t. j.} \quad \pm 1.$$

Zbývá proto jen ukázati, že existuje dříve než k poslední redukované rovnici dospějeme, rovnice (α), jejíž determinant z koefficientů rovná se ± 1.

Takovou rovnicí jest ale již rovnice předložená

$$ax + by - c = 0,$$

kterouž možno psáti ve tvaru

$$a(x + 0 \cdot y) + b(0 \cdot x + y) - c = 0.$$

Determinant z koefficientů při x a y ve výrazech

$$x + 0 \,.\, y,$$
$$0 \,.\, x + y$$

jest roven 1 aneb -1, když rovnici předloženou píšeme ve tvaru

$$a(x + 0 \,.\, y) - b(0 \,.\, x - y) - c = 0,$$

a pak volíme determinant soustavy

$$x + 0 \,.\, y,$$
$$0 \,.\, x - y.$$

Trojúhelník z výšek daného trojúhelníka.

Napsal

Antonín Sýkora,

professor v Rakovníku.

1. *Sestrojíme-li z výšek daného trojúhelníka jako stran trojúhelník nový, a z výšek tohoto právě tak trojúhelník opět nový, jest tento původnímu podoben.*

Jsou-li a, b, c strany, a', b', c' příslušné výšky a P plocha daného trojúhelníka, jest

$$aa' = bb' = cc' = 2\mathrm{P}$$

a tedy

$$a' = \frac{2\mathrm{P}}{a}, \quad b' = \frac{2\mathrm{P}}{b}, \quad c' = \frac{2\mathrm{P}}{c}. \tag{I}$$

Jsou-li dále a'', b'', c'' výšky druhého trojúhelníka, jehož plocha budiž P′, příslušné po řadě stranám a', b', c', tu jest

$$a'a'' = b'b'' = c'c'' = 2\mathrm{P}'$$

čili

$$a'' = \frac{2\mathrm{P}'}{a'}, \quad b'' = \frac{2\mathrm{P}'}{b'}, \quad c'' = \frac{2\mathrm{P}'}{c'},$$

a vložíme-li za a', b', c' jich hodnoty z (I),

$$a'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\, a, \quad b'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\, b, \quad c'' = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\, c$$