Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Thermodynamika statického pole gravitačního na povrchu země

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 208--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108951

Krátím-li t^{n+1}, dostávám rovnici:

$$P'_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P'_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + P'_k(t)\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}} + \ldots$$
$$+ P'_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P'_n(t)\,y = 0,$$

kde $P'_i(t)$ jsou polynomy téhož stupně n—1-ho. Tím tedy důkaz proveden.

Za příklad mějme rovnice 2-ho řádu:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + ax^2\frac{dy}{dx} + by = 0;$$

hořejší substitucí přejde v tuto:

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (2-at)\frac{dy}{dt} + byt = 0,$$

což jest rovnice Laplaceova.

Rovnice 3-ho řádu:

$$x^6\frac{d^3y}{dx^3} + a_1x^4\frac{d^2y}{dx^2} + b_1x^2\frac{dy}{dx} + c_1y = 0$$

přejde v tuto:

$$t^2\frac{d^3y}{dt^3} + \left[-a_1t^2 + 6t\right]\frac{d^2y}{dt^2} + [b_1t^2 - 2a_1t + 6]\frac{dy}{dt} - c_1yt^2 = 0.$$

Tuto rovnici lze pak integrovati methodou Poincaréovou, svrchu zmíněnou.

Thermodynamika statického pole gravitačního na povrchu země.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Každá větev fysiky má svůj jasně vyhraněný poměr k thermice. Jen jedna činí dosud výjimku: zjevy gravitační. Ohledejme nejprve příčiny, proč objevy thermodynamiky, pojem vniterné energie a entropie, dosud pro nauku o tíži významu neměly, proč thermodynamika, jež ve všech větvích fysiky tak hluboko zaorala, jen právě nauku o tíži pominula.

Kombinace klasické nauky o tíži s thermodynamikou. Koule, jež má hmotu m, specifické teplo c, jest nad povrchem země o poloměru R. Takovou hmotu lze pokládati za thermodynamickou soustavu, jejíž stav jest určen dvěma neodvisle proměnnýma; volím za ně absolutní temperaturu koule T a vzdálenost její od středu zemského h. Změny těchto parametrů lze považovati za zvratné. Neboť vytažení koule lze kompensovati spuštěním a ohřátí lze si mysliti provedeno pomaloučku a tak, aby mezi koulí a jejím okolím žádné konečné rozdíly temperatury nevznikaly.

Označíme-li urychlení tíže ve vzdálenosti h od středu země písmenou g, jest element dodané práce

$$mg \,.\, dh\,,$$

při čemž vzdálenost koule od středu země narostla o dh a teplota její se změnila o dT. Všimněme si, že v elementu pro práci dodanou schází člen násobený dT, čím vystiženo, že pouhou změnu temperatury, bez současné změny výšky koule nad povrchem země nelze vynutiti dodáním práce. Vidíme tedy, že parametry T, h jsou „normované" ve smyslu Duhem-ově. Tím jest řečeno, že pouhou změnu temperatury nelze zaplatiti prací. Takové soustavy thermodynamické představují jaksi normální, příznivý případ. Nevybočují tedy zjevy gravitační z rámce obvyklé thermodynamiky.

Chceme-li dosíci zvýšení teploty o dT, nezbývá nám, než dodati kouli jisté množství tepla. Jako se dříve dodaná práce vyjádřila pouze vzrostem dh, tak se nyní vyjádří dodané teplo

$$mc \,.\, dT$$

jen vzrostem dT. Poněvadž součin mc jest vždy kladný, třeba soustavě opravdu teplo dodati, má-li temperatura jeho růsti, aniž by se h měnilo. Vyhovuje tedy studovaná soustava postulátu Helmholtzově, — jak říká Duhem — což jest nová známka, že soustava naše chová se normálně, že zapadá do rámce obvyklých thermodynamických úvah.

Množství dodaného tepla měříme v malých kaloriích, množství dodané práce v ergech. Kde třeba, užijeme relace

$$1 \text{ malá kalorie} \backsim 4{\cdot}2 \,.\, 10^7 \text{ ergů.}$$

Nyní jsme připraveni, abychom užili obou hlavních vět thermodynamických. Dle prvé jest vzrost vniterné energie

$$dE = mgdh + 4{\cdot}2 \,.\, 10^7\, mcdT.$$

Dle druhé hlavní věty jest vzrost entropie

$$dS = \frac{mc}{T}\, dT.$$

Existence těchto dvou funkcí vede pak k následujícím dvěma differenciálním rovnicím

$$\frac{\partial}{\partial T} mg = 4{\cdot}2 \,.\, 10^7 \,.\, \frac{\partial}{\partial h} mc,$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{mc}{T} = 0,$$

jimž veličiny c, g přímo měřitelné vyhovovati musí.

Nyní vidí laskavý čtenář, proč tyto relace ve spisech thermodynamických i v sebe podrobnějších úvahách o gravitaci se mlčky přecházejí. Vyslovuji dvě myšlenky, o nichž dosud nikdo nepochyboval. Druhá praví, že specifické teplo jest na úpatí hory tak veliké jako na vrcholu jejím a prvá praví, že právě proto váha

$$mg$$

nezávisí na temperatuře hmoty vážené. To jest ale tajný předpoklad, jenž stojí již za definicí metrkilogramu!

Newtonova nauka o gravitaci jest tímto neuvědomělým předpokladem již sharmonisována s thermodynamikou, ač tato vznikla o 200 let později. Toto shodnutí theorií z tak různých dob jest cenným doporučením starší theorie. Jde však souhlas její s thermodynamikou ještě dále.

Poznámka k Lagrangeově odvození principu virtuálných posuvů. Principy nelze dokazovat; lze nanejvýše případ obecný a složitý převésti na případ zvláštní a průhledný. Lagrange ve slavném důkazu svém předvádí pomocí jediné šňůry, jež se protahuje kroužky, princip virtuálných posuvů na jedinou větu o chování koule, jež visí na šňůře.

Tato věta, jež se opírá o naše zkušenosti, získané naším trvalým pobytem v gravitačním poli zemském, tvrdí:

Hmota jest ve stabilní rovnováze, když virtuálním posuvem nemůže klesnouti.*)

*) Nerovnost zavedl nejprve Fourier, pak znovu samostatně Gauss (1829) a Ostrogradsky (1834). Proto se v Rusku princip virtuálných posuvů rozšířený na vazby dané nerovnostmi nazývá principem Ostrogradského. Viz Teubnerovu velkou encyklopedii mathematiky, článek: Voss, Die Principien der rationellen Mechanik, str. 74.

Myslíme-li si virtuálné posuvy nekonečně malé, jest v souhlase se symbolikou předchozích vzorců kriteriem stabilnosti, že

$$dh \geqq 0.$$

Zde máme onu nerovnost, jež se tak cize vyjímá v soustavě mechanických rovnic, jež ale hladce zapadne do rámce klasické thermodynamiky. Lze totiž předpoklad Lagrange-ův, který on nám předkládá jako větu ze zkušenosti vzatou, snadno odvoditi ze známých Gibbsových kriterií pro stabilnost thermodynamické rovnováhy.

Mechanika se o temperaturu hmot a o tepelnou výměnu mezi nimi nestará. Chceme-li však o Lagrangeově závaží se vyjádřiti se stanoviska thermodynamického, musíme zaujmouti stanovisko, musíme se vyjádřiti o tom, zda virtuálný posuv koule pokládáme za isothermní, za adiabatický, či za isenergetický.

Virtuálný posuv koule jest nepochybně zjevem mechanickým. Ukazy mechanické se ale pokládají všeobecně za zvratné. Z thermodynamiky víme, že nezvratnost jest od neustálého vzrůstu entropie. Zvratnost mechanická kryje se tedy s myšlenkou, že při dějích mechanických entropie zůstává stálou. Pak se Clausiova nerovnost

$$\int_A^B \frac{\bar{d}Q}{T} < S_B - S_A$$

specialisuje pro virtuálný posuv koule na

$$\int_A^B \frac{\bar{d}Q}{T} < 0.$$

Myslíme-li si posuv nekonečně malý, dostaneme

$$\frac{\bar{d}Q}{T} < 0.$$

Protože koule na niti visící jest sama sobě přenechána, jest mechanicky isolovaná, jest při virtuálném posuvu

$$\bar{d}P = 0.$$

Následkem toho jest při tomto posuvu

$$dE = 4{\cdot}2 \,.\, 10^7 \, dQ,$$

tak že z Clausiovy nerovnosti plyne, že při každém skutečném posuvu koule, jenž nastane sám sebou, jest

$$dE < 0.$$

Jsou-li nyní okolnosti takové, že při stálé entropii
$$dS = 0$$
vždy
$$dE \geqq 0,$$
ať jde o jakýkoli virtuálný posuv, jest každý pohyb vyloučen. To jest známé Gibbsovo kriterium pro stabilnost isolované soustavy při virtuálných posuvech isentropických. Proč jsem si je zde ab ovo odvodil, proč jsem se neodvolal prostě na autoritu Gibbsovu, doví se čtenář později.

Vyvoďme nyní důsledky, že koule jest ve stabilní rovnováze, když
$$dS = 0$$
$$dE \geqq 0.$$
Dosadíme-li do těchto podmínek vyjádření differenciálů parametry T, h, dostaneme
$$\frac{mcdT}{T} = 0,$$
$$mgdh + 4{\cdot}2 \,.\, 10^7\, mcdT \geqq 0,$$
z čeho čteme:

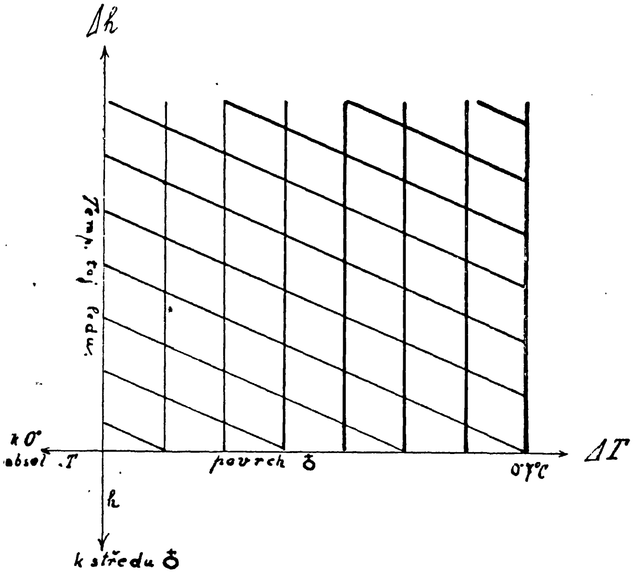
Insentropické změny naší koule jsou zároveň isothermní. Jako se mechanika zjevů gravitačních nestará o entropii, poněvadž tato jest stálou, nestará se též o temperaturu, protože i ta se při pohybu nemění.

Z nerovnosti Gibbsovy zbude nám pro isothermnost posuvu
$$mg \,.\, dh \geqq 0,$$
z čeho pro zajištěnou kladnost váhy
$$mg > 0$$
plyne Lagrangeův předpoklad slavné jeho dedukce principu virtuálných posuvů
$$dh \geqq 0.$$

Předpoklad Lagrangeův jest zajisté velmi názorný a těžko by i nejzarytější skeptik o něm pochyboval. Již malé dítě, jež zoufale křičí „hapá“, vypadne-li mu hračka, projevuje svým chováním, že jest přesvědčeno o předpokladu Lagrangeově. Není divu, že se studentu zdá samozřejmým, co se o myšlence Lagrangeově později doví.

Ale právě pro tuto jistotu výsledku jest předchozí dedukce z thermodynamických myšlenek zajímavá. Rozbor její bude nás ještě zaměstnávat. Prozatím služiž za doklad, že vypracování těchto myšlenek stojí za námahu.

Grafické vyjádření našich myšlenek. V rovině, kterou si myslím svislou, nanášíme v Deskartesově kříži směrem svislým výšku h, směrem vodorovným T, absolutní temperaturu. Graf si pořídíme pro jeden gram hmoty a pro nevelké změny výšky nad povrchem země. Také změny temperatury pokládáme za mírné.



Obr. 1.

Pak lze differenciály v relacích pro entropii a vniternou energii nahraditi differencemi a pořiditi přibližné čáry isentropické a isenergetické, což zachyceno na obr. 1. Větší a větší hodnoty vniterné energie po případě entropie naznačeny silnějšími a silnějšími čarami.

Diagram pořízen pro vodu, poněvadž má specifické teplo rovné 1. Počátek jeho, absolutní bod mrazu a střed země padají mimo nákresnu. Délka 10 *cm* směrem vodorovným značí 1° C; délka 1 *cm* směrem svislým značí vyzvednutí o 100 *m*. Svislé čáry značí isothermy a zároveň isentropy; jsou grafickým vyjádřením rovnice

$$\Delta S = \frac{c}{T} \Delta T; \quad c = 1,$$

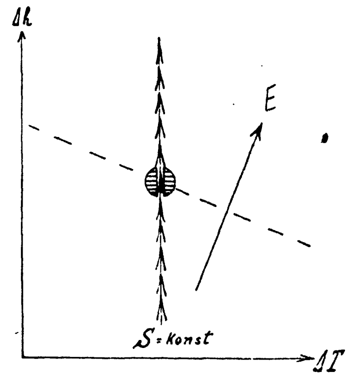
kde veličinu T beru za konstantu, což dovoleno pro drobnost temperaturového intervalu, jen 0·7° C. Ostatně by integrace vedla na logarithmus, pokud specifické teplo jest konstantní. Ale graf náš zůstane v platnosti; jen očíslování jednotlivých kolmic by se maličko změnilo.

Šikmé čáry představují isenergety a jsou vyjádřením rovnice:

$$\Delta E = g \Delta h + 4{\cdot}2 \,.\, 10^7 \, c \Delta T; \quad c = 1.$$

Jsou přímkami, pokud lze specifické teplo pokládati za konstantu.

Grafické odvození Lagrangeova předpokladu. Abych dokázal, že grafické vyjádření, právě vyložené, má cenu, odvodím na něm znova větu, že koule těžká, sama sobě přenechaná, pohybuje se jen dolů.

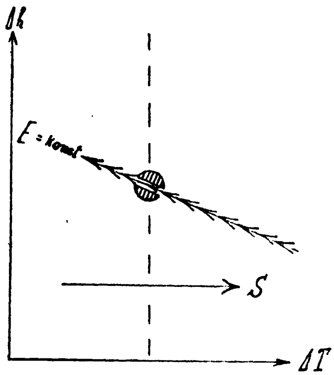


Obr. 2.

I. Považujeme-li kouli za mechanicky isolovanou, a virtuálný posuv za isentropický, je tím řečeno, že bod zobrazující stav koule v rovině T, h vázán na určitou rovnoběžku s osou h. Viz obr. 2., kde bod onen naznačen středem provrtané koule. Z Gibbsova kriteria plyne pak, že koule sama sobě přenechaná může se měniti jen tak, aby vnitřní energie klesala. Nalezněme si na diagramu 2. onu isenergetu, jež prochází stavojevným bodem, Vytkněme dále šipkou směr v němž vniterná energie v obrazci roste. Pak může se stavojevný bod sám od sebe pohybovati po isentropě jen tak, aby přecházel z bodu daného do bodu s nižší vniternou energií, t. j. v našem případě jen dolů. „Dolů“ v diagramě znamená však též „dolů“ ve skutečnosti, v prostoru.

Abych tuto vázanost již v obrazci učinil viditelnou, vykreslil jsem místo stavojevného bodu provrtanou kouli, na isentropu navlečenou. Ale není isentropa obyčejnou hladkou šňůrou, má pružné osiny, viz obr. 2., jež pustí sice kouli dolů, ale zadrží ji, když by chtěla zpět.

II. Lagrangeovo závaží nemusí zajisté býti homogenní. Můžeme si beze všeho mysliti, že koule jest obalena obalem pro teplo nepropustným. Je-li koule sama sobě přenechaná, jest mechanicky isolována, to jest nedostává se jí zvenčí práce mechanické; je-li zároveň thermicky isolována zmíněným obalem, nemůže z okolí přijímati teplo; pak změny na ní možné jsou dojista isenergetické. Za těchto okolností dle Clausiovy nerovnosti může koule sama od sebe se pohybovati jen tak, že entropie roste.



Obr. 3.

Případu tomu věnován diagram 3. Tu jest stavojevný bod, znázorněný provrtanou koulí, navlečen na isenergetu. Pak si vyšetříme isentropu stavojevným bodem procházející a naznačíme šipkou, kterým směrem entropie roste. Nyní v myšlenkách pošineme bod na isenergetě tak, aby z míst s nižšími hodnotami entropie dostal se k hodnotám vyšším. Tu klesá bod na obrazci t. j. i ve skutečnosti: v prostoru.

Ať tedy virtuálný posuv koule v gravitačním poli považuji za isothermní, a zároveň isentropický či za isenergetický, což se v klasické mechanice nerozeznává, vždy vychází z thermodynamických kriterií rovnováhy: koule sama sobě přenechaná může se pohybovati jen dolů. Z čehož obrácením předpoklad Lagrangeova důkazu principu virtuálných posuvů: koule jest ve stabilní rovnováze, když virtuálným posuvem neklesne.

O rozdílu mezi thermodynamickou zvratností a zvratností virtuálného posuvu. Nic nesvádí tak velice k chybným názorům, jako když se různé pojmy označují stejným slovem. Dejme tomu, že koule visí na nepružné niti. Pak náleží zvednutí koule k virtuálným posuvům. Říká se pak v mechanice, že posuv ten jest nezvratný, poněvadž — pro neprodloužitelnost nitě — nelze mu přiřaditi stejně velký posuv opačného směru, jímž by se koule snížila.

Jinak pojímá se nezvratnost v thermodynamice. Zvednutí koule, jež visí na neprodloužitelné niti, platí v thermodynamice za zvratné, poněvadž je můžeme zase odčiniti tím, že kouli spustíme do původní polohy. Zvratnost thermodynamická míní, že koule po dráze vykonané může zpět; nezvratná jest změna v thermodynamice, když koule nemůže zpět. V mechanice takovou nezvratnost skoro nikdy nepotkáváme. Koule navlečená na drátě s pružnými osinami jest příkladem thermodynamické nezvratnosti na mechanické půdě. Dále zubaté kolo opatřené aretací, jež dovoluje rotaci kola jen jedním směrem.

Po tomto objasnění třeba ještě jednou zrevidovati naše úvahy o thermodynamickém odvození Lagrangeova předpokladu pro jeho šňůrový důkaz principu virtuálných posuvů. Vše nám tak krásně vyšlo, ač jsme nezvratný posuv mechaniky považovali také za nezvratný v thermodynamice. To však dle dosavadních názorů není dovoleno. Posuv hmoty pokládá se v mechanice za zvratný ve smyslu thermodynamiky a Clausiova nerovnost ve spojení s mechanickou a thermickou isolovaností vede na dvě rovnice $dS = 0; \; dE = 0,$

z nichž konec konců

$$T = konst; \; h = konst.$$

Dle toho bychom dosáhli vznášení hmoty v prostoru tím, že jí dáme obal pro teplo neprostupný a pustíme ji z ruky, čím jest mechanicky isolována, t. j. uvedena do stavu, v němž nemůže z okolí přijímati mechanickou práci.

Osobní zkušenosti dvouletého dítěte dementují tyto podivuhodné důsledky thermodynamiky. Hmota sama sobě přenechaná padá. Myšlenku tu vyjadřuje $dh < 0$.

Tato zajisté správná nerovnost nedá se ale nikterak vykličkovati z rovnic. Ta musí pocházeti z jediné nerovnosti, kterou thermodynamika v sobě chová, totiž z Clausiovy nerovnosti

$$\int_A^B \frac{\overline{dQ}}{T} < S_B - S_A.$$

Ta platí však jen o změnách nezvratných. Užijeme-li ji, jak jsme dříve učinili, dospějeme k předpokladu, že těžká koule sama sobě přenechaná jen padá; ale tím jsme zároveň vyslovili, že tento pád jest dějem nezvratným.

Jen statické zjevy gravitační jsou zvratné. Není logického sporu mezi myšlenkou, že závaží teplé v gravitačním statickém, t. j. časově neproměnlivém poli jest zvratnou soustavou thermodynamickou, kdežto totéž závaží samo sobě přenechané koná pohyb nezvratný. Jest totiž mezi oběma případy rozdíl, který různost, na kterou jsme narazili, odůvodňuje. Změny zvratné musí se díti v abstrakci nekonečně zvolna, tak aby hmota zvedaná nikdy nenabyla konečné rychlosti. Koule sama sobě přenechaná nabude však rychlosti; v této rychlosti musíme hledati příčinu, proč koule sama sobě přenechaná koná pohyb ve smyslu thermodynamiky nezvratný.

O takové esentielní nezvratnosti pohybů gravitačních však klasická mechanika ničeho neví. Z toho musíme souditi, že differenciální rovnice její jsou přibližné. Je to použití gravitační statiky na volné pohyby. Takové pohyby, jako let Merkura kol slunce, jsou tedy, — jak z úspěchu při zpracování jeho pomocí statiky vidíme — ještě velmi blízké klidu. Pravíme-li, že rychlost Merkura jest velice malou, musí býti velmi malá vůči něčemu. Existuje tedy jistá rychlost i vůči astronomickým rychlostem veliká, jež má charakter kosmické konstanty.

Thermodynamické propracování zjevů gravitačních prozrazuje nám, že pro časově proměnlivá pole s hmotami se pohybujícími třeba vypracovati novou theorii. Nástin takové theorie obsahuje Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky ročník 44. r. 1914, str. 46. Tam odkazuji.