Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

O imaginárných transformacích křivek i ploch druhého stupně a prostorové kubiky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 129--135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108966

O imaginárných transformacích křivek i ploch druhého stupně a prostorové kubiky.

Podal Dr. **Vinc. Jarolímek.**

Wienerova „imaginárná projekce" křivek a ploch 2. stupně [1]) známa je s dostatek. Toto pojmenování nezdá se však býti případným, a to ze dvou důvodů. Jednak transformace Wienerova neodpovídá zcela zásadám *promítání* vůbec, jednak jsou možny ještě jiné transformace imaginárné, jež by na týž název nárok činiti mohly, jakož v pojednání tomto chceme ukázati. Neníť Wienerova „imaginárná projekce" než *perspektivně kollineárná transformace* kuželosečky v případě speciálním, kdy totiž středem a osou kollineační jsou pól a polára kuželosečky, karakteristika pak $= \pm i$.

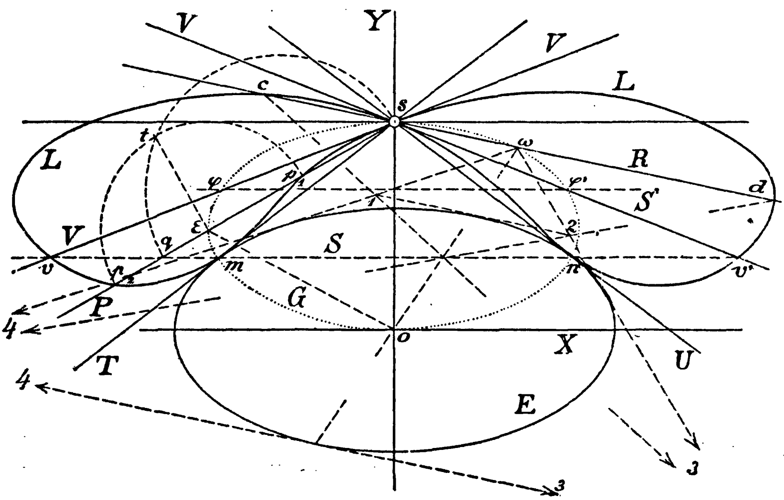
K jiné imaginárné transformaci kuželosečky E z centra s (obr. 1.), daného vně křivky, dospějeme touto úvahou: Na každém paprsku P svazku s, jenž kuželosečku E neseče, vytvořuje E elliptickou involuci harmonických pólů, jejíž imaginárné body samodružné buďtež ideálně zobrazeny družinou p_1, p_2, symetrickou k středu kollineace ε, tak že $\overline{\varepsilon p_1} = -\overline{\varepsilon p_2}$, a potence involuce $-e^2 = \overline{\varepsilon p_1} \,.\, \overline{\varepsilon p_2}$; geometrické místo bodů p_1, p_2 dá určitou křivku L jakožto transformaci žádanou. Podle toho tedy naše *imaginárná transformace kuželosečky jest geometrické místo symmetrických družin bodových v involucích, jež křivka vytvořuje na paprscích daného svazku, které jí nesekou.*

Na paprscích, které křivku E protínají v bodech reálných, jsou ovšem tyto involuce hyperbolické a samodružné body připadají na křivku E. Z toho jde, má-li tato transformace L býti možna, že 1. střed s dán býti musí *vně* kuželosečky E, 2. křivky E, L připadají do různých částí roviny dělené tečnami T, U,

[1]) *Wiener*, Darstellende Geometrie I., pag. 315—322.

jež centrem s ke křivce E procházejí, a 3. křivky E, L dotýkají se navzájem v dotyčných bodech m, n tečen T, U.

Přistupme ke konstrukci křivky L, je-li E nejprve ellipsa (obr. 1.) a střed s na vedlejší ose její Y. Veďme středem s paprsek P tak, aby šel mimo E, a protněme jej průměrem, sdruženým v ellipse ku P, v bodě ε, jenž dává střed involuce, kterou E na P vytvořuje. Polára S pólu s protne P v bodě q; $\overline{sq}$ jest jedna družina involuce, $-\overline{\varepsilon t}^2 = -\overline{\varepsilon s}\,.\,\overline{\varepsilon q}$ její potence.



Obr. 1.

Učiníme-li tedy $\overline{\varepsilon p_1} = -\overline{\varepsilon p_2} = \overline{\varepsilon t}$, dají body p_1, p_2 souměrnou družinu involuce čili body žádané křivky L. Jiná konstrukce je tato: na paprsku R stanovme zase střed involuce ω průměrem $\overline{o\omega}$ ku R sdruženým, veďme bodem ω tečny ku E, další pak tečny rovnoběžné ku R. Tím vznikne lichoběžník 1234 ellipse opsaný, jehož úhlopříčky $\overline{13}$, $\overline{24}$ protnou R v bodech c, d, jež přináležejí křivce L. Neboť úhlopříčka $\overline{42d}$ je zajisté polárou pólu c, tedy cd družina v involuci, a mimo to $\overline{\omega d} = -\overline{\omega c}$. Středy všech involucí ε, ω ... na paprscích svazku s vyplňují ellipsu G, která procházejíc body s, o, je homothetická k ellipse E. Jestiť to známé geometrické místo bodu, jenž půlí tětivu procházející pevným bodem s.

Křivka L je řádu čtvrtého[1]) o dvojném bodě s. Tečny v něm sestrojíme takto: Otáčí-li se paprsek sP ve smyslu PV, blíží se bod p_1 ku s, a v okamžiku, kdy s ním v jedno splyne, stane se P tečnou v bodě s. Připadne tedy druhý bod v

$$(\overline{\varphi\omega} = -\overline{\varphi s})$$

křivky L na paprsku V do poláry S pólu s, střed involuce φ na přímku $S' \| S$, která půlí vzdálenost sS. Stačí tedy vyhledati průsečíky φ, φ' přímky S' s ellipsou G a spojiti $\overline{\varphi s} \equiv V$, $\overline{\varphi' s} \equiv V'$.

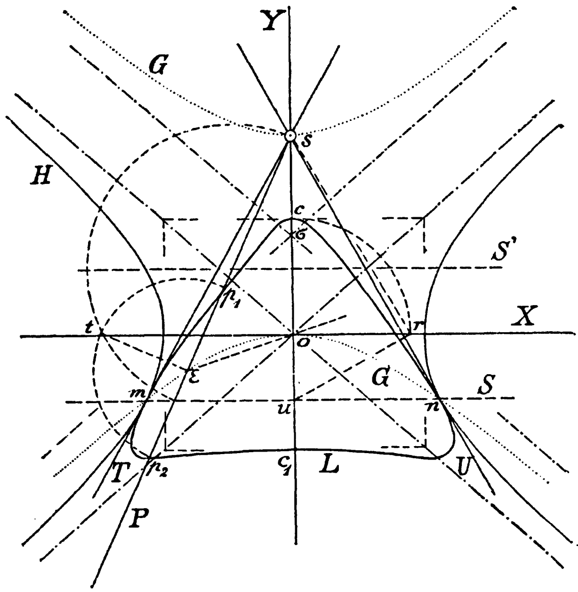
Zvolíme-li střed s mimo osy X, Y, zdeformuje se poněkud křivka L, pozbývajíc osy souměrnosti. Když s je v nekonečnu (daný na př. směrem M), promění se L v *hyperbolu supplementárnou* k ellipse E dle průměru N, sdruženého v E ku M, a jen v tomto případě výjimečném je naše transformace L identická s imaginárnou projekcí Wienerovou, totiž perspektivnou affinní transformací ellipsy E dle osy N, směru M a karakteristiky $\pm i$. Je-li střed s v úběžném bodě osy Y, mění se L v hyperbolu, jež má s ellipsou E osy společné.

Je-li základní křivka E kružnicí nebo parabolou, nemění se podstatně tvar křivky L. Jinak je tomu, je-li E *hyperbolou* (H v obr. 2., 3. a 4.) a střed s na vedlejší ose její $\overline{cc_1} \equiv Y$. Zde sluší přihlížeti ke třem případům: podle toho, je-li $\overline{os} \gtreqless \overline{oc}$. Budiž nejprve $\overline{os} > \overline{oc}$ (obr. 2.). Středy $\varepsilon \ldots$ tětiv hyperboly H, jež procházejí bodem s, vyplňují hyperbolu G, jejíž hlavní osa jest $\overline{so}$, střed σ, asymptoty pak jsou rovnoběžny s asymptotami hyperboly H. Sestrojme poláru S ku pólu s; $\overline{or} = \overline{oc}$, $\overline{ru} \perp rs$ $\left(\text{tedy } \overline{ou} = -\frac{\overline{oc}^2}{\overline{os}}\right)$, $uS \| X$, dále pak přímku $S' \| S$, která půlí vzdálenost $\overline{su}$. Body p_1, p_2 křivky L na libovolném paprsku P svazku s obdržíme jako při ellipse: střed involuce na P jest $(PG) \equiv \varepsilon$ (také na průměru $\overline{o\varepsilon}$ sdruženém ku P); postavme $\varepsilon t \perp P$ a z průsečíka (PS') opišme kruhový oblouk

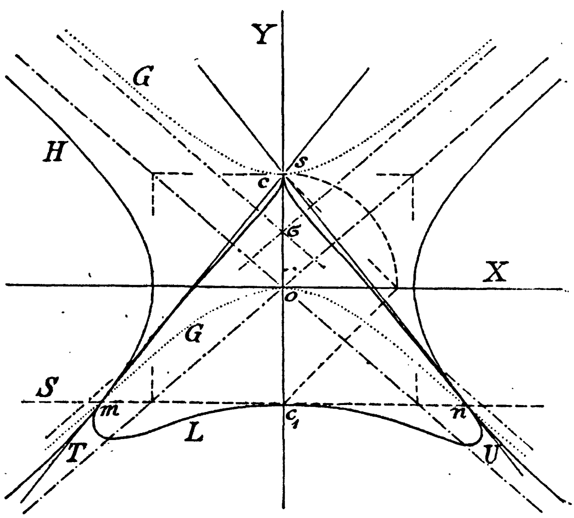
---

[1]) Jsou-li a, b poloosy ellipsy E, $\overline{os} = u$, jest rovnice křivky L v soustavě XoY

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - 2a^2uy(b^2x^2 + a^2y^2) + a^2b^2(b^2 - u^2)x^2 + a^4(b^2 + u^2)y^2 - a^4b^2(2y - u)u = 0.$$



Obr. 2.



Obr. 3.

jdoucí bodem s, který onu kolmici protne v bodě t; $-\overline{\varepsilon t}^2$ je potence involuce, učiňme tedy $\overline{\varepsilon p_1} = -\overline{\varepsilon p_2} = \overline{\varepsilon t}$. Křivka L, souměrná dle Y, má v bodech c, c_1 své vrcholy, v s dvojný bod tentokrát isolovaný.

Vzdálí-li se střed s ve směru Y do nekonečna, promění se křivka L v *ellipsu* supplementární ku H, která s hyperbolou H má osy společné. L jest *kružnicí*, je-li hyperbola H rovnoosá a střed s v nekonečnu na Y.

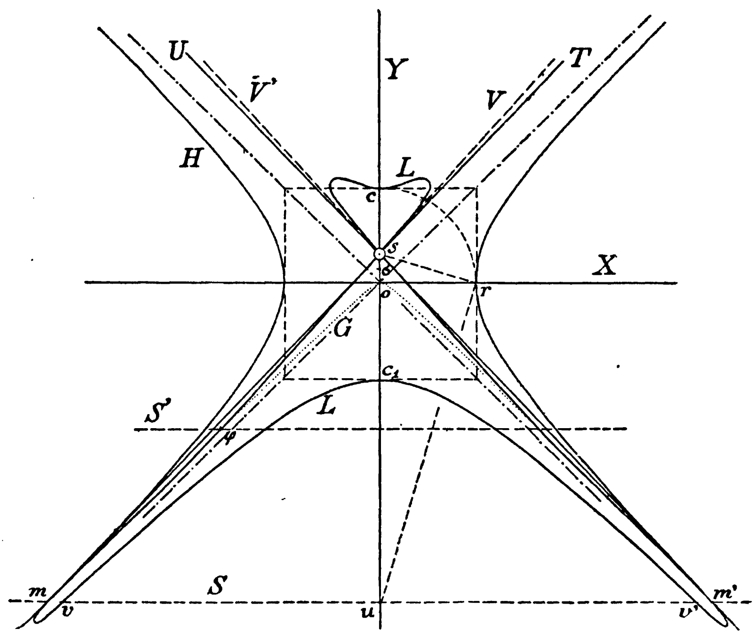
Blíží-li se naopak střed s ke středu o, až vejde do krajního bodu c vedlejší osy hyperboly (obr. 3.), bude střed transformace s zároveň *úvratným* bodem křivky L.

Je-li posléze $\overline{os} < \overline{oc}$ (obr. 4.), stane se opět střed s (jako při ellipse) dvojným bodem průsečným, jehož tečny $V \equiv \overline{vs}$, $V' \equiv \overline{v's}$ (odchylné ovšem od tečen $\overline{ms} \equiv T, \overline{m's} \equiv U$ k hyperbole) sestrojíme jako při ellipse. Křivka L má vrcholy c, c_1 a ve směrech asymptot čtyři výběžky, jež prodlužují se, blíží-li se střed transformace s ke středu hyperboly o; zároveň větve protínající se v bodě s, stále těsněji přiléhají k asymptotám hyperboly. Vejde-li posléze střed s do o, prodlouží se ony výběžky do nekonečna a křivka L rozpadne se v asymptoty hyperboly a v hyperbolu *komplementární*, která určena jest *hlavní* osou $\overline{cc_1}$ a asymptotami společnými s H. —

Obdobně lze konstruovati imaginárné transformace *ploch druhého stupně*. Na př. plochu λ, která jest geometrickým místem souměrných družin elliptických involucí na paprscích prostorového svazku s, jehož střed dán jest na některé kratší ose *ellipsoidu* ε, lze obdržeti také tím způsobem, že sestrojí se imaginárné transformace L ellips E, ve kterých ellipsoid ε protínají roviny proložené osou $Y \equiv \overline{os}$ (obr. 1.); podle toho lze si učiniti přibližně představu o tvaru plochy λ. Je-li plocha ε hyperboloidem sborceným, střed s na jeho vedlejší ose Y (obr. 4.), budou proniky plochy λ s rovinami svazku Y míti tvar křivky L v obr. 4. atd. Plochy ε, λ a kužel, opsaný ploše ε z bodu s, dotýkají se navzájem podél určité kuželosečky.

Pozoruhodna jest také *absolutní* imaginárná transformace prostorové *křivky třetího řádu* K^3, nezávislá na středu s, jakožto geometrické místo souměrných družin bodových v involucích, jež K^3

vytvořuje na *ideálních bisekantách* svých. Veškeré tečny křivky K^3 vyplňují plochu rozvinutelnou III. třídy, která odděluje prostor vnitřní, obsahující bisekanty skutečné, od prostoru vnějšího, vyplněného bisekantami ideálními, z nichž každá seče K^3 ve dvou imaginárních bodech sdružených. Vytkněme v prostoru vnějším bod m a veďme jím ideální bisekantu M způsobem známým [1]: zvolme na K^3 tři body a, b, c, promítněme z nich K^3 plochami



Obr. 4.

kuželovými, sestrojme polárné roviny kuželů ku polárám $\overline{ma}$, $\overline{mb}$, $\overline{mc}$, stanovme společný průsečík m_1 těchto tří rovin, a spojme $\overline{mm_1} \equiv M$. Bod m_1 je sdružen s bodem m vzhledem ke K^3, mm_1 jedna družina involuce na M. Vytkneme-li ještě jeden bod n na M a sestrojíme jeho bod sdružený n_1 (stačí polárná rovina ϱ jednoho kužele a ku poláře $\overline{na}$, načež průsečík $\varrho M \equiv n_1$),

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy IV., str. 45.

bude involuce družinami mm_1, nn_1 stanovena. Sestrojme její střed ε a učiňme na M

$$\overline{\varepsilon p_1} = -\overline{\varepsilon p_2} = \sqrt{\overline{\varepsilon m} \cdot \overline{m_1 \varepsilon}};$$

body p_1, p_2 přináležejí transformaci žádané λ. Tato bude zajisté určitou plochou, jelikož kongruence bisekant obsahuje ∞^2 paprsků, a žádné dvě ideální bisekanty se protínati nemohou, protože kongruence jest řádu prvého a singulárních bodů (ježto křivce K^3 přináležejí) na ideálních bisekantách není. Bodů p_1, p_2 ... jest tedy ∞^2. Také středy involucí ε ... (na bisekantách ideálních i reálních) vyplňují určitou plochu φ^3, která jest řádu třetího (Jar. Geom. pol. III, str. 20).

Drobnosti z geometrie.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

(Pokračování.)

8. *Oskulační tětivy obalují čáru 4. třídy.*

Podle (19) jsou Plückerovy souřadnice u, v oskulační tětivy racionální funkce parametru z stupně 4., tedy jsou tyto tětivy tečnami určité racionální čáry 4. třídy. Parametrické vyjádření její bodů možno provésti přímo na základě obecných vzorců

$$x = \frac{dv}{v\,du - u\,dv}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du}$$

aneb též podle známého pravidla o stanovení obalové čáry přímky (19')

$$(\Omega) \qquad \frac{x \cos\Theta}{a} - \frac{y \sin\Theta}{b} = \cos 2\Theta;$$

derivujeme-li dle parametru Θ, obdržíme rovnici

$$(\Omega') \qquad \frac{x \sin\Theta}{a} + \frac{y \cos\Theta}{b} = 2 \sin 2\Theta,$$

a z obou rovnic řešením dle $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sin 2\Theta \sin\Theta + \cos^2\Theta = \frac{1}{2}(3\cos\Theta - \cos 3\Theta) \\ \frac{y}{b} &= \sin 2\Theta \cos\Theta + \sin\Theta = \frac{1}{2}(3\sin\Theta + \sin 3\Theta). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$