bude involuce družinami mm_1, nn_1 stanovena. Sestrojme její střed ε a učiňme na M

$$\overline{\varepsilon p_1} = -\overline{\varepsilon p_2} = \sqrt{\overline{\varepsilon m} \,.\, \overline{m_1 \varepsilon}};$$

body p_1, p_2 přináležejí transformaci žádané λ. Tato bude zajisté určitou plochou, jelikož kongruence bisekant obsahuje ∞^2 paprsků, a žádné dvě ideální bisekanty se protínati nemohou, protože kongruence jest řádu prvého a singulárních bodů (ježto křivce K^3 přináležejí) na ideálních bisekantách není. Bodů p_1, p_2 ... jest tedy ∞^2. Také středy involucí ε ... (na bisekantách ideálních i reálních) vyplňují určitou plochu φ^3, která jest řádu třetího (Jar. Geom. pol. III, str. 20).

Drobnosti z geometrie.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

(Pokračování.)

8. *Oskulační tětivy obalují čáru 4. třídy.*

Podle (19) jsou Plückerovy souřadnice u, v oskulační tětivy racionální funkce parametru z stupně 4., tedy jsou tyto tětivy tečnami určité racionální čáry 4. třídy. Parametrické vyjádření její bodů možno provésti přímo na základě obecných vzorců

$$x = \frac{dv}{v\,du - u\,dv}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du}$$

aneb též podle známého pravidla o stanovení obalové čáry přímky (19')

$$(\Omega) \qquad \frac{x \cos \Theta}{a} - \frac{y \sin \Theta}{b} = \cos 2\Theta;$$

derivujeme-li dle parametru Θ, obdržíme rovnici

$$(\Omega') \qquad \frac{x \sin \Theta}{a} + \frac{y \cos \Theta}{b} = 2 \sin 2\Theta,$$

a z obou rovnic řešením dle $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sin 2\Theta \sin \Theta + \cos 2\Theta = \frac{1}{2}(3 \cos \Theta - \cos 3\Theta) \\ \frac{y}{b} &= \sin 2\Theta \cos \Theta + \sin \Theta = \frac{1}{2}(3 \sin \Theta + \sin 3\Theta). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

V parametrickém*) vyjádření při $z = e^{i\Theta}$ máme

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{3}{4}\frac{z^2+1}{z} - \frac{1}{4}\frac{z^6+1}{z^3}, \\ \frac{y}{b} &= \frac{3}{4}\frac{z^2-1}{iz} + \frac{1}{4}\frac{z^6-1}{iz^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (20^1)$$

takže racionální čára naše je stupně 6. Její rovnici obdržíme z (20) vyloučením Θ; máme postupně

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + 3 sin^2 2\Theta, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cos^3 2\Theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 3\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 4,$$

a konečně**)

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4\right)^3 + 27\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 0. \qquad (20^2)$$

Tato křivka Γ, obalová čára oskulačních tětiv ellipsy (a, b), leží uvnitř ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 4.$$

Bod, v němž se oskulační tětiva (Ω) dotkne čáry Γ, je na přímce (Ω'), jejíž rovnici lze psáti

$$(\Omega') \qquad \frac{x}{a\cos\Theta} + \frac{y}{b\sin\Theta} = 4.$$

Její osové úseky jsou $4x_0$, $4y_0$, značí-li $x_0 y_0$ souřadnice bodu Θ na ellipse Přímky (Ω), (Ω') se tedy snadno sestrojí a tím získána též jednoduchá konstrukce bodů čáry Γ, aniž třeba užívati oskulačního doplňku bodu na čáře.

---

*) Znamenáme-li M a M_0 patu a doplněk oskulační tětivy, t. j. body na ellipse příslušné k úhlům Θ a -3Θ, dále P tečný bod osk. tětivy na obálce, máme barycentricky

$$2P = 3M - M_0$$

(A. del Re, l. c.).

**) Na podnět E. Lemoinea tuto obalovou čáru stanovili Desmous, Hilaire, de Paolis a j. (Nouvelles Ann. de Math. 2e série, T. XI.) Obraz křivky v. str. 104 v Tisserand, Rec. compl. d'exercices.

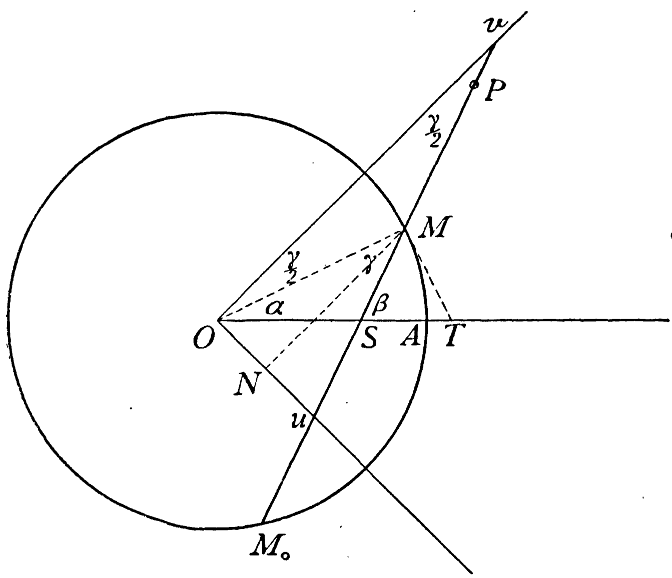
Z rovnic (20) plyne, že obalová čára oskulačních tětiv jest affinní s astroidou, a vznikne z ní zkrácením pořadnic v poměru $b : a$.

Ostatně rovnice (19^1) podrží určitý význam i pro $b = a$ a sice přísluší přímce, která procházejíc bodem Θ na kruhu

$$x = a \cos \Theta, \quad y = a \sin \Theta,$$

je vůči Ox s tečnou kruhu souměrně nakloněna; tato přímka

$$(p) \qquad x \cos \Theta - y \sin \Theta = a \cos 2\Theta$$



Obr. 1.

pak obaluje astroidu. Transformací

$$\eta = \frac{b}{a} y$$

přechází přímka p v přímku (19^1) a její obalová čára v křivku (20^2).

Okolnost, že přímka p obaluje astroidu, lze dokázati elementárně planimetricky; tím bude také podáno synthetické stanovení obalové čáry (20^2).

Buď MT tečna kruhu AM opsaného kolem středu O (obr. 1.) poloměrem $OA = a$, M bod dotykový, T stopa tečny na Ox.

Přímka p prochází bodem M a prochází bodem S na Ox, jenž jest určen podmínkou $MT = MS$.

Znamenejme $\alpha = \sphericalangle AOM$, $\beta = ATM = ASM$; v trojúhelníku OMS buď $\gamma = \sphericalangle M$. Máme

$$\beta = \alpha + \gamma, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

tedy

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Veďme přímky Ou, Ov nakloněné k Ox pod $\pm 45^0$, a značme u, v jich průseky s přímkou p. V trojúhelníku OMv máme vnější úhel γ při M, vnitřní úhel při O jest

$$45^0 - \alpha = \frac{\gamma}{2},$$

tudíž je také úhel při v roven $\frac{\gamma}{2}$ a trojúhelník je rovnoramenný, z čehož následuje rovnost délek

$$Mv = OM = a.$$

Přímka $MN \parallel Ov$ půlí úhel γ (při M) a trojúhelníky pravoúhlé ONM a uNM jsou shodny, takže také

$$Mu = a.$$

Je tedy délka $uv = 2a$ stálé velikosti; přímka p se pošinuje tak, že její dva body stálé vzdálenosti opisují přímky Ou, Ov na sobě kolmé. Její obalová čára je tedy astroida.

---

9. *Oskulační tětivy procházející daným bodem.* Křivka Γ je 4. třídy a tedy každým bodem mimo tuto křivku ležícím procházejí čtyry její tečny, t. j. čtyry oskulační tětivy ellipsy.

Hledejme oskulační tětivy procházející bodem o souřadnicích x, y, jehož přímková rovnice tedy zní

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Jsou-li u, v souřadnice oskulační tětivy (19) procházející tímto bodem, bude tedy

$$-\frac{x}{a}(z^3 + z) - \frac{iy}{b}(z^3 - z) + (z^4 + 1) = 0.$$

Kořeny z_1, z_2, z_3, z_4 této rovnice příslušejí jako parametry patám hledaných oskulačních tětiv. Jejich souměrné úkony buďte opět znamenány $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4$; bude pak

$$\mathfrak{f}_4 = 1, \quad \mathfrak{f}_2 = 0, \tag{21}$$

dále

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{x}{a} + \frac{iy}{b}, \quad \mathfrak{f}_3 = \frac{x}{a} - \frac{iy}{b}, \tag{21^a}$$

z čehož vychází pro souřadnice průsečného bodu oskulačních tětiv

$$x = \frac{a}{2}(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3), \quad y = \frac{b}{2i}(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3). \tag{21^b}$$

Z rovnice $\mathfrak{f}_4 = 1$ plyne, že

„paty čtyř oskulačních tětiv ellipsy vedených daným bodem leží na kruhu.“

Kruh ten nazveme *patním kruhem* čtveřiny oskulačních tětiv. Jeho rovnice určí se na základě vzorců (8) (8^2) ve tvaru

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi - 2q\eta = \frac{d^2}{2}, \tag{22}$$

při čemž

$$p = \frac{c^2}{8a}(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3),$$

tedy dle (21^b)*)

$$p = \frac{c^2 x}{4a^2}, \quad q = -\frac{c^2 y}{4b^2}, \tag{22^a}$$

takže těžiště pat oskulačních tětiv má souřadnice

$$X = \frac{1}{4}x, \quad Y = \frac{1}{4}y.$$

Parametry pat hoví rovnici

$$z^4 - \mathfrak{f}_1 z^3 - \mathfrak{f}_3 z + 1 = 0,$$

i možno zvoliti $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_3$ dle libosti, načež rovnicemi (21^b) určena poloha *vrcholu* xy naší čtveřiny oskulačních tětiv.

---

*) Srov.: V. Ianni, Annali di Tortolini, 1861, str. 199; dále: Alfonso del Re, Oblique e circoli osculatori alle coniche in relazione tra loro ed in relazione con altri elementi geometrici di cui sono casi particolari (Giornale di Matematiche di Battaglini vol. XXII., 1884).

Ze tří dvojic $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_3$, xy, pq jest jedna neodvislá, ostatní lineární funkce její prvků; zejména vyjadřují rovnice (22^a) *affinní vztah* (příbuznost) mezi vrcholem tětiv (x, y) a středem kruhu patního (p, q).

Mění-li se tyto body, jsou jich dráhy téhož stupně a třídy; zejména může jeden z těchto bodů probíhati přímku pouze tehdy, probíhá-li též druhý bod určitou přímku; patní kruhy tvoří při tom svazek promětný s řadou vrcholů (x, y).

Z rovnic (21), jež plně charakterisují čtveřiny pat oskulačních tětiv jdoucích společným bodem, vyjadřuje první, že tyto body leží na kruhu; druhá z nich $\mathfrak{f}_2 = 0$ se vyjádří též takto:

$$\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + \cos(\Theta_2 + \Theta_3) + \cos(\Theta_3 + \Theta_1) = 0. \qquad (21^1)$$

Tato rovnice tedy vyjadřuje podmínku, aby se oskulační tětivy tří bodů Θ_1, Θ_2, Θ_3 na ellipse protínaly ve společném bodě.*) V souřadnicích $x_\nu y_\nu$ bodů Θ_ν zní tato podmínka

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{a^2} = \frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1}{b^2}.$$

Známe-li body Θ_1 a Θ_2, obdržíme dle toho ostatní dva body oskulační čtveřiny Θ_3 a Θ_4 jako průseky ellipsy s přímkou

$$\frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2)x}{a^2} = \frac{y_1y_2 + (y_1 + y_2)y}{b^2}. \qquad (21^2)$$

Tato obsahuje bod

$$x' = -\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}, \quad y' = -\frac{y_1y_2}{y_1 + y_2},$$

a je vůči Ox souměrně nakloněna s polárou středu tětivy, t. j. s polárou bodu

$$\frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Znamenejme $\Theta' = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$; rovnice ($21^1$) se přepíše na

$$\cos(\Theta_1 - \Theta') + \cos(\Theta_2 - \Theta') + \cos(\Theta_3 - \Theta') = 0,$$

*) V komplexních parametrech se vyjadřuje tato podmínka vztahem

$$\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3 = 0.$$

kde

$$\varphi_1 = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3, \quad \varphi_2 = \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_1, \quad \varphi_3 = \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3.$$

i možno ji geometricky interpretovati, a to nikoli sice na ellipse, ale na kruhu opsaném kolem středu ellipsy, na němž měříme úhly Θ, a jenž se nachází s ellipsou v příbuznosti. Parametru Θ_ν odpovídá na tomto kruhu úhloměrném bod M_ν o souřadnicích

$$a \cos \Theta_\nu, \quad a \sin \Theta_\nu,$$

takže parametrům Θ_1. Θ_2, Θ_3, Θ' na tomto kruhu odpovídají body M_1, M_2, M_3, M'; poslední rovnice pak vyjadřuje, že

„geometrický součet vektorů OM_1, OM_2, OM_3 je vektor kolmý na OM'.“

Uvažujme zvláštní případ, kdy body na ellipse Θ_1, Θ_2 hoví podmínce

$$(\alpha) \qquad \frac{x_1 x_2}{a^2} = \frac{y_1 y_2}{b^2};$$

průměry ellipsy určené body těmito Θ_1 a Θ_2 tvoří involuci, jejíž dvojné paprsky jsou hlavní příčky, takže je oddělují harmonicky. Rovnice (21²) pak se zjednoduší na

$$\frac{x_1 + x_2}{a^2} x = \frac{y_1 + y_2}{b^2} y,$$

takže přímka příslušná je průměr ellipsy, a sice je to přímka stálá. Podmínku (α) lze psáti po zavedení parametrů Θ

$$tg\, \Theta_1 \, tg\, \Theta_2 = 1,$$

a odtud plyne

$$\Theta_2 = \nu\pi + \frac{\pi}{2} - \Theta_1, \quad \nu \text{ celistvé,}$$

načež poslední rovnice přímky bude zníti

$$\frac{\cos \Theta_1 + (-1)^\nu \sin \Theta_1}{a} x = \frac{\sin \Theta_1 + (-1)^\nu \cos \Theta_1}{b} y,$$

čili po zkrácení činitelem $\cos \Theta_1 + (-1)^\nu \sin \Theta_1$:

$$\frac{x}{a} = (-1)^\nu \frac{y}{b},$$

t. j. uvažované dvojice Θ_1, Θ_2 se na oskulační čtveřiny doplňují koncovými body jedné z hlavních příček.

Při tom jsou spojivé přímky proměnných bodů Θ_1, Θ_2 na ellipse rovnoběžny s druhou hlavní příčkou. Je skutečně za naší podmínky

$$z_1 z_2 = (-1)^\nu i$$

a rovnice přímky spojující body Θ_1 a Θ_2 je (18)

$$(1 \pm i)\frac{x}{a} + (i \pm 1)\frac{y}{b} = z_1 + z_2,$$

čili

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \text{konst.}, \ \pm 1 = (-1)^\nu.$$

Oskulační tětiva bodu na hlavní příčce splývá s jeho průměrem, body na konci téže příčky mají tedy společnou oskulační tětivu v tomto průměru, a na něm se protnou osk. tětivy páru Θ_1 a Θ_2.*)

Podmínky (21) $\mathfrak{f}_2 = 0$, $\mathfrak{f}_4 = 1$, které charakterisují čtveřiny, pro něž oskulační tětivy sbíhají ve společný průsek, lze psáti

$$(a) \qquad z_1 z_2 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_3 z_4 = 0,$$
$$(b) \qquad z_1 z_2 \, . \, z_3 z_4 = 1.$$

Znamenejme u v souřadnice tětivy $z_1 z_2$ u ellipsy, dále u' v' souřadnice tětivy $z_3 z_4$; známé vztahy

$$z_1 + z_2 = -\frac{2}{au - ibv}, \quad z_1 z_2 = \frac{au + ibv}{au - ibv}$$

nám podají pro veličiny $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ výrazy, jež vložíme do rovnic (a) (b); vyjde

$$(au + ibv)(au' - ibv') + 4 + (au - ibv)(au' + ibv') = 0$$
$$(au + ibv)(au' + ibv') = (au - ibv)(au' - ibv')$$

čili po redukci

$$(A) \qquad a^2 uu' + b^2 vv' + 2 = 0, \quad uv' + u'v = 0.$$

Přímky $p(u, v)$ a $p'(u', v')$ stanoví na ellipse čtveřinu uvažované vlastnosti. Druhá z rovnic (A) vyjadřuje, že přímky ty jsou k ose Ox stejně nakloněny, první rovnice pak vyjadřuje, že přímky ty jsou spolu harmonicky sdruženy vůči kuželosečce

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + 2 = 0,$$

---

*) Podmínky (21) $\mathfrak{f}_2 = 0$, $\mathfrak{f}_4 = 1$ vyjadřují, že čtveřiny pat oskulačních tětiv tvoří na ellipse involuci 4. stupně o dvojí volnosti. V ní tvoří koncové body hlavních příček dva *páry neutrální*, kterými skupina involuce není stanovitelna, an takový pár náleží ∞^1 čtveřinám.

která jest ellipsa pomyslná

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-\frac{1}{2}.$$

Je-li dána přímka p', určíme její pól S vůči této kuželosečce, a vedeme jím přímku vůči p' souměrně nakloněnou; tato přímka jest p, a protíná ellipsu v bodech, jež dohromady s průseky přímky p' tvoří hledanou čtveřinu.

Pól S strojíme takto: Určíme pól S_0 přímky p' vůči reálné ellipse $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ a prodloužíme délku S_0O na opačnou stranu středu O.*)

---

10. Rovnostranná hyperbola určená čtveřinou pat oskulačních tětiv procházejících bodem (x, y) má dle (11*) rovnici

$$\xi^2-\eta^2-\frac{2d^2}{c^2}(p\xi+q\eta)-\frac{c^2}{2}=0, \tag{23}$$

kde p, q značí souřadnice středu patního kruhu.

Střed této *patní hyperboly* má souřadnice

$$x_0=\frac{d^2}{c^2}p, \quad y_0=-\frac{d^2}{c^2}q$$

a bude ležeti na hyperbole, je-li

$$\left(\frac{d^2q}{c^2}\right)^2-\left(\frac{d^2p}{c^2}\right)^2=\frac{c^2}{2},$$

v kterémžto případě se hyperbola rozpadne ve dvě přímky svírající s osou Ox úhly $\pm 45^0$.

Aby to nastalo, třeba i stačí, by se střed patního kruhu nacházel na rovnostranné hyperbole

$$q^2-p^2=\frac{c^6}{2d^4}; \tag{24}$$

její fokální osa jest Oy a dálka ohniska obnáší $\frac{c^3}{d^2}$.

---

*) Operuje-li se na kruhu (t. j. pro $a=b$), řeší předešlá konstrukce též úlohu, sestrojiti zbývající dvě tečny astroidy, jež vycházejí z průsečného bodu daných dvou její tečen.

Tím dokázána věta:

„*Kruhy*

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi - 2q\eta = \frac{d^2}{2},$$

jichž středy p, q leží na rovnostranné hyperbole (24) *mající ohniska*

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{c^3}{d^2},$$

protínají ellipsu (a, b) ve čtveřinách s jedním párem na sobě kolmých tětiv, které svírají s osou Ox úhly $\pm$ *45° a protnou se v bodě*

$$x_0 = \frac{d^2}{c^2} p, \quad y_0 = -\frac{d^2}{c^2} q.$$

Oskulační tětivy všech čtyř bodů procházejí společným průsekem, jehož souřadnice znějí

$$x = \frac{4a^2}{c^2} p, \quad y = -\frac{4b^2}{c^2} q.$$

Položme

$$\frac{c^6}{2d^4} = k^2$$

a zaveďme parametr exponencialní*)

$$q = k\frac{t^2+1}{2t}, \quad p = k\frac{t^2-1}{2t}$$

pro body hyperboly (24). Patní kruh má pak rovnici

$$\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2}\right) t = kt^2(\xi + \eta) + k(\eta - \xi)$$

a probíhá kvadratickou řadu, probíhá-li střed jeho hyperbolu (24).

Obalová čára těchto kruhů má rovnici

$$\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2}\right)^2 = 4k^2(\eta^2 - \xi^2) \tag{25}$$

*) Parametrické vyjádření bodů na hyperbole (24) zní

$$q = k \cos hyp\, \omega, \quad p = k \sin hyp\, \omega$$

a píšeme-li

$$t = e^{\omega},$$

vycházejí napsané rovnice.

a je to zvláštní případ Perseovy spiriky*) (prstenky). Aniž bychom se pouštěli do podrobností theorie těchto křivek, můžeme odvoditi konstrukci bodů čáry naší bezprostředně z rovnice kruhu, vyjádříme-li p a q jako funkce parametru ω

$$q = k \cos hyp\, \omega, \quad p = k \sin hyp\, \omega,$$

takže derivace jsou

$$\frac{dq}{d\omega} = k \sin hyp\, \omega, \quad \frac{dp}{d\omega} = k \cos hyp\, \omega.$$

Dle známého pravidla určí se body obalové čáry kružnic

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2} = 2p\xi + 2q\eta$$

tím, že se rovnice ta derivuje dle parametru ω; tím vznikne

$$\xi \cos hyp\, \omega + \eta \sin hyp\, \omega = 0$$

čili

$$q\xi + p\eta = 0. \qquad (25^*)$$

Tato přímka protne kruh

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi - 2qy = \frac{d^2}{2}$$

v hledaných bodech, a jest geometricky stanovena tím, že jdouc počátkem (středem ellipsy) obsahuje mimo to bod

$$\xi = p, \quad \eta = -q,$$

který leží na hyperbole (24) souměrně se středem kruhu (p, q) vůči ose Ox.

Konstrukce kruhu o rovnici

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi - 2q\eta - m^2 = 0,$$

*) Bližší údání o těchto a jiných křivkách hledej ve spisech:
F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches;
Gino Loria, Spezielle algebraische u. transc. ebene Kurven;
H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven.

Křivka tato je zvláštním případem t. zv. čar anallagmatických s dvojí symetrií

$$(x^2 + y^2 - m)^2 = 4(a_1^2 x^2 + b_1^2 y^2),$$

o nichž bude ve čl. 14. ukázáno, že jsou cissoidami dvou soustředných kruhů.

známe-li střed S (p, q) a délku m, jest jednoducha; mocnost počátku vzhledem k tomuto kruhu $-m^2$ je záporna, počátek leží nutně uvnitř kruhu. Poloviční tětiva kruhu vedená počátkem kolmo na průměr OS — nazveme ji *ramenem* kruhu — má hodnotu m. Znajíce střed, známe též polohu ramene, i můžeme nanesením jeho délky po obou stranách průměru ihned sestrojiti dva body kružnice.

V našem případě má rámě stálou délku $\frac{d}{\sqrt{2}}$, takže u našich kruhů konce ramene probíhají kruh

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Mimo to lze spiriku (25) vytvořiti jako místo průsečíků promětných svazků kružnic

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2} = 2k\lambda(\eta + \xi), \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{2k}{\lambda}(\eta - \xi). \quad (26)$$

Svazky ty mají společný kruh

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{d^2}{2},$$

a za chordály přímky $\xi + \eta = 0$, resp. $\xi - \eta = 0$, a v promětnosti jsou si přiřazeny páry

$(\lambda = 0)$ $\quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{d^2}{2}$ a $\xi = \eta$

$(\lambda = \infty)$ $\quad \xi + \eta = 0$ a $\xi^2 + \eta^2 = \frac{d^2}{2}$

$(\lambda = 1)$ $\quad (\xi - k)^2 + (\eta - k)^2 = 2k^2 + \frac{d^2}{2}$

a $(\xi + k)^2 + (\eta - k)^2 = 2k^2 + \frac{d^2}{2}$.

Svazky jsou zároveň promětny s řadou středů, jež probíhají přímky $\xi - \eta = 0$, resp. $\xi + \eta = 0$, a sice jsou páry sdružených prvků v promětných řadách středů, jež odpovídají napsaným právě párům kružnic, tyto:

$$O \text{ a } \left(\xi = \infty, \quad \frac{\eta}{\xi} = -1\right)$$

$$\left(\xi = \infty, \quad \frac{\eta}{\xi} = 1\right) \text{ a } O$$

$$(k, k) \text{ a } (-k, k),$$

při čemž

$$k = \frac{c^3}{d^2\sqrt{2}}.$$

Spojivé přímky přiřazených si bodů obalují rovnostrannou hyperbolu, mající přímky $\xi \pm \eta = 0$ za asymptoty; poněvadž spojka bodů (k, k), $(-k, k)$ jest rovnoběžna s osou Ox, je bod $x = o$, $y = k$ vrcholem hyperboly. Rovnice této hyperboly zní

$$y^2 - x^2 = k^2,$$

a splývá s rovnicí (24). Tedy máme větu:

„*V prométných svazcích kružnic* (26) *obalují spojivé přímky středů přiřazených si kruhů rovnostrannou hyperbolu*

$$\eta^2 - \xi^2 = k^2, \quad k^2 = \frac{c^6}{2d^4}. \tag{24*}$$

Tím konstrukce prométných svazků kruhových (26) redukována na elementární úlohu tečen hyperboly. Svazky ty vytvořují spiriku (25), která jest obálkou kružnic majících středy na téléž hyperbole (24*), jichž rámě ve středu ellipsy vedené má stálou hodnotu $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Znamenáme-li $p'q'$, $p''q''$ středy kruhů (26), máme

$$p'p'' = -k^2, \quad q'q'' = k^2, \tag{26'}$$

t. j. *průměty středů prométně si příslušných kruhů* (26) *do os* Ox, Oy *tvoří páry kvadratických involucí na těchto osách.* Dvojné prvky involucí jsou ve vrcholech hyperboly (24*).

Kruhové čtveřiny a paty oskulačních tětiv zvlášť jsou v jednoduché souvislosti s hyperbolou, jejíž asymptoty mají směr hlavních příček.

Rovnici čtveřiny kruhové ($\mathfrak{f}_4 = 1$) lze psáti

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_1 z + \mathfrak{f}_3 \frac{1}{z},$$

a dosadíme-li sem $z = \cos\Theta + i \sin\Theta$, $\frac{1}{z} = \cos\Theta - i\sin\Theta$, vyjde

$$(\alpha) \quad 2\cos 2\Theta + \mathfrak{f}_2 = (\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3)\cos\Theta + (\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3)\, i \sin\Theta;$$

je však

$$\cos\Theta = \frac{x}{a}, \quad \sin\Theta = \frac{y}{b}, \quad \cos 2\Theta = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

znamená-li nám x, y souřadnice bodu Θ na ellipse.

Rovnice (α) tedy zní

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{2}\mathfrak{f}_2 = \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{2a} x + \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{2b} iy, \tag{27}$$

což ukazuje, že kruhová čtveřina ($\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4 = 1$) leží na hyperbole (27), jejíž asymptoty mají směr hlavních příček, takže osy jsou rovnoběžny s osama ellipsy; střed hyperboly $x_0 y_0$ má souřadnice

$$x_0 = a\frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4}, \quad y_0 = b\frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4i}. \tag{27^a}$$

Rovnici naší hyperboly lze též psáti

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{1}{2}\mathfrak{f}_2; \tag{27*}$$

střed kruhu opsaného naší čtveřiny má souřadnice (8)

$$p = \frac{c^2}{2a^2} x_0, \quad q = -\frac{c^2}{2b^2} y_0, \tag{27^b}$$

rovnice kruhu pak zní

$$\xi^2 + \eta^2 - 2p\xi - 2q\eta + \frac{c^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{d^2}{2} = 0.$$

Je-li čtveřina příslušná k oskulačním tětivám ($\mathfrak{f}_2 = 0$) o společném průseku (x, y),*) jest

$$x = 2x_0, \quad y = 2y_0:$$

*) Buď V vrchol tětiv oskulačních, H střed hyperboly (28), T těžiště pat; pak platí vektorielní vztahy

$$OH = 2OT, \quad OV = 4OT.$$

„Paty oskulačních tětiv ellipsy (a, b) vedených bodem x, y, leží na hyperbole)*

$$\frac{(\xi - x_0)^2}{a^2} - \frac{(\eta - y_0)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}, \tag{28}$$

jejíž střed $x_0\, y_0$ leží uprostřed mezi středem ellipsy a vrcholem tětiv (x, y), a která prochází středem ellipsy.“

Naopak, zvolíme-li dle libosti střed x_0, y_0, ustanoví hyperbola (28) na základní ellipse (a, b) čtyry body, jichž oskulační tětivy procházejí bodem $(2x_0, 2y_0)$.

Hyperbola (28) se rozpadne v přímky jen když zmizí pravá strana, t. j. leží-li její střed na jedné z obou hlavních příček.

Obecně jest u každé kruhové čtveřiny (27^b)

$$\frac{q}{p} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0};$$

leží-li $x_0 y_0$ na hlavní příčce $y = \pm \frac{bx}{a}$, bude

$$\frac{y_0}{x_0} = \pm \frac{b}{a}, \quad \frac{q}{p} = \mp \frac{a}{b},$$

t. j. střed patního kruhu p, q leží na průměru ellipsy kolmém na uvažovanou hlavní příčku. Tato příčka obsahuje také vrchol tětiv oskulačních x, y, a hyperbola rozpadá se ve dvě přímky, z nichž jedna je naše hlavní příčka, druhá je rovnoběžná s druhou hlavní příčkou. Šine-li se tedy bod $x_0 y_0$ po hlavní příčce, zůstávají dvě paty tětiv stálé (jsou to konce hlavní příčky), druhé dvě paty jsou na rovnoběžkách s druhou hlavní příčkou. (Srovnej výše čl. 9.).

Zároveň shledáváme, že v žádném jiném čtyřúhelníku pat oskulačních tětiv není stran rovnoběžných s hlavní příčkou ellipsy; t. j.

„Leží-li čtyry body ellipsy z_1, z_2, z_3, z_4 na kruhu, a je-li strana $z_1 z_2$ rovnoběžna s hlavní příčkou ale od ní různa, protnou se oskulační tětivy všech čtyř bodů v jednom bodě jen tehdy, splyne li strana $z_3 z_4$ s druhou hlavní příčkou.“

*) Srov. A. del Re, l. c., str. 89—93.

Neboť hyperbola (28) má pak tětivu $z_1 z_2$ rovnoběžnou s asymptotou, tětiva má s ní 3 body společné a tvoří její součást.

---

11. Ze vztahu

$$\frac{q}{p} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$$

vychází, vzpomeneme-li, že normála v bodě $x'y'$ na ellipse má směrnici

$$+\frac{a^2 y'}{b^2 x'},$$

následující věta:

„*Pro libovolnou čtveřinu kruhovou na ellipse buď S střed hyperboly, která prochází čtveřinou a má směr asymptot ve hlavních příčkách ellipsy, C střed kruhu čtveřiny a O střed ellipsy.*

Přímka OS protne ellipsu v bodě M, jemuž nechť jest M' souměrný vzhledem k jedné ose; normála ellipsy v bodě M' vedená jest rovnoběžna s přímkou OC."

Jinak řečeno, normála v bodě M a přímka OC stanoví na ellipse čtyry body ležící na kruhu.

Probíhá-li bod S průměr OM, musí kruhový střed C rovněž zůstati na pevném průměru ellipsy. Danému hodu S odpovídá určitý bod C, a příslušné hyperboly tvoří svazky o rovnoběžných asymptotách, jimž odpovídají kruhy soustředné.

Buď $\Theta = \omega$ úhlový parametr bodu M, tedy směrnice přímky OC

$$\frac{q}{p} = -\frac{a}{b}\, tg\, \omega,$$

rovnice přímky OC tedy bude

$$(\alpha) \qquad aX \sin\omega + bY \cos\omega = 0,$$

rovnice normály MN v bodě M pak

$$(\beta) \qquad aX \sin\omega - bY \cos\omega - c^2 \sin\omega \cos\omega = 0.$$

Součin rovnic (α) (β)

$$(\gamma) \qquad a^2X^2 \sin^2\omega - b^2Y^2 \cos^2\omega - c^2 \sin\omega \cos\omega\,(aX \sin\omega + bY \cos\omega) = 0$$

podává zvrhlou kuželosečku sestávající z přímek MN a OC. Připojme k ní rovnici ellipsy

$$\lambda(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2) = 0,$$

$$(\lambda b^2 + a^2 \sin^2 \omega) X^2 + (\lambda a^2 - b^2 \cos^2 \omega) Y^2$$
$$= c^2 \sin \omega \cos \omega (aX \sin \omega + bY \cos \omega) + \lambda a^2b^2$$

Ustanovme λ tak, aby součinitelé při X^2 a Y^2 splynuly, tedy z rovnice

$$c^2\lambda = a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega,$$

takže pak

$$c^2(\lambda a^2 - b^2 \cos^2 \omega) = a^4 \sin^2 \omega + b^4 \cos^2 \omega = A^4$$

a rovnice bude zníti

$$A^4(X^2 + Y^2) = c^4 \sin \omega \cos \omega (aX \sin \omega + bY \cos \omega)$$
$$+ a^2b^2(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega).$$

Je to rovnice kruhu, jenž prochází společnými body ellipsy se zvrhlou kuželosečkou (γ).

Píšeme-li ji ve tvaru

$$X^2 + X^2 = 2PX + 2QY + N,$$

máme pro souřadnice středu

$$P = \frac{ac^4 \sin^2 \omega \cos \omega}{2A^4}, \quad Q = \frac{bc^4 \sin \omega \cos^2 \omega}{2A^4},$$

dále

$$N = \frac{a^4b^2 \sin^2 \omega + a^2b^4 \cos^2 \omega}{A^4},$$

$$\frac{d^2}{2} - N = \frac{c^2}{2} \frac{a^4 \sin^2 \omega - b^4 \cos^2 \omega}{a^4 \sin^2 \omega + b^4 \cos^2 \omega}.$$

Poněvadž u kruhové čtveřiny

$$\frac{c^2}{4} \mathfrak{f}_2 = \frac{d^2}{2} - N,$$

máme

$$\mathfrak{f}_2 = 2 \frac{a^4 \sin^2 \omega - b^4 \cos^2 \omega}{a^4 \sin^2 \omega + b^4 \cos^2 \omega},$$

tedy obecně $\mathfrak{f}_2$ od nully různo.

Z hořejších výrazů P a Q nalezneme postupně

$$a^2P^2+b^2Q^2=\frac{c^8 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{4A^4}$$

$$\frac{P^2}{a^2}+\frac{Q^2}{b^2}=\frac{c^8 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{4A^8}$$

$$PQ=\frac{abc^8 \sin^3\varphi \cos^3\varphi}{4A^8}$$

a odtud

$$(a^2P^2+b^2Q^2)^2\left(\frac{P^2}{a^2}+\frac{Q^2}{b^2}\right)=\frac{c^8}{4a^2b^2}P^2Q^2 \tag{29}$$

rovnice racionální čáry stupně 6., kterou probíhá střed kruhu P, Q.

---

12. Vraťme se k problému pat oskulačních tětiv ellipsy (a, b) vedených z daného bodu (x, y) – vrcholu čtveřiny — jichž parametry $z=e^{i\Theta}$ hoví rovnici

$$z^4-\mathfrak{f}_1z^3+\mathfrak{f}_3z+1=0 \quad (\mathfrak{f}_4=1,\ \mathfrak{f}_2=0);$$

patní kruh má rovnici

$$\xi^2+\eta^2-2p\xi-2q\eta=\frac{d^2}{2}, \tag{22}$$

$$p=\frac{c^2}{8a}(\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_3),\quad q=\frac{c^2i}{8b}(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{f}_3),$$

$$p=\frac{c^2x}{4a^2},\quad q=-\frac{c^2y}{4b^2}. \tag{22^a}$$

Poloměr kruhu patního r plyne z rovnice

$$r^2=p^2+q^2+\frac{d^2}{2};$$

vrcholy čtveřin oskulačních tětiv, pro něž patní kruh má daný poloměr r, probíhají tedy ellipsu

$$\frac{c^4}{16}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{d^2}{2}=r^2,$$

t. j. ellipsu

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1, \tag{30}$$

kde

$$A=\frac{4a^2}{c^2}\sqrt{r^2-\frac{d^2}{2}},\quad B=\frac{4b^2}{c^2}\sqrt{r^2-\frac{d^2}{2}}. \tag{30^a}$$

Zajímavější je (ač takměř samozřejmo), že středy patních kruhů oskulačních tětiv, pro něž poloměr má danou hodnotu r, leží na kruhu

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 - \frac{d^2}{2}.$$

Máme tedy větu:

„Kruhy opsané daným poloměrem r kolem středů ležících na kružnici

$$(K) \qquad \xi^2 + \eta^2 = r^2 - \frac{d^2}{2}$$

protínají původní ellipsu (a, b) t. j.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ve čtveřinách z_1, z_2, z_3, z_4, jichž oskulační tětivy procházejí společným bodem ležícím na ellipse (30); *jeho souřadnice znějí*

$$x = \frac{4a^2\xi}{c^2}, \quad y = -\frac{4b^2}{c^2}\eta,$$

jsou-li ξ, η souřadnice středu opsaného kruhu (r)."

Kruhy (K) se dotýkají soustředných kruhů o poloměrech

$$r \pm \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{2}},$$

jež tvoří jich čáru obalovou.

Rovnice (22^a) vyjadřují affinitu mezi bodem (x, y) a středem kruhu patního (p, q) a jest zřejmo, že oba body probíhají čáry téhož stupně.

Buďte $M_0\,(x_0 y_0)$ a $M_1\,(x_1 y_1)$ vrcholy dvou čtveřin oskulačních tětiv, $K_0 = 0$ a $K_1 = 0$ rovnice příslušných jim kruhů patních.

Souřadnice libovolného bodu M na přímce $M_0 M_1$ lze psáti

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda},$$

což barycentricky vyjadřujeme jedinou rovnicí

$$M_0 + \lambda M_1 = (1 + \lambda) M.$$

Patní kruh oskulačních tětiv vedených bodem M má pak rovnici $K = 0$, kde

$$K_0 + \lambda K_1 \equiv (1 + \lambda) K.$$

„Probíhá-li bod M přímku (vrcholnici), probíhá patní kruh K oskulačních tětiv ellipsy (a, b) vedených z bodu M určitý svazek.“

Kruhy tohoto svazku mají ovšem ve středu ellipsy rámě stálé délky $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Naopak libovolné dva kruhy mající v bodě O rámě $\frac{d}{\sqrt{2}}$, t. j.

$$K_0 \equiv \xi^2 + \eta^2 - 2p_0\xi - 2q_0\eta - \frac{d^2}{2} = 0$$

$$K_1 \equiv \xi^2 + \eta^2 - 2p_1\xi - 2q_1\eta - \frac{d^2}{2} = 0$$

definují svazek patních kruhů $K_0 + \lambda K_1 = 0$, a vrcholy čtveřin oskulačních tětiv kruhům svazku příslušné probíhají přímku.

Buď nyní k vůli podrobnějšímu studiu této otázky rovnice vrcholnice dána ve tvaru

$$y = mx + s;$$

vrcholu (x, y) odpovídá střed patního kruhu

$$p = \frac{c^2x}{4a^2}, \quad q = -\frac{c^2y}{4b^2} = -\frac{c^2}{4b^2}(mx + s),$$

a patní kruh má rovnici

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{c^2x}{2a^2}\xi - \frac{c^2}{2b^2}(mx + s)\eta$$

t. j.

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{c^2}{2}x\left(\frac{\xi}{a^2} - \frac{m\eta}{b^2}\right) - \frac{c^2s}{2b^2}\eta. \tag{31}$$

„Tento *svazek patních kruhů má chordálu*

$$\frac{\xi}{a^2} - \frac{m\eta}{b^2} = 0, \tag{31^a}$$

„*jež prochází středem ellipsy* a má směrnici

$$m' = \frac{b^2}{a^2m},$$

závislou toliko na směru vrcholnice.“

Z rovnice $$mm' = \frac{b^2}{a^2},$$

plyne:

Páry průměrů ellipsy (a, b), *z nichž jeden má směr vrcholnice a druhý jest příslušná jí chordála, tvoří kvadratickou involuci paprsků mající za dvojné prvky hlavní příčky*

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}.$$

Vrcholy P, Q svazku (31) jsou průseky chordály (31[a]) s kruhem

$$\xi^2 + \eta^2 + \frac{c^2 s}{2b^2}\eta = \frac{d^2}{2}. \qquad (32)$$

Centrála (geom. místo středů) svazku (31) má rovnici

$$a^2 mp + b^2 q + \frac{c^2}{4} s = 0$$

při proměnných souřadnicích p, q.

Prochází-li vrcholnice středem ellipsy ($s = 0$), prochází jím též centrála.

„Šine-li se vrcholnice neměníc směr, probíhají vrcholy PQ svazku patních kruhů oskulačních tětiv kvadratickou involuci na přímce

$$\eta = m'\xi, \quad mm' = \frac{b^2}{a^2},$$

jejíž páry jsou v promětné souvislosti s body (o, s), v nichž vrcholnice protíná osu Oy.

„Otáčí-li se vrcholnice kolem pevného bodu (o, s) osy Oy, probíhají vrcholy PQ kvadratickou involuci na kruhu (32), jejíž střed je ve středu ellipsy."

Souvislost mezi stopou vrcholnice (o, s) a středem příslušného kruhu patního (32)

$$q_0 = -\frac{c^2 s}{4b^2}$$

je promětnost soumístných řad na Oy, pro niž známe body samodružné (O a ∞) a pro niž jeden pár

$$s = b, \quad q_0 = -\frac{c^2}{4b}$$

je v úzké souvislosti s vrcholem ellipsy a jeho středem zakřivení.

Hyperboly (28)

$$\frac{\xi^2 - 2x_0\xi}{a^2} - \frac{\eta^2 - 2y_0\eta}{b^2} = 0,$$

jež procházejí patami oskulačních tětiv s vrcholem (x, y) probíhají rovněž svazek, probíhá-li vrchol přímku

$$y = mx + s.$$

A sice jest — vzhledem k hodnotám $2x_0 = x$, $2y_0 = y$ — rovnice tohoto svazku

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2},$$

tedy po dosazení hodnoty

$$y = mx + s$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{s\eta}{b^2} = x\left(\frac{\xi}{a^2} - \frac{m\eta}{b^2}\right).$$

Chordála svazku hyperbol těchto jest též přímka (31[a]) jako chordála patních kruhů, a rovněž tomu tak jest u svazku hyperbol rovnostranných, patami oskulačních tětiv určených.

Patní kruh oskulačních tětiv je libovolný kruh, jehož mocnost v bodě O (středu ellipsy) obnáší $-\frac{1}{2}d^2$. Můžeme jej považovati za stopu koule soustředné

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2px - 2qy - \frac{d^2}{2} = 0,$$

která protíná osu Oz ve dvou stálých bodech $z = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Výpočty platí s malými modifikacemi také pro hyperbolu (dosazujeme za b ryze pomyslnou hodnotu), nemají smyslu pro parabolu.

Buď

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

rovnice libovolné kuželosečky středové, a hledejme tvar rovnice patních kruhů oskulačních tětiv pro tuto kuželosečku; buď

$$A = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}$$

diskriminant rovnice, literami $A_{\alpha\beta}$ znamenejme jeho subdeterminanty. Pošiňme nejprve osy souřadnic tak, aby počátek padl do středu kuželosečky $x_0 y_0$, načež otočme soustavu tak, aby osy se octly v osách čáry; rovnice této bude zníti

$$a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33} = 0,$$

$$a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}, \quad a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}, \quad a'_{11}a'_{22} = A_{33}.$$

Pro poloosy a, b máme pak

$$a^2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}, \quad b^2 = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

takže mocnost kruhu

$$m = -\frac{d^2}{2}$$

bude vyjádřena rovnicí

$$2m = -a^2 - b^2 = a'_{33}\frac{a'_{11} + a'_{22}}{a'_{11}a'_{22}},$$

t. j.

$$(\alpha) \qquad 2m = \frac{A(a_{11} + a_{22})}{A_{33}^2}.$$

Rovnice patního kruhu oskul. tětiv

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0$$

má určitou hodnotu n, a sice je tu mocnost kruhu ve středu kuželosečky rovna m:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 - 2qy_0 + n = m;$$

dosadí-li se hodnoty souřadnic středu kuželosečky

$$x_0 = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{32}}{A_{33}},$$

obdržíme vzhledem k (α) pro parametr n vztah hledaný:

$$(\beta) \qquad nA_{33}^2 = \frac{1}{2}A(a_{11} + a_{22}) - A_{31}^2 - A_{32}^2 + 2A_{33}(pA_{31} + qA_{32}).$$

Pro kruh soustředný s kuželosečkou ($p = x_0$, $q = y_0$) máme pohodlnější tvar

$$n = x_0^2 + y_0^2 + m$$

t. j. rovnice tohoto kruhu zní

$$x^2 + y^2 - 2\frac{A_{31}x + A_{32}y}{A_{33}} + \frac{A_{31}^2 + A_{32}^2 + \frac{1}{2}A(a_{11} + a_{22})}{A_{33}^2} = 0.$$

13. *Normály z daného bodu.*

V bodě

$$x = a \cos \Theta, \quad y = b \sin \Theta$$

vedená normála ellipsy má rovnici

$$aX \sin \Theta - bY \cos \Theta = c^2 \sin \Theta \cos \Theta,$$

a její Plückerovské souřadnice znějí

$$u = -\frac{a}{c^2 \cos \Theta}, \quad v = \frac{b}{c^2 \sin \Theta}, \tag{33}$$

z čehož vychází, jak známo, tangenciální rovnice evoluty ve tvaru

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = c^4. \tag{33^0}$$

Libovolným bodem roviny x, y jdou obecně čtyry tečny evoluty, t. j. čtyry normály ellipsy.

Do rovnice tohoto bodu

$$ux + vy + 1 = 0$$

vložme hodnoty (33) upravené jak následuje

$$u = -\frac{2a}{c^2}\frac{z}{z^2+1}, \quad v = \frac{2ib}{c^2}\frac{z}{z^2-1}, \quad (z = e^{i\Theta}),$$

i obdržíme rovnici

$$c^2(z^4 - 1) - 2ax\, z(z^2 - 1) + 2ib\, yz(z^2 + 1) = 0,$$

jejíž kořeny znamenejme z_1, z_2, z_3, z_4.

Symetrické úkony jejich hoví podmínkám

$$\mathfrak{f}_4 = -1, \quad \mathfrak{f}_2 = 0, \tag{33^1}$$

které zároveň stačí, aby normály čtyř bodů z_ν šly společným bodem. Dále jest

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{2ax - 2iby}{c^2}, \quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{2ax + 2iby}{c^2}$$

a tedy máme pro souřadnice průseku normál výrazy

$$x = \frac{c^2}{4a}(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3), \quad y = \frac{c^2 i}{4b}(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3). \tag{33^2}$$

Rovnice, jejíž kořeny jsou parametry $z_\nu = e^{i\Theta_\nu}$ pat normál, zní

$$z^4 - 1 - (\mathfrak{f}_1 z^3 + \mathfrak{f}_3 z) = 0.$$

čili dělíme-li na z^2 a zavedeme trigonometrické funkce

$$2i \sin 2\Theta - (\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3) \cos \Theta - i(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3) \sin \Theta = 0.$$

Avšak na ellipse jest

$$\xi = a \cos \Theta, \quad \eta = b \sin \Theta,$$

tedy rovnice naše podává

$$\xi\eta - \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4i} b\xi - \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4} a\eta = 0, \tag{33^3}$$

aneb zavedeme-li souřadnice průseku normál x, y:

$$c^2\xi\eta + b^2y\xi - a^2x\eta = 0. \tag{34}$$

Toť rovnice rovnostranné hyperboly *Apolloniovy*, která prochází stopami normál ellipsy vedených z bodu (x, y). Hyperbola ta patrně prochází středem ellipsy a bodem daným, má asymptoty rovnoběžné s jejíma osama, a souřadnice jejího středu znějí

$$x_0 = \frac{a^2x}{c^2}, \quad y_0 = -\frac{b^2y}{c^2}. \tag{34^0}$$

Rovnici (34) možno též psáti

$$(\xi - x_0)(\eta - y_0) = x_0y_0 = -\frac{a^2b^2\,xy}{c^4}. \tag{34^1}$$

První z rovnic (33^1) uvádí Gauss ve tvaru

$$(a) \qquad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = (2k + 1)\pi,$$

k celistvé číslo.

Poněvadž z ní vychází

$$z_3 = -\frac{1}{z_1z_2z_3},$$

jest

$$\mathfrak{f}_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - \frac{1}{z_1z_2} - \frac{1}{z_2z_3} - \frac{1}{z_3z_1}.$$

a druhá podmínka (33^1) může se psáti

$$(b) \quad \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + \sin(\Theta_2 + \Theta_3) + \sin(\Theta_3 + \Theta_1) = 0,$$

kterýžto vztah podal W. S. Burnside. Toť zároveň podmínka, aby normály ve třech bodech měly společný průsek.*)

Užíváme-li parametru

$$t = tg\frac{\Theta}{2},$$

znějí souřadnice normály

$$u = \frac{a}{c^2}\frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad v = \frac{b}{c^2}\frac{t^2+1}{2t},$$

a paty normál vedených z bodu (x, y) hoví rovnici

$$\frac{ax}{t^2-1} + \frac{by}{2t} + \frac{c^2}{t^2+1} = 0,$$

jejíž kořeny t_1, t_2, t_3, t_4 mějte základní úkony symetrické $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$.

Zde obdržíme podmínky téhož tvaru jako (33[1])

$$\mathfrak{g}_2 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 = -1, \tag{33^4}$$

z nichž druhou zejména podal M. Desboves,**) t. j.

$$(c) \qquad tg\frac{\Theta_1}{2}\,tg\frac{\Theta_2}{2}\,tg\frac{\Theta_3}{2}\,tg\frac{\Theta_4}{2} = -1.$$

Pro souřadnice průseku máme vztahy

$$by\mathfrak{g}_1 + 2(ax + c^2) = 0,$$
$$by\mathfrak{g}_3 + 2(ax - c^2) = 0.$$

V našem případě komplexního parametru jest identicky

$$\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_4\,\Sigma\frac{1}{z_\nu} = -\Sigma\frac{1}{z_\nu},$$

odtud

$$\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = 2\Sigma\cos\Theta_\nu, \quad \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = 2i\Sigma\sin\Theta_\nu;$$

---

*) Znamenáme-li základní úkony souměrné parametrů ζ_1, ζ_2, ζ_3 literami φ_1, φ_2, φ_3, zní podmínka, aby normály v bodech ζ_1, ζ_2, ζ_3 vedené obsahovaly společný bod, takto:

$$\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3 = 0.$$

**) Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques. Paris, 1861. — Literární údaje vzaty z Encyklopädie der math. Wissenschaften (Teubner), na niž i pro jiné podrobnosti odkazujeme.

znamenáme-li X a Y souřadnice *těžiska pat normál*, máme dle toho

$$\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = \frac{8X}{a}, \quad \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = \frac{8iY}{b},$$

a tedy (33^2) pro průsek normál platí

$$x = \frac{2c^2}{a^2} X, \quad y = -\frac{2c^2}{b^2} Y,$$

kdežto střed rovnostranné hyperboly určené patami normál jest

$$x_0 = 2X, \quad y_0 = 2Y, \tag{34^2}$$

tak že těžisko pat leží úprostřed mezi středem ellipsy a středem patní hyperboly.

Pohybuje-li se bod (x, y) *na hyperbole* $xy = k$, *(k libovolná stálá), zůstává patní hyperbola normál* (34^1) *ellipsy* (a, b) *z něho vedených shodnou, má rovnici*

$$(\xi - x_0)(\eta - y_0) = -\frac{ka^2b^2}{e^4},$$

měníc toliko polohu; její střed probíhá hyperbolu s ní shodnou

$$x_0 y_0 = -\frac{ka^2b^2}{c^4}.$$

Rovnoběžné tětivy zz_1 a $z'z'_1$ hoví podmínce $zz_1 = z'z'_1$. Odtud pro $z'_1 = 1$, $z = z_1$ vychází $z' = z^2$; při tom z' je průsek ellipsy s přímkou vedenou z vrcholu $A(\Theta = 0)$ ellipsy rovnoběžně s její tečnou v bodě z^2. Jinak řečeno, vedeme-li z vrcholu $\Theta = 0$ kolmici na normálu bodu z, protne tato ellipsu v bodě z^2.

Buďte $z_1 \ldots z_4$ paty normál o společném průseku, body $z'_\nu = z^2_\nu$ dávají čtveřinu kruhovou ($z'_1 z'_2 z'_3 z'_4 = 1$). Pro její symetrické úkony $\mathfrak{f}'_\nu$ máme obecně

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}'_1 &= \Sigma z'_\nu = \mathfrak{f}_1^2 - 2\mathfrak{f}_2 \\
\mathfrak{f}'_2 &= \Sigma z'_1 z'_2 = \mathfrak{f}_2^2 + 2\mathfrak{f}_4 - 2\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_3 \\
\mathfrak{f}'_3 &= \Sigma z'_1 z'_2 z'_3 = \mathfrak{f}_3^2 - 2\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4 \\
\mathfrak{f}'_4 &= \mathfrak{f}_4^2,
\end{aligned}$$

tedy vzhledem k hodnotám $\mathfrak{k}_2 = 0$, $\mathfrak{k}_4 = 1$:

$$\mathfrak{k}'_1 = \mathfrak{k}_1^2,\quad \mathfrak{k}'_3 = \mathfrak{k}_3^2,\quad \mathfrak{k}'_2 = -2 - 2\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_3,\quad \mathfrak{k}'_4 = 1.$$

Střed kruhu určeného čtveřinou z'_ν má dle (8) souřadnice

$$p = \frac{c^2}{8a}(\mathfrak{k}_1^2 + \mathfrak{k}_3^2) = \frac{c^2}{8a}(\mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{k}_3)(\mathfrak{k}_1 - i\mathfrak{k}_3)$$

$$q = \frac{c^2 i}{8b}(\mathfrak{k}_1^2 - \mathfrak{k}_3^2) = \frac{c^2 i}{8b}(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3)(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3).$$

Značí-li $x_0 y_0$ průsek normál, máme dle (33^2)

$$\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3 = -\frac{4bi}{c^2}y_0,\quad \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3 = \frac{4ax}{c^2},$$

mimo to dávají rovnice

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{2}{c^2}(ax_0 - iby_0),\quad \mathfrak{k}_3 = -\frac{2}{c^2}(ax_0 + iby_0)$$

výrazy

$$\mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{k}_3 = \frac{2}{c^2}[(ax_0 + by_0) - i(by_0 + ax_0)],$$

$$\mathfrak{k}_1 - i\mathfrak{k}_3 = \frac{2}{c^2}[(ax_0 - by_0) - i(by_0 - ax_0)],$$

takže vychází po jich dosazení

$$(A)\qquad p = \frac{a^2x_0^2 - b^2y_0^2}{ac^2},\quad q = \frac{2ax_0y_0}{c^2},$$

($x_0 y_0$ průsek normál v bodech z_1, z_2, z_3, z_4, pq střed kruhu určeného body z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2).

V rovnici tohoto kruhu

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0$$

má stálý člen hodnotu

$$n = \frac{c^2}{4}\mathfrak{k}'_2 - \frac{d^2}{2} = -\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2}\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_3$$

t. j.

$$(A_1)\qquad n = \frac{2}{c^2}(a^2x_0^2 + b^2y_0^2) - a^2.$$

Pro poloměr kruhu r máme při označení $a^2x_0^2 = l$, $b^2y_0^2 = m$

$$r^2 = p^2 + q^2 - n = \frac{l^2 + m^2 - 2lm}{a^2c^4} + \frac{4lm}{b^2c^4} + a^2 - 2\frac{l+m}{c^2}$$

t. j.

$$r^2 = \left(\frac{l+m}{ac^2} - a\right)^2 + \frac{4lm}{a^2b^2c^2},$$

čili explicitně

$$(A_2) \qquad r^2 = \left(\frac{a^2x_0^2 + b^2y_0^2}{ac^2} - a\right)^2 + \frac{4x_0^2y_0^2}{c^2}.$$

Jako geometrické místo bodu x_0y_0, z něhož vedené normály ellipsy (a, b) mají paty z_ν dávající kruh čtveřiny (z_ν^2) o stálém poloměru, vychází čára stupně 4.

Jako zvlášť zajímavý případ uveďme ten, kdy n je veličina stálá $= g^2$. Podle (A_1) bude

$$a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = \frac{1}{2}(a^2 + g^2)\, c^2,$$

a obdržíme tedy

$$(B) \qquad x_0 = bG \cos \varphi, \quad y_0 = aG \sin \varphi,$$

kde položeno

$$G = \frac{c}{ab}\sqrt{\frac{a^2 + g^2}{2}}.$$

Tu bude dle (A)

$$(B_1) \qquad p = \frac{ab^2}{c^2} G^2 \cos 2\varphi, \quad q = \frac{a^2b}{c^2} G^2 \sin 2\varphi.$$

Kruhy čtveřin (z_ν^2)

$$(B_2) \qquad x^2 + y^2 - 2px - 2qy + g^2 = 0$$

mají středy na ellipse (B_1) a protínají orthogonálně kruh pevný

$$x^2 + y^2 = g^2;$$

jich obalová čára jest Perseova spirika.

Body průseků normál (B) opisují ellipsu homothetickou.

Abychom stanovili rovnici obalové čáry těchto kruhů, zaveďme komplexní parametr

$$\lambda = e^{2i\varphi}$$

načež rovnice (B_1) dávají

$$p = \frac{a^2 + g^2}{2a} \cos 2\varphi = \frac{a^2 + g^2}{4a} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda},$$

$$q = \frac{a^2 + g^2}{2b} \sin 2\varphi = \frac{a^2 + g^2}{4bi} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda},$$

a rovnice kruhu (B_2) se přepíše na

$$2\lambda(x^2+y^2+g^2)-\frac{a^2+g^2}{ab}[(bx-aiy)\lambda^2+(bx+aiy)]=0.$$

Obalová čára odpovídá párům x, y, pro něž vymizí diskriminant této rovnice o neznámé λ; tedy rovnice obalové čáry kruhů (B_2) zní

$$(B^*) \qquad (x^2+y^2+g^2)^2=\left(\frac{a^2+g^2}{ab}\right)^2(b^2x^2+a^2y^2).$$

Případ této čáry příslušný k hodnotě $g=0$ [kruhy (B_2) tu procházejí středem ellipsy] je znám pod jménem *Boothovy lemniskaty*

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+\frac{a^4}{b^2}y^2,$$

která zde jest středová úpatnice ellipsy, jejíž polouosy jsou a, $\frac{a^2}{b}$.

Průseky normál tvoří ellipsu

$$x_0=\frac{c}{\sqrt{2}}\cos\varphi,\quad y_0=\frac{ac}{b\sqrt{2}}\sin\varphi.$$

Uvažujme dále případ, kdy průsek normál x_0y_0 opisuje průměr základní ellipsy

$$y_0=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\Theta\,.\,x_0 \quad (\Theta=\text{konst.}).$$

Položme $x_0=\lambda b\cos\Theta$, $y_0=\lambda a\sin\Theta$, načež bude dle (A)

$$\frac{q}{p}=\frac{2a^2x_0y_0}{a^2x_0^2-b^2y_0^2}=\frac{a}{b}\operatorname{tg}2\Theta,$$

a bude kruh čtveřiny (z_ν^λ) míti rovnici tvaru

$$(C) \quad x^2+y^2-a^2-\frac{2ab\lambda^2}{c^2}(bx\cos2\Theta+ay\sin2\Theta-ab)=0;$$

kruhy (C) tvoří svazek (λ je proměnné), jeho chordála

$$\frac{x\cos2\Theta}{a}+\frac{y\sin2\Theta}{b}=1$$

je tečna ellipsy v bodě 2Θ, který znamenejme T. Vrcholy svazku leží na vrcholovém kruhu $x^2 + y^2 = a^2$.

Přímka AT je rovnoběžna s tečnou v bodě Θ, její rovnice má součinitele

$$\frac{\cos\Theta}{a}, \quad \frac{\sin\Theta}{b}$$

a tedy je $AT \perp ON$, značí-li N průsečík normál $(x_0 y_0)$. Tím dokázána věta*):

„Kolmice spuštěné z vrcholu ellipsy A na čtyři její normály ve svazku (N) protínají ellipsu v dalších čtyřech bodech na kruhu; tento obsahuje také dva body vrcholové kružnice, v nichž tato protíná určitou tečnu ellipsy. A sice jest dotykový bod T této tečny určen paprskem AT kolmým na průměr ON."

Věta platí o všech vrcholech ellipsy, takže nemusí A býti na fokální ose; ovšem vrcholovou kružnicí se tu rozumí ona, která příslušným bodem prochází.

V případě výpočtu, kdy A je bod $\Theta = 0$, přísluší bod T parametru 2Θ; tím jest úhel Θ určen.

Při daném bodě N určí se T bezprostředně, takže pro kruh k známe dva body; střed jeho leží na kolmici s spuštěné z bodu O na tečnu t v bodě T. Pomocí souřadnic bodu N vyjadřují se souřadnice středu K kruhu k rovnicemi

$$p = \frac{ab^2}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{a^2}\right), \quad q = \frac{2a\, x_0 y_0}{c^2},$$

z nichž jedna stačí k jeho stanovení. Jiná methoda určení kruhu k zakládá se na jeho mocnosti n v bodě O:

$$n = \frac{2a^2b^2}{c^2}\lambda^2 - a^2.$$

---

*) Joachimsthal, Crelleův žurn. sv. 48 (1853),
F. Padula, Raccolta di problemi di geometria (Napoli 1838),
J. A. Grunert, Grun. Arch. 43 (1865),
L. Painvin, Nouv. ann. math., 2e sér. 9. (1870),
E. Lucas, ibid. 15 (1876) a 20 (1880),
J. Et. Smith, Annali di Matem., 2. ser., vol. 3.
K. Pelz, Věstník král. české spol. nauk 1895.

Znajíce Θ můžeme sestrojiti bod N' o souřadnicích $b \cos \Theta$, $a \sin \Theta$, načež se určí $\pm \lambda$ jako poměr $ON : ON'$ (stačí operovati s pořadnicemi). Určíme konstantní délku

$$h = \frac{ab}{c}\sqrt{2},$$

načež sestrojíme délku $m = \pm h\lambda$; mocnost kruhu k v bodě O je pak $n = m^2 - a^2$, tedy snadno vyjadřitelna tvarem $\pm g^2$.

V případě $n = -g^2$ vedeme délku g vycházející ze středu ellipsy O kolmo na přímku s; její koncový bod je třetí známý bod hledaného kruhu k.

V případě $n = g^2$ opíšeme poloměrem g kolem středu O kruh Σ; kruh k je pak určen podmínkou, aby procházel daným bodem M (na vrcholové kružnici), měl střed na přímce s a protínal kolmo kruh Σ.*)

Podmínky, aby normály čtyř bodů $z_1 z_2 z_3 z_4$ se protínaly ve společném bodě, jsou

$$\mathfrak{f}_2 = 0, \quad \mathfrak{f}_4 = -1.$$

Dva parametry na př. z_3 a z_4 splynou, je-li průsek normál na evolutě; píšeme-li $z_3 = z_4 = z$, máme rovnice

$$z_1 z_2 = -\frac{1}{z^2}, \quad z^2 + 2z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0;$$

t. j.

$$(E) \qquad z_1 z_2 = -\frac{1}{z^2}, \; z_1 + z_2 = -\frac{z^2 - \frac{1}{z^2}}{2z},$$

které vyjadřují, že normály v bodech z_1, z_2 ellipsy protínají se v bodě evoluty, příslušném k parametru z. Je-li dán bod evoluty S — vlastně příslušný mu bod ellipsy z — dávají tyto rovnice symetrické úkony $z_1 z_2$, $z_1 + z_2$ parametrů pat druhých dvou normál, procházejících bodem S.

*) Vedeme tečny kruhu Σ z bodu M, a rozpolovacími body jich délek vedeme přímku; ta protne s v bodě K, jenž má od bodu M vzdálenost rovnu délce tečny ke kruhu Σ; K je střed kruhu k.

Podle rovnic (18') znějí souřadnice přímky patama těchto normál vedené

$$u = -\frac{1}{a}\frac{1+z_1 z_2}{z_1+z_2}, \quad v = -\frac{i}{b}\frac{1-z_1 z_2}{z_1+z_2},$$

t. j. po dosazení hodnot (E)

$$u = \frac{1}{a}\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{b}\frac{2iz}{z^2-1} = \frac{1}{y},$$

značí-li x a y souřadnice bodu ellipsy, jehož je S střed křivosti.

„*Pro libovolný bod M na ellipse promítněme jeho diametrální protějšek do obou os ellipsy; spojivá přímka průmětů protíná ellipsu ve dvou bodech M_1, M_2, jichž normály se protínají ve středu křivosti ellipsy pro bod M.*" *)

Z napsaných souřadnic přímky $M_1 M_2$, jež mají též tvar

$$u = \frac{1}{a \cos \Theta}, \quad v = \frac{1}{b \sin \Theta},$$

plyne **)

$$\frac{1}{a^2 u^2} + \frac{1}{b^2 v^2} = 1,$$

tangenciální rovnice čáry 4. třídy, kterou obaluje tato přímka $M_1 M_2$; její bodové vyjádření parametrické zní

$$x_0 = a \cos^3 \Theta, \quad y_0 = b \sin^3 \Theta,$$

takže vychází obyčejná rovnice obalové čáry ve tvaru

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Proveďme ještě konstruktivní řešení úlohy: Z průsečíku daných normál z_3 a z_4 stanoviti zbývající dvě normály ellipsy, které jím procházejí. ***)

*) Podobnou obecnější větu *Joachimsthalovu* viz později čl. 19.

**) Tato obalová čára těliv, pro něž normály na koncích sestrojené se protínají na evolutě, je též obalovou čarou involučních parabol (78) čl. 19.). Společná tečna dvou parabol nekonečně blízkých pochází od bodu na evolutě, jak zřejmo.

***) Srov. Joachimsthal, Crelleův žurn. 26 (1843), Cayley, tamtéž 56 (1857), Eckardt, Schlöm. Zts. 11 (1866).

Podmínky, aby normály z_γ se protínaly ve společném bodě lze psáti

I. $$z_1 z_2 = -\frac{1}{z_3 z_4},$$

II. $$z_1 z_2 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_3 z_4 = 0.$$

Při daných z_3, z_4 stanoví tyto dvě rovnice dvé involucí na na ellipse; určíme středy těchto involucí, přímka jimi určená stanoví pak na ellipse paty hledaných normál z_1 z_2.

Pro involuci I. máme páry

$$\left(\frac{1}{z_3}, \frac{-1}{z_4}\right) \text{ a } \left(\frac{-1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right),$$

t. j. body ellipsy příslušné k parametrům úhlovým

$$(-\Theta_3, \pi - \Theta_4), \text{ resp. } (\pi - \Theta_3, -\Theta_4).$$

Jedním z bodů z_3, z_4 vedeme rovnoběžku s Ox, druhým rovnoběžku s Oy (t. j. každým vedeme rovnoběžku s jednou z obou os ellipsy), přímky ty protnou ellipsu ve dvou bodech; úběžný bod jich spojivé přímky je střed involuce I.

V involuci II. známe páry (píšeme nyní litery t místo z, aby nenastala kollise s předešlou konstrukcí):

$$t_1 = -t_3, \quad t_2 = \frac{t_3^2}{t_4};$$

$$t_1 = -t_4, \quad t_2 = \frac{t_4^2}{t_3};$$

první pár dává pro t_1 diametrální protějšek bodu t_3, druhý prvek t_2 pak (na základě rovnice $t_2 t_4 = t_3^2$) je průsek ellipsy s přímkou, která prochází bodem t_4 a je rovnoběžna s tečnou ellipsy v bodě t_3.

Podobně sestrojíme druhý pár této involuce a jako průsek tětiv její střed.

Jiná konstrukce. Veďme přímky

$$\overline{z_1 z_2} \equiv (u, v) \text{ a } \overline{z_3 z_4} \equiv (u', v').$$

Rovnice (18[1]) dávají

$$z_1 z_2 = \frac{au + ibv}{au - ibv},$$

takže rovnice I.

$$z_1z_2 \,.\, z_3z_4 + 1 = 0$$

se přepíše na

(I[1]) $$a^2uu' - b^2vv' = 0,$$

což vyjadřuje, že přímky $\overline{z_1z_2}$, $\overline{z_1z_4}$ jsou harmonicky sdruženy vůči zvrhlé kuželosečce

$$a^2u^2 - b^2v^2 = 0,$$

která sestává z úběžných bodů hlavních příček. Tedy: Vedeme průměr ellipsy rovnoběžný s tětivou z_3z_4; přímka svazku O, s ním harmonicky sdružená vůči hlavním příčkám, udává stálý směr tětiv z_1z_2.

Pro interpretaci involuce II. užijme dále ještě rovnice taktéž z (18') plynoucí

$$z_1 + z_2 = -\frac{2}{au - ibv};$$

rovnice II. se přepíše na

$$(au + ibv)(au' - ibv') + (au' + ibv')(au - ibv) + 4 = 0,$$

t. j.

$$a^2uu' + b^2vv' + 2 = 0.$$

Rovnice II. tedy odpovídá přímkám $\overline{z_1z_2}$, $\overline{z_3z_4}$, které jsou harmonicky sdruženy vůči kuželosečce

$$a^2u^2 + b^2v^2 + 2 = 0,$$

která jest pomyslná ellipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Pól *) přímky z_3z_4 vůči této ellipse je střed involuce II. (bod, jímž procházejí tětivy z_1z_2).

---

*) Sestrojíme jej takto: Sestrojíme pól přímky z_3z_4 vůči reálné ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{2} = 0,$$

a přeneseme jeho vzdálenost od O na týž paprsek na opačnou stranu od bodu O.

Buďte $z_1 z_2 z_3\, z$ paty normál ellipsy spuštěných z bodu $x_0 y_0$, takže platí vztahy

$$(a) \qquad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = \frac{4ax_0}{c^2}, \quad \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = \frac{-4\,iby_0}{c^2}$$

$$(b) \qquad \mathfrak{f}_1 = \frac{2ax_0 - 2iby_0}{c^2}.$$

Bod $z' = -z$ leží s body $z_1 z_2 z_3$ na kruhu, poněvadž vztah $\mathfrak{f}_4 = -1$ dává $z' z_1 z_2 z_3 = 1$ (*Joachimsthalova kružnice* *). Abychom tento kruh určili, znamenejme $\mathfrak{h}_\nu$ souměrné úkony veličin $z'\, z_1\, z_2\, z_3$. Zaveďme dále označení

$$\mathfrak{g}_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \mathfrak{g}_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad \mathfrak{g}_3 = z_1 z_2 z_3,$$

takže rovnice

$$\mathfrak{f}_4 = -1, \quad \mathfrak{f}_2 = 0$$

dávají

$$(c) \qquad \mathfrak{g}_3 = -\frac{1}{z}, \quad \mathfrak{g}_2 = -\mathfrak{g}_1 z,$$

při čemž veličina $\mathfrak{g}_1$ určí se na základě vztahu (b) a

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1 + z$$

ve tvaru

$$(c^1) \qquad \mathfrak{g}_1 = \frac{2ax_0 - 2iby_0 - c^2 z}{c^2}.$$

Joachimsthalova kružnice určená čtveřinou $\mathfrak{h}_\nu$ má dle vzorců (8) rovnici

$$(J) \qquad x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0$$

$$p = \frac{c^2}{8a}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}(\mathfrak{h}_1 - \mathfrak{h}_3),$$

$$n = \frac{c^2}{4}\mathfrak{h}_2 - \frac{d^2}{2}.$$

Tu nalezneme pomocí hodnot (c)

$$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3 = (1 + z^2)\left(\mathfrak{g}_1 - \frac{1}{z}\right), \quad \mathfrak{h}_1 - \mathfrak{h}_3 = (1 - z^2)\left(\mathfrak{g}_1 + \frac{1}{z}\right),$$

$$\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = (1 - z^2)\left(\mathfrak{g}_1 - \frac{1}{z}\right), \quad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = (1 + z^2)\left(\mathfrak{g}_1 + \frac{1}{z}\right),$$

*) Crelleův žurn. 26 (1843), Cayley, ibid. 56 (1857).

a odtud hodnoty

$$(J_1) \qquad p = \frac{by_0}{2a} \cdot cotg\, \Theta, \quad q = \frac{ax_0}{2b}\, tg\, \Theta, \quad z = e^{i\Theta}.$$

Pro stanovení n máme $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 z = -2\mathfrak{g}_1 z$, tedy dle (c')

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_1 z = \frac{2ax_0 z - 2iby_0 z - c^2 z^2}{c^2};$$

pomyslná část výrazu $-\frac{c^2}{2}\mathfrak{h}_2$

$$2ax_0 \sin \Theta - 2by_0 \cos \Theta - c^2 \sin 2\Theta = 0$$

vymizí, poněvadž bod x_0y_0 leží na normále bodu Θ a zbývá

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{h}_2 = \frac{2ax_0 \cos \Theta + 2by_0 \sin \Theta - c^2 \cos 2\Theta}{c^2}$$

a odtud

$$(J_2) \qquad -n = ax_0 \cos \Theta + by_0 \sin \Theta + a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta.$$

Hodnoty (J_1) a (J_2) určují součinitele v rovnici kruhu Joachimsthalova.

Na normále bodu Θ je

$$\frac{x_0 - a \cos \Theta}{b \cos \Theta} = \frac{y_0 - b \sin \Theta}{a \sin \Theta} = \lambda,$$

t. j.

$$2p = \frac{b^2}{a} \cos \Theta + \lambda b \cos \Theta, \quad 2q = \frac{a^2}{b} \sin \Theta + \lambda a \sin \Theta$$

$$-n = d^2 + \lambda ab.$$

Probíhá-li bod N normálu určitého bodu Θ na ellipse, probíhá příslušný mu kruh Joachimsthalův svazek

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 x}{a} \cos \Theta - \frac{a^2 y}{b} \sin \Theta - d^2$$
$$- \lambda (bx \cos \Theta + ay \sin \Theta + ab) = 0,$$

jehož chordála

$$bx \cos \Theta + ay \sin \Theta + ab = 0$$

je tečna ellipsy v bodě $\Theta + \pi$ diametrálně protilehlém s patou normály, kterýžto bod je též jedním z vrcholů svazku.

Střední přímka svazku

$$p = \frac{b^2 \cos \Theta}{2a} + \frac{1}{2}\lambda b \cos \Theta, \quad q = \frac{a^2 \sin \Theta}{2b} + \frac{1}{2}\lambda a \sin \Theta$$

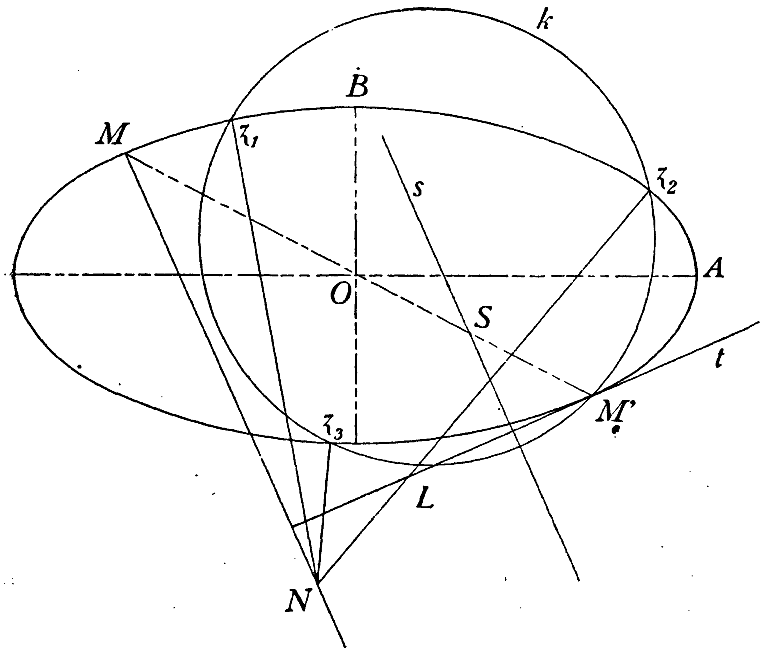
má rovnici

$$(s) \qquad \frac{2a}{\cos \Theta} x - \frac{2b}{\sin \Theta} y + c^2 = 0,$$

je tedy rovnoběžna s normálou Θ a prochází bodem

$$(S) \qquad x = -\frac{1}{2} a \cos \Theta, \quad y = -\frac{1}{2} b \sin \Theta,$$

jenž je středem poloměru ellipsy určeného bodem $\Theta + \pi$.



Obr. 2.

V obr. 2. je dána normála MN ellipsy AB; vedeme tečnu $M't$ v bodě M' na konci průměru MOM' a spustíme na ni kolmici s z bodu S, jenž půlí poloměr OM'. Libovolný kruh k, jenž prochází bodem M' a má střed na přímce s, protíná ellipsu ještě ve třech bodech z_1, z_2, z_3, jichž normály procházejí určitým bodem N na dané normále MN.

Šine-li se bod N po normále Θ, pohybuje se střed kruhu k po přímce s rychlostí poloviční; spojivá přímka obou bodů prochází pevným bodem

$$\left(x = -\frac{c^2}{a}\cos\Theta,\quad y = \frac{c^2}{b}\sin\Theta\right),$$

který je diametrálně protilehlý s příčním bodem normály.

Splynou-li z_1 a z_2, bude průsek N jejich normál bodem na evolutě. Daná normála MN dotýká se evoluty ve středu křivosti a protíná ji mimo to ve čtyřech bodech, z nichž dva jsou reálné. V našem svazku kruhů k (vrchdly M' a L) existují dva reálné a dva pomyslné kruhy, které se ellipsy dotýkají; jejich poloměry (normály ellipsy) v bodech dotykových stanoví na MN čtyři body — dva reálné a dva pomyslné — jež jsou průseky přímky MN s evolutou ellipsy.

Buďte M_1, M_2 paty dvou normál ellipsy (a, b) na sobě kolmých; jich tečny M_1T, M_2T budou rovněž na sobě kolmy a protnou se tedy v určitém bodě T kruhu (d)

$$(T) \qquad x = d\cos\varphi,\quad y = d\sin\varphi.$$

Normály samy se protnou v bodě N; ten při proměnných M_1M_2 opíše jistou čáru — geometrické místo průseků na sobě kolmých normál — kterou chceme určiti.

Souřadnice bodu N znamenejme XY, souřadnice bodů M_ν pak $x_\nu y_\nu$. Body TM_1NM_2 tvoří obdélník a je tedy barycentricky

$$N + T = M_1 + M_2,$$

t. j.

$$(a) \qquad X = x_1 + x_2 - d\cos\varphi,\quad Y = y_1 + y_2 - d\sin\varphi.$$

Body M_1M_2 jsou průseky ellipsy s polárou bodu T

$$b^2d\cos\varphi\, x + a^2d\sin\varphi\, y - a^2b^2 = 0.$$

Pro parametr Θ průsečného bodu platí

$$x = a\cos\Theta,\ y = b\sin\Theta,$$

r. j. bude

$$b\cos\varphi\cos\Theta + a\sin\varphi\sin\Theta - \frac{ab}{d} = 0,$$

a po substituci $z = e^{i\Theta}$

$$(b) \qquad (b\cos\varphi - ai\sin\varphi)\, z^2 - \frac{2ab}{d} z + (b\cos\varphi + ai\sin\varphi) = 0.$$

Kořeny této rovnice z_1, z_2 jsou komplexní parametry bodů M_1, M_2, pro jejich souřadnice tedy máme

$$x_1 + x_2 = \frac{a}{2}\left(z_1 + z_2 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{a}{2}\,\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\,(z_1 z_2 + 1),$$

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2i}\,\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\,(z_1 z_2 - 1).$$

Po dosazení hodnot plynoucích z rovnice (b)

$$z_1 + z_2 = \frac{2ab}{d}\,\frac{1}{b\cos\varphi - ai\sin\varphi},$$

$$z_1 z_2 = \frac{b\cos\varphi + ai\sin\varphi}{b\cos\varphi - ai\sin\varphi}$$

vychází odtud

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2}{d\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}\cos\varphi,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2}{d\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}\sin\varphi,$$

takže bude dle (a) při označení

$$(N) \qquad r = -d + \frac{2a^2b^2}{d\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}$$

$$= \frac{c^2}{d}\,\frac{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

platiti vyjádření polohy bodu N

$$X = r\cos\varphi, \quad Y = r\sin\varphi;$$

dle toho jest (N) rovnice čáry opsané průsekem na sobě kolmých normál ellipsy (a, b) v polárních souřadnicích r a φ.

Odtud se obdrží rovnice v souřadnicích pravoúhlých*) — píšeme malé litery místo velkých —

$$d^2(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = c^4(b^2x^2 - a^2y^2)^2,$$

takže uvažovaná čára (N) je stupně 6, a sice racionální, ježto r je racionální funkce veličiny $tg\,\frac{\varphi}{2}$. Její 10 bodů dvojných pozůstává v 4-násobném bodě O (v němž se protínají dva páry

*) Vidal, Nouv. Ann. de Math. 1843.

větví o společné tečně, a jenž tedy nahrazuje 8 bodů dvojných) a ve dvou obyčejných bodech dvojných ležících v úběžných bodech ellipsy.

Rovnici (N') lze psáti

$$r = 2r_0 - d, \quad r_0 = \frac{a^2b^2}{d(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)};$$

pak jest r_0 průvodič bodu

$$\frac{M_1 + M_2}{2},$$

t. j. (r_0, φ_0) jsou souřadnice středu tětivy $M_1\,M_2$, v jejíž koncích vedené normály stojí na sobě kolmo.

Polární subnormála čáry (N)

$$r' = 2r'_0 = -\frac{2a^2b^2c^2 \sin 2\varphi}{d(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2}$$

má hodnotu

$$r' = -2\frac{c^2d}{a^2b^2} r_0^2 \sin 2\varphi = -2d\left(\frac{r_0}{g}\right)^2 \sin 2\varphi,$$

kde $g = \dfrac{ab}{c}$ je stálá délka. Polární subnormála je tedy přístupna jednoduchému konstruktivnímu určení, a tím docíleno též konstrukce tečny čáry (N).

Uvažujme na ellipse bod $\Theta = \varphi$; jeho tečna má od středu ellipsy vzdálenost

$$\delta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}},$$

a je tedy

$$r_0 = \frac{\delta^2}{d}.$$

Čára středů tětiv (r_0, φ) je čtvrtého stupně, její rovnice zní

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}.$$

Rovnice polární ve tvaru

$$r_0 = \frac{2a^2b^2}{d^3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{c^2}{d^2} \cos 2\varphi}$$

umožňuje též stanoviti body čáry (N) na základě stálé ellipsy s výstředností $\frac{c^2}{d^2}$.

14. *Steinerovy trojice oskulační.*

Oskulační kruh v bodě z na ellipse (a, b) protne tuto v dalším bodě, jehož parametr z_0 souvisí s parametrem z rovnicí

$$z_0 z^3 = 1.$$

Danému oskulačnímu doplňku z_0 odpovídají tři body

$$z = z', z'', z'''.$$

Parametry jich souvisí vespolek rovnicemi

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'''}{z''} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

aneb vyjádřeno v úhlech

$$\Theta''' - \Theta'' = \Theta'' - \Theta' = \frac{2\pi}{3},$$

takže je-li úhlový parametr bodu z_0 psán -3Θ, jsou úhly bodů $\Theta^{(\nu)}$ v jistém pořádku vzaté

$$\Theta, \ \Theta + \frac{2\pi}{3}, \ \Theta + \frac{4\pi}{3}.$$

Souvislost mezi úhlem Θ a příslušným bodem na ellipse

$$x = a \cos \Theta, \quad y = b \sin \Theta$$

jest obsažena v affinitě rovinných soustav (ξ, η) a (x, y) vyjádřené rovnicemi

$$x = \xi, \quad y = \frac{b}{a} \eta,$$

takže nová soustava (x, y) vzniká z původní zkrácením pořadnic v poměru $b : a$.

V této affinitě odpovídá bodu na kruhu (a)

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \quad \xi = a \cos \Theta, \quad \eta = a \sin \Theta,$$

bod Θ na ellipse (a, b).

Obrazce stejnoploché přecházejí affinitou opět ve stejnoploché, rovněž přímkám rovnoběžným odpovídají opět rovnoběžky.

Naše body z', z'', z''' na ellipse pak odpovídají vrcholům pravidelného trojúhelníka Θ', Θ'', Θ''' vepsaného kružnici (a). Z toho soudíme, že trojúhelníky o vrcholech z', z'', z''' na ellipse mají všecky týž obsah, a že jsou to zároveň trojúhelníky maximálního obsahu do ellipsy vepsané.

Strany pravidelných trojúhelníků $\Theta'\,\Theta''\,\Theta'''$ obalují kružnici

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

a příslušné jim affinitou strany trojúhelníků $z'\,z''\,z'''$ obalují tedy ellipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}.$$

Tečnám kruhu (a) ve vrcholech $\Theta'\,\Theta''\,\Theta'''$ odpovídají affinitou tečny ellipsy ve vrcholech maximálního trojúhelníka $z'z''z'''$, takže normály ellipsy ve vrcholech maximálního trojúhelníka jsou zároveň výškami tohoto a procházejí tedy společným bodem.

Bod z_0 má úhlový parametr $\Theta_0 = -3\Theta$, dále

$$\Theta^{(\nu+1)} = \Theta + \frac{2\nu\pi}{3},$$

tedy

$$\Theta_0 + \Theta' + \Theta'' + \Theta''' = 2\pi,$$

t. j. body $z'\,z''\,z'''$ leží s bodem z_0 na kruhu.

Bod o parametru $z_1 = -z_0$ jest bodu z_0 diametrálně protilehlý a má úhel $\Theta_1 = \Theta_0 + \pi$; poněvadž pak

$$\Theta_1 + \Theta' + \Theta'' + \Theta''' = 3\pi,$$

prochází normála bodu z_1 průsekem normál vedených ve vrcholech $z'\,z''\,z'''$.

Bodem z_0 procházejí 4 oskulační tětivy; z těch má jedna patu v z_0, ostatní tři mají paty ve vrcholech max. trojúhelníka $z'\,z''\,z'''$.

Z bodu z_0 vycházejí tři oskulační kružnice ellipsy, jež se jí dotýkají v bodech $z'\,z''\,z'''$.*) Tyto tvoří t. zv. *oskulační trojice* na ellipse, které nazýváme též trojice Steinerovy aneb vrcholy Steinerových trojúhelníků. (Dokončení.)

---

*) J. Steiner v Crell. žurn. sv. 32 (1845).