Jan Vojtěch

Projektivní prostor r-rozměrný

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 152--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108942`

Projektivní prostor r-rozměrný.

Jan Vojtěch.

1. Za geometrické pojmy základní zvolme jednak prvky *bod* a *přímku*, jednak vztah jejich *incidenci;* předpokládáme vždy, že prvky, o nichž se v postulátech a definicích mluví, existují (což někdy výslovně uvádíme). Přímku si myslíme jako soustavu neomezeného počtu bodů s ní incidentních, incidenci bodu a přímky vyjadřujeme na př. rčením, že přímka obsahuje bod nebo prochází bodem, že bod je bodem přímky nebo leží na přímce a pod.

Za první postulát o incidenci prvků přijměme větu: *Dva různé body určují (vždy a jedinou) přímku je obsahující.* Přímku určenou body A a B píšeme AB a nazýváme jejich spojnicí; jako základní útvar jednorozměrný označujeme přímku symbolem S_1 (t. j. lineární prostor o jednom rozměru), bod pak také symbolem S_0. Z uvedené věty základní plyne, že přímka je určena libovolnými dvěma různými body svými.

Předpokládejme, že *mimo přímku* (AB) *existuje* ještě *bod* (C). *Definujeme* nyní *rovinu* jako soustavu všech bodů, jež leží na přímkách spojujících bod C se všemi jednotlivými body přímky AB. Rovinu tak určenou můžeme psáti $C(AB)$; jako základní útvar dvourozměrný označujeme rovinu symbolem S_2 (lineární prostor o dvou rozměrech).

Z definice roviny a z postulátu o přímce vyplývá, že roviny $C(AB)$ a $C(A'B')$ jsou totožny, jestliže body A', B' jsou různé body přímky AB. Rovina je soustava neomezeného počtu bodů, z nichž každý je s ní incidentní; přímka a rovina jsou incidentní, je-li tato incidentní s každým bodem oné; incidenci bodu a roviny i přímky a roviny vyjadřujeme obdobně jako u bodu a přímky. Rovinu připojujeme jako nový prvek k bodu a přímce.

Z postulátu o přímce poznáváme, že dvě různé přímky nemohou míti více než jeden bod společný. *Tři body* slují *nezávislé*, nejsou-li incidentní s touže přímkou.

Zvolíme-li v rovině $C(AB)$ místo bodů A, B dva libovolné body její P_1, P_2 nebo obecněji místo bodů A, B, C tři libovolné body její P_1, P_2, P_3, neplyne z předešlého, že rovina $C(P_1P_2)$, resp. rovina $P_3(P_1P_2)$ je totožná s rovinou $C(AB)$. Za druhý postulát o incidenci prvků béřeme tedy větu: *Tři nezávislé body určují (vždy a jedinou) rovinu je obsahující.* Rovinu určenou body A, B a C píšeme ABC.

Z uvedených dvou postulátů a z definice roviny vyplývá zejména: Rovina obsahující dva body přímky obsahuje všechny její body. Přímka a bod mimo ni ležící určují rovinu je obsahující. Dvě různé přímky v rovině určují (vždy a jediný) bod s nimi incidentní.

2. Předpokládejme dále, že *mimo rovinu* (ABC) *existuje* ještě *bod* (D). *Prostor třírozměrný definujeme* potom jako soustavu všech bodů, jež leží na přímkách spojujících bod D se všemi jednotlivými body roviny ABC. Prostor takto určený lze označiti $D(ABC)$; obecně jako základní útvar třírozměrný (lineární prostor o třech rozměrech) značíme jej S_3.

Je hned patrno, že třírozměrné prostory $D(ABC)$ a $D(A'B'C')$ jsou totožny, jestliže A', B' a C' jsou tři nezávislé body roviny ABC. Prostor třírozměrný je soustava neomezeného počtu bodů a nový prvek, přistupující k prvkům dosavadním; jeho incidenci s oněmi lze obdobně zavésti a vyjadřovati.

Čtyři body slují *nezávislé*, nejsou-li incidentní s touže rovinou; jsou-li nezávislé, jsou kterékoli tři z nich rovněž nezávislé a tím spíše kterékoli dva různé.

Na rozdíl od případu roviny můžeme zde dokázati: *Prostor třírozměrný jest určen libovolnými čtyřmi nezávislými body svými.*

Mějme totiž na zřeteli definici prostoru třírozměrného a postulát o rovině. Jsou-li P_1, P_2, P_3 a P_4 čtyři nezávislé body prostoru $D(ABC)$, pak rovina stanovená třemi z bodů těch a bod čtvrtý určují třírozměrný prostor, totožný s prostorem $D(ABC)$: Neboť předně každá přímka, mající v prostoru $D(ABC)$ dva různé body své, leží v něm celá (buď totiž patří mezi vytvořující přímky jeho nebo leží v rovině takovými přímkami vytvořené). Dále každá rovina, mající v prostoru $D(ABC)$ tři své nezávislé body, je v něm obsažena celá (je totiž vytvořena přímkami, o nichž platí věta předcházející). Jsou-li P_1, P_2 a P_3 tři z daných bodů prostoru $D(ABC)$ tak položené, že rovina $P_1P_2P_3$ neprochází bodem D (takové body se mezi danými musí vyskytovati), je prostor $D(ABC)$ totožný s prostorem $D(P_1P_2P_3)$; neboť $D(ABC)$ obsahuje rovinu $P_1P_2P_3$ a obráceně $D(P_1P_2P_3)$ obsahuje rovinu ABC. Mimo to je prostor $D(ABC)$ totožný s prostorem $C(ABD)$, protože body na přímkách spojujících D s body roviny ABC a body na přímkách spojujících C s body roviny ABD tvoří tutéž soustavu, splývajíce se soustavou bodů na rovinách, určených přímkou DC a body přímky AB. Z obou posledních vět vyplývá, že prostor určený rovinou ABC a bodem D jest určen také kterýmkoli bodem daným P_k a rovinou stanovenou ostatními třemi body těmi. Vzhledem k tomu lze třírozměrný prostor, určený čtyřmi nezávislými body P_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, označiti $P_1P_2P_3P_4$.

Z předešlého vyplývá zejména: V S_3 mají rovina a přímka v ní neležící společný bod, jejž určují. Dvě roviny v S_3, jež nesplývají, mají společnou přímku, kterou určují. Tři různé roviny v S_3, jež nemají společnou přímku, mají společný bod, který určují.

3. Předpokládejme nově, že *mimo prostor* S_3, určený čtyřmi nezávislými body P_1, P_2, P_3 a P_4, *existuje ještě bod* P_5. A *definujme* lineární *prostor čtyřrozměrný* S_4 jako soustavu všech bodů ležících na přímkách, jež bod P_5 spojují se všemi jednotlivými body prostoru $P_1P_2P_3P_4$.

Tento S_4 obsahuje každou přímku, určenou dvěma různými body jeho (taková přímka totiž buď prochází bodem P_5 a patří svými body do S_4 jako přímka vytvořující, nebo je obsažena v rovině jdoucí bodem P_5 a obsažené v S_4); obsahuje také každou rovinu, určenou třemi nezávislými body jeho, a každý prostor třírozměrný, určený čtyřmi jeho body nezávislými (tyto jsou totiž vytvořeny přímkami v S_4 obsaženými). Nazývajíce *nezávislými pět bodů*, jež neleží v témž S_3, obdržíme obdobně jako u S_3 větu: *Prostor* S_4 *jest určen libovolnými pěti svými nezávislými body.*

Pokračujíce takto dále, přijdeme za předpokladu, že mimo prostor S_4 existuje ještě bod P_6, k vytvoření a vlastnostem lineárního prostoru pětirozměrného S_5; atd. až za předpokladu, že mimo S_{r-2} existuje ještě bod P_r, definujeme prostor $(r-1)$-rozměrný S_{r-1}. Zejména nalezneme, že S_5 je určen šesti svými body nezávislými (t. j. neobsaženými v témž S_4), atd., až S_{r-1} je určen r svými body, jež nejsou incidentní s týmž S_{r-2}. Nové prostory zařaďujeme mezi prvky předešlé a jejich incidenci s oněmi dáváme význam obdobný.

Konečně předpokládejme, že *mimo prostor* S_{r-1} *existuje ještě bod* P_{r+1}. A nazývejme obecně skupinu $k+1$ *bodů nezávislými* (pro $1 < k < r$), nejsou-li obsaženy v témž prostoru o $k-1$ rozměrech S_{k-1}; takové body mohou ovšem tím méně býti obsaženy v prostoru o menším počtu rozměrů. Vzhledem k tomu můžeme uvedenému předpokladu dáti tvar, že *existuje skupina* $r+1$ *bodů nezávislých.*

Definujeme: Prostor lineární *r-rozměrný* S_r *jest soustava všech bodů, jež leží na přímkách spojujících jeden ze skupiny* $r+1$ *nezávislých bodů daných se všemi jednotlivými body prostoru* S_{r-1}, *určeného ostatními r body skupiny.*

Dva prostory S_p, S_q nazýváme incidentními, jestliže všechny body jednoho z nich jsou body druhého; je-li třebas $p < q$, pravíme také, že prostor S_p náleží prostoru S_q nebo v něm leží, že prostor S_q obsahuje prostor S_p nebo jím prochází a pod.

Prostor S_r, který je uvedeným způsobem vytvořen pomocí prostoru S_{r-1}, určeného body $P_1, P_2, \ldots, P_r$, a bodu P_{r+1}, obsahuje podle definice všechny prostory $S_2, S_3, \ldots, S_{r-1}$, určené bodem P_{r+1} a některým z prostorů $S_1 S_2, \ldots, S_{r-2}$, obsažených v základním S_{r-1}; obráceně má každý prostor S_k (pro $k = 2, 3, \ldots, r-1$), jdoucí bodem P_{r+1}, se základním S_{r-1} společný jenom prostor S_{k-1}. Každá přímka, určená dvěma různými body prostoru S_r, je celá obsažena v S_r; neboť prochází-li bodem P_{r+1}, patří k přímkám S_r vytvořujícím, při jiné poloze je obsažena v rovině obsažené v S_r (protože spojnice bodu P_{r+1} s dvěma body uvažované přímky jsou zároveň spojnicemi bodu toho s dvěma body základního S_{r-1}, jež spolu s P_{r+1} určují rovinu uvedenou). Každý prostor S_k (pro $2 \leq k \leq r-1$), určený skupinou $k+1$ nezávislých bodů prostoru S_r, leží v S_r; neboť to platí o všech přímkách tohoto S_k. Prostor S_r, vytvořený z prostoru $P_1P_2P_3 \ldots P_r$ a bodu P_{r+1}, je totožný s prostorem, vytvořeným z prostoru $Q_1Q_2 \ldots Q_r$ a bodu P_{r+1}, jestliže r bodů $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ určuje prostor S_{r-1}, neobsahující P_{r+1}; neboť vytvořující přímky každého z obou prostorů tak vznikajících jsou takovými i v druhém. Uvážíme-li vedle toho, že z $r+1$ daných bodů nezávislých P_k vznikne týž prostor, ať kterýkoli z bodů těch zvolíme za společný bod přímek prostor S_r vytvořujících, shledáme, že *prostor r-rozměrný jest určen libovolnými r + 1 svými body nezávislými.*

Nakonec předpokládejme, že *mimo prostor* S_r *neexistuje už žádný bod*, takže řada vytvořených prostorů jest uzavřena.[1]

4. Jestliže z $n+1$ nezávislých bodů, určujících prostor S_n, zvolíme $k+1$ bodů (jež jsou nutně opět nezávislé) ke stanovení prostoru S_k, stanoví zbývajících $n-k$ bodů prostor S_{n-k-1}; tyto dva prostory S_k a S_{n-k-1} nemají bodu společného. Kdyby totiž prostory ty měly společný bod A, určoval by bod A spolu s k nezávislými body prostoru S_k tento S_k, obdobně spolu s $n-k-1$ nezávislými body prostoru S_{n-k-1} tento S_{n-k-1}, všechny pak body zde uvedené v počtu n určovaly by prostor S_{n-1}, obsahující uvedené prostory S_k a S_{n-k-1} a tedy i daných $n+1$ bodů proti předpokladu jejich nezávislosti. *Dva prostory bez společného bodu* nazýváme *nezávislé* nebo obecně položené. A platí: Dva nezávislé prostory S_k a S_{n-k-1} určují prostor S_n; lze totiž body určující S_k i body určující S_{n-k-1} tak zvoliti, aby tvořily skupinu $n+1$ bodů nezávislých. V jiné formulaci: *Dva nezávislé prostory* S_k *a* $S_{k'}$ *určují prostor* S_n *je obsahující, kde platí* $n = k + k' + 1$ *čili* $k + k' = n - 1$.

Prostor nejmenšího počtu rozměrů, v němž dva dané prostory jsou obsaženy, sluje jejich prostorem spojujícím; jest jimi určen. Spec. spojující prostor dvou nezávislých prostorů S_k a $S_{k'}$ jest $S_{k+k'+1}$.

Prostor největšího počtu rozměrů, obsažený ve dvou daných prostorech, sluje jejich prostorem průsečným; jest jimi určen.

A nalezneme: *Mají-li dva prostory* S_k a $S_{k'}$ *průsečný prostor* S_p *a spojující prostor* S_s, *platí* $k + k' = s + p$. Neboť společný S_p je určen p + 1 svými body nezávislými, tyto body pak určují jednak s dalšími $k - p$ nezávislými body prostoru S_k, jednak s dalšími $k' - p$ nezávislými body prostoru $S_{k'}$ oba uvedené prostory S_k

---

[1]) Pro postuláty o incidenci prvků srv. *F. Amodeo*, Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno S_r, Atti Accad. Torino 26. (1891). Také *G. Fano*, Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni, Giornale mat. 30. (1892); *P. del Pezzo*, Appunti di geometria ad *n* dimensioni, Giornale mat. 31. (1893); *M. Pieri*, I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo, Memorie Accad. Torino 48. (1898).

a $S_{k'}$; všechny body zde vytčené určují prostor S_s, takže $s + 1$ se rovná jejich součtu; proto $s = k + k' - p$.

Pomocí důležité věty té můžeme při daných $k + k'$ nalézti s, je-li známo p, nebo nalézti p, je-li známo s: Dva prostory o k a k' rozměrech, protínající se v prostoru o p rozměrech (nikoli však v prostoru vyšším), určují (jako spojující) prostor o $k + k' - p$ rozměrech. Dva prostory o k a k' rozměrech, obsažené v prostoru o s rozměrech (nikoli však v prostoru nižším), určují (jako průsečný) prostor o $k + k' - s$ rozměrech. Předcházející věta o dvou nezávislých prostorech je v uvažované větě zahrnuta pro $p = -1$.

5. V prostoru S_r, složeném z bodů S_0, jsou obsaženy prostory S_k pro k od 1 do $r - 1$; poslední prostory o $r - 1$ rozměrech slují *nadroviny*.

Uvedené věty základní a některé věty odvozené můžeme sestaviti ve dvojice, obsažené v této obecné dvojici vět:

Body v počtu k (kde $2 \leq k \leq r$), jež nejsou incidentní s týmž prostorem S_{k-2}, určují (spojující) prostor S_{k-1}, s nímž jsou incidentní. Každou skupinu h bodů ($h < k$) je zde možno nahradit (spojujícím) prostorem S_{h-1}.	Nadroviny v počtu k (kde $2 \leq k \leq r$), jež nejsou incidentní s týmž prostorem S_{r-k+1}, určují (průsečný) prostor S_{r-k}, s nímž jsou incidentní. Každou skupinu h nadrovin ($h < k$) je zde možno nahradit (průsečným) prostorem S_{r-h}.

Vidíme tu, že si navzájem odpovídají věta o bodech a věta o nadrovinách v S_r, při čemž spojujícímu prostoru S_h odpovídá průsečný prostor S_{r-h-1} ($h = 1, 2, \ldots, r - 1$). Pokud tedy odvozujeme geometrické věty prostoru S_r z hořejších vět o incidenci prostorů S_k pro $0 \leq k \leq r - 1$, platí o větách těch *zákon duálnosti v prostoru* S_r:

Každá věta o útvarech prostoru r-rozměrného zůstává v platnosti, jestliže v ní (po případě slohově upravené) *zaměníme prostory* S_k a S_{r-1-k} (pro k od 0 do $r - 1$).

Prostory S_k a S_{r-1-k} slují v S_r *duální*; je-li r číslo liché, vyskytuje se v S_r prostor soběduální o $\frac{1}{2}(r - 1)$ rozměrech.

Jako je prostor S_k vytvořen body, tak lze duální prostor S_{r-k-1} duálně vytvořiti nadrovinami: *Všechny nadroviny v* S_r, *jež procházejí prostorem* S_{r-k-1}, *tvoří k-mocný svazek nadrovin, jejž* označíme Σ_k; tento svazek je určen $k + 1$ nadrovinami, které neleží v témž Σ_{k-1} (neprocházejí týmž S_{r-k}); jest k-mocný protože každý S_{k-1} obsažený v S_k, nezávislém v S_r vůči prostoru S_{r-k-1}, určuje spolu s tímto S_{r-k-1} jednu nadrovinu svazku, takže tato soustava obsahuje ∞^k nadrovin (jako prostor S_k nadrovin a bodů). Společný prostor S_{r-k-1} všech nadrovin k-mocného svazku Σ_k sluje *base* (základ, nosič, střed, osa) svazku. A jako jsou v bodovém prostoru S_k obsaženy bodové prostory S_h pro $h < k$, jsou v nadrovinovém svazku Σ_k duálně obsaženy nadrovinové svazky Σ_h (jejichž base S_{r-h-1} jsou incidentní s basí S_{r-k-1} svazku Σ_k).

Bodové prostory k-rozměrné S_k a nadrovinové svazky k-mocné Σ_k s basí S_{r-k-1} (pro k od 1 do $r-1$), navzájem duální, jsou *základní útvary* prostoru S_r a duálního Σ_r.

V prostoru S_n, ležícím v S_r, bereme někdy vedle bodů S_0 v úvahu také všechny prostory s nižším počtem rozměrů, jeho body vytvořené, (nazývajíce jejich soubor někdy *soustavou* prostoru S_n); duálně ve svazku Σ_n s basí S_{r-1-n} uvažujeme vedle nadrovin $S_{r-1} \equiv \Sigma_0$ všechny svazky m-mocné ($m < n$), jimi vytvořené, s basemi S_{r-1-m} nebo také prostory tyto S_{r-m-1} (jdoucí uvedenou basí S_{r-n-1}) a jmenujeme tento soubor n-mocným *svazem* Σ_n.

Obdobně jako se stalo pro S_r, lze zjistiti *duálnost pro každý prostor* S_n, v S_r obsažený, kde $1 < n < r$; věty o jeho útvarech nepozbývají platnosti záměnou prostorů S_k a S_{n-1-k} (pro k od 0 do $n-1$). Rovněž platí *duálnost v každém svazu* Σ_n; věty o jeho útvarech zůstanou v platnosti, i když zaměníme Σ_k a Σ_{n-1-k} čili jejich base S_{r-1-k} a S_{r-n+k}.

A v každém S_n jsou *základními útvary* vedle bodových prostorů S_k (pro k od 1 do $n-1$) k-mocné svazky prostorů S_{n-1} s basí S_{n-1-k}, k oněm v S_n duální; k nim přistupují uvažovaný prostor, složený z bodů a duálně z prostorů S_{n-1}. Duálně v každém Σ_n jsou *základními útvary* vedle nadrovinových svazků Σ_k s basí S_{r-1-k} také k-mocné svazky prostorů S_{r-n} obsažené v S_{r-n+k}, k oněm v Σ_n duální; jakož i uvažovaný svazek, složený z nadrovin a duálně z prostorů S_{r-n}.

6. *Základní výkony* projektivní geometrie jsou *promítání a protínání*.

Prostor S_k *promítneme* z prostoru S_m, sestrojíme-li prostor oba tyto prostory spojující. Takový promítající prostor má, jestliže S_m a S_k mají průsečný prostor S_p, rozměrů $m + k - p$ (je-li toto číslo $< r$); jestliže zejména prostory S_m a S_k nemají společného bodu, je promítajícím prostorem S_{m+k+1}, kde $m + k + 1 \leqq r - 1$.

Prostor S_k *protneme* prostorem S_t, sestrojíme-li prostor oběma těmto prostorům společný. Takový průsečný prostor má, mají-li S_t a S_k spojující prostor S_s, rozměrů $t + k - s$ (je-li toto číslo > -1); jestliže zejména prostory S_t a S_k mají spojující prostor S_r, jest průsečný prostor S_{t+k-r} ($t + k - r \geqq 0$).

Promítání a protínání jsou výkony duální: duální v S_r jest promítnutí prostoru S_k z bodu, z přímky, ..., z prostoru S_m a protnutí prostoru S_{r-k-1} nadrovinou S_{r-1}, prostorem $S_{r-2}, \ldots$, prostorem S_{r-m-1}.

Jestliže prostor S_k z prostoru S_m promítneme a promítající prostor prostorem S_t protneme, pravíme, že *prostor* S_k *promítneme z prostoru* S_m *do prostoru* S_t.

7. K uvedeným nahoře postulátům o incidenci prvků (o přímce, o rovině, vedle postulátů o existenci prvků), jež tvoří I. skupinu

postulátů, připojme postuláty II. skupiny o uspořádání prvků v základních útvarech jednomocných a postulát III. skupiny o spojitosti útvarů těchto.

Pravíme, že soustava prvků jest *uspořádaná*, jestliže máme možnost o kterýchkoli dvou prvcích A, B rozhodnouti, zda-li B následuje za A nebo A následuje za B (v prvním případě A předchází před B, v druhém prvek B předchází prvku A); při tom musí platit, že následuje-li B za A a C za B, následuje také C za A. Jako postulát o přirozeném uspořádání prvků v útvarech jednomocných přijímáme: *Vytkneme-li v základním útvaru jednomocném určitý prvek O, jest možno útvar dvěma způsoby pokládati za uspořádanou soustavu, v níž O předchází každému jinému prvku. V uspořádání tom každý prvek útvaru předchází některému jinému, a byly-li zvoleny dva různé prvky A, B, z nichž B následuje za A, existuje vždy některý prvek následující za A a předcházející před B.*

Jsou-li A, B dva různé prvky útvaru jednomocného, a provedeme-li v jednom z obou způsobů uspořádání, v němž A je prvním elementem, cyklickou záměnu, kterou se element B dostane na první místo, obdržíme jeden ze dvou způsobů uspořádání, majících B za první element; toto uspořádání sluje *souhlasné* s původním. To, co je všem souhlasným uspořádáním společno, sluje *smysl* útvaru; základní útvar jednomocný má dva a jenom dva smysly navzájem opačné.

Jest podstatně důležité, že uspořádaný útvar přechází promítáním a protínáním v útvar rovněž uspořádaný; proto přijímáme za postulát: *Oba navzájem opačné smysly přirozeného uspořádání prvků v každém základním útvaru jednomocném jsou projektivní tak, že u kterýchkoli dvou útvarů jednomocných, z nichž jeden je promítajícím nebo průsekem druhého, odpovídá jednomu ze smyslů jednoho útvaru jeden ze smyslů útvaru druhého.* Vzhledem k tomuto postulátu stačí požadovati uspořádání jenom u jednoho ze základních útvarů jednomocných.

Z vytčeného plyne zejména, že teprv dva prvky dělí jednomocný útvar základní ve dvě části tak, že každý další prvek útvaru toho náleží jedné nebo druhé části jeho; teprve tři prvky určují smysl takového útvaru.[2]) Pravíme, že dva prvky jednomocného útvaru základního oddělují dva jiné prvky jeho, patří-li ony do různých ze dvou částí útvaru, těmito rozděleného (což platí i obráceně, t. j. tyto dva prvky oddělují ony dva); tato vlastnost čtyř prvků

[2]) Obdobně jako bod nedělí přímku, nerozděluje přímka rovinu ve dvě části; teprve dvě přímky dělí rovinu ve dvě, tři přímky bez společného bodu ve čtyři části; a dále dělí čtyři roviny bez společného bodu a společné přímky třírozměrný prostor v osm částí; atd. Projektivní rovina je (se stanoviska topologického) jednostranná, projektivní prostor třírozměrný je dvoustranný; obecně S_{2k} je jednostranný, S_{2k+1} dvoustranný. Viz na př. *D. König*, Über Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Archiv Math. Phys. (3) 19. (1912).

základního útvaru jednomocného (jakož i vlastnost záporná) jest projektivní.

Požadavek neomezeného počtu bodů (opětovně vytčený) doplníme pro útvar jednomocný; v tomto směru vyslovíme určitě postulát o spojitosti základních útvarů jednomocných (aspoň jednoho): *Jestliže v uspořádaném základním útvaru jednomocném rozvrhneme prvky jeho ve dvě třídy tak, že každý prvek přísluší do první nebo do druhé třídy, a že každý prvek druhé třídy následuje za každým prvkem první třídy, pak existuje (jeden) určitý prvek té vlastnosti, že každý prvek jemu předcházející patří do prvé třídy a každý prvek za ním následující do druhé třídy.*[3])

Na uvedených postulátech tří skupin (o incidenci, uspořádání a spojitosti) lze založiti projektivní geometrii prostoru r-rozměrného (polydimensionální).

*

L'espace projectif à r dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne les éléments de la géométrie projective polydimensionale dans une forme aussi simple que possible, en tenant compte des oeuvres, écrites sur ce sujet, notamment de celles des géomètres italiens (Amodeo, Enriques etc.). Il adopte, dans le premier groupe, comme notions fondamentales celles du point, de la droite et de l'incidence, ainsi que deux postulats (sur la droite, sur le plan, sans parler du postulat sur l'existence du nombre nécessaire d'éléments), il établit la définition de l'espace à trois dimensions sur une base constructive et fait le même pour un plus grand nombre de dimensions; il constate la dualité et définit comme opérations fondamentales celles de projeter et de couper. Dans le second groupe, il adopte deux postulats sur l'arrangement des éléments dans la variété fondamentale à une dimension et sur son caractère projectif; enfin, dans le troisième groupe, le postulat de la continuité.

---

[3]) Pro postuláty o uspořádání prvků srv. *F. Enriques*, Lezioni di geometria proiettiva, 1898, 4. vyd. 1920; a *F. Severi*, Geometria proiettiva, 1921. Postulát o spojitosti je geometrickým výrazem aritmetického postulátu Dedekindova (jímž soustava čísel racionálních se doplňuje čísly iracionálními v soustavu čísel reálných).