Emil Schoenbaum

K teorii mechanického vyrovnávání

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 95--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108940

K teorii mechanického vyrovnávání.

Emil Schoenbaum.

Pode jménem mechanického vyrovnávání vytvořila počtářská prakse v matematické statistice a v pojistné matematice množství početních procesů, které záležejí v tom, že z řady hodnot získaných ze zkušenosti vyvodí se jednoduchými aritmetickými operacemi, v podstatě opětovaným sčítáním a násobením součtů číselnými koeficienty jiná řada hodnot. Takto odvozená »vyrovnaná« řada považuje se pak za lepší, — protože pravdě bližší, nebo pravidelněji probíhající — číselné vystižení zjevu, o jehož popis nebo rozbor se jedná.

Ponechávaje stranou kritiku základní myšlenky různých metod vyrovnávacích, zdůrazňuji pro účel tohoto pojednání, že vzorce mechanického vyrovnávání zpravidla mají tento tvar:

$$v_x = \sum_{k=-n}^{+n} a_k \, u_{x+k}, \tag{1}$$

kdež

$$u_{x-n}, \; u_{x-n+1} \; \ldots \; u_{x-1}, \; u_x, \; u_{x+1} \; \ldots \; u_{x+n}$$

představuje číselnou řadu, jež má býti vyrovnána a v_x jest vyrovnanou hodnotou, nahražující původní hodnotu u_x.

Při tom jest zpravidla

$$\sum_{k=-n}^{+n} a_k \doteq 1.$$

Ze vzorce jest patrno, že theorie mechanického vyrovnání je založena na myšlence, že porušení pozorované hodnoty chybami ať nahodilými nebo systematickými má vliv také na sousední hodnoty, takže kombinováním vyrovnávané hodnoty se sousedními hodnotami opravuje se aspoň z části její chyba.

Tak užívá na př. velmi oblíbená formule **Kingova** 15 sousedních členů řady k vyrovnání členu prostředního podle vzorce:

$$\begin{aligned}125\, v_n = {} & 27\, u_n + 27\,(u_{n+1} + u_{n-1}) + 27\,(u_{n+2} + u_{n-2}) - \\ & - (u_{n+3} + u_{n-3}) - (u_{n+4} + u_{n-4}) - (u_{n+5} + u_{n-5}) + \\ & + (u_{n+6} + u_{n-6}) - (u_{n+7} + u_{n+7}).\end{aligned}$$

Abychom mohli teorii mechanického vyrovnávání analyticky ovládnouti, mysleme si, že řada, jež má býti vyrovnána je dána funkcí $u(x)$ připouštějící integraci v intervalu $-n, +n$, pak je obsah všech vyrovnávacích formulí vyjádřen vztahem

$$v(x) = \int_{-a}^{+a} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

kdež $v(x)$ je funkce jednou vyrovnaná a $K(x, \xi)$ může býti zvaná funkcí vyrovnávací. Fakt, že $K(x, \xi)$ je v procesech vyrovnávacích vždy symetrická funkce, umožnil Wirtingerovi[1]) použíti teorie Fredholmových integrálních rovnic se symetrickým jádrem k odvození nových výsledků, na př. o opakování vyrovnávacích processů a o odchylkách řady vyrovnané s původní.

Cena těchto výsledků je však pro praksi snížena jejich přílišnou všeobecností a abstraktností.

Nových a pro praksi počtářskou důležitých výsledků však docílíme, použijeme-li fakta, že ve skutečnosti jsou operace mechanického vyrovnávání takové, že vyrovnávací funkce $K(x, \xi)$ je netoliko symetrická funkce argumentů x, ξ, nýbrž funkcí rozdílu $x - \xi$; skutečně ve všech vyrovnávacích formulích jest v obecném vzorci (1)

$$a_k = a_{-k}. \tag{3}$$

Tomu odpovídá jako obecný výraz mechanického vyrovnávání vztah

$$v(x) = \int_{-n}^{+n} K(y)\, u(x + y)\, dy, \tag{4}$$

či-li položíme-li $x + y = t$,

$$vx) = \int_{x-n}^{x+n} K(x - t)\, u(t)\, dt. \tag{5}$$

Volbou jednotky pro měření argumentu lze vždy docíliti pro meze integrálu hodnot -1 a $+1$, takže (5) se mění ve vztah

$$v(x) = \int_{x-1}^{x+1} K(x - t)\, u(t)\, dt. \tag{5'}$$

Z vlastností vyrovnávací funkce $K(x)$ plyne, že stává se nulou pro dostatečně veliké hodnoty x, positivní i negativní, takže lze za základ vyšetřování položiti též vztah

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t)\, u(t)\, dt. \tag{5''}$$

---

[1]) Viz Wirtinger: Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen 1907.

Z důležitých výsledků plynoucích z úvahy vztahů (5), (5'), (5'') buďtež uvedeny pouze tři.

Položme si především otázku po funkcích $u(x)$, které neutrpí změny vyrovnáváním při použití dané vyrovnávací funkce $k(x)$, tedy po funkcích, které se vyrovnáním reprodukují. Zodpovědění otázky vyžaduje patrně řešení jedné z integrálních rovnic odpovídajících vztahům (5), (5'), (5''), tedy na př. rovnice

$$u(x) = \int_{x-1}^{+1} K(y)\, u(x+y)\, dy.$$

Řešení této rovnice za nejjednodušších předpokladů o funkci $K(y)$ vede již k analogii s nejobecnějšími dosud docílenými výsledky Grossovými[2]) o funkcích reprodukovaných při vyrovnávání běžnými formulemi vyrovnávacími, při čemž ukazuje se výhodnost tohoto způsobu řešení oproti řešení Grossovu pomocí diferenčních rovnic. Je důležito poznamenati, že pro četné vyrovnávací funkce obsahuje řešení rovnice jako u Grosse členy tvaru

$$\alpha_0\, \varrho^x \cos(\varphi\, x) + \alpha_1\, \varrho^x \sin(\varphi\, x). \qquad (6)$$

Totéž platí o řešení dalšího problému, nalézti vyrovnávací funkci $K(x)$, která nechává danou funkci $u(x)$ beze změny.

Řešení obou těchto úloh: jednak při dané vyrovnávací funkci $K(x)$ nalézti funkci $u(x)$, jež se vyrovnáváním reprodukuje, jednak pro danou funkci $u(x)$ nalézti vyrovnávací funkci $K(x)$, jež ji reprodukuje, má pro celou nauku o mechanickém vyrovnávání veliký význam praktický, ježto vysvětluje na př. známý zjev, proč nevede často vyrovnávání vůbec k cíli, anebo dokonce sesiluje oscilace tvaru v (6) uvedeného. Naopak, patří-li podobné oscilace tvaru

$$\varrho^x \cos(\varphi\, x) \quad \text{nebo} \quad \varrho^x \sin(\varphi\, x)$$

k podstatným vlastnostem vyrovnávané funkce, je nutno použíti právě vyrovnávací funkce, která reprodukuje tyto oscilace, ježto by jinak byla podstata zjevu znetvořena.

Z integrální rovnice

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, u(t)\, dt, \qquad (5'')$$

lze vyvoditi dále velmi důležité důsledky v případě, že $K(x)$ dá se vyjádřiti nekonečnou řadou:

$$K(x) = e^{-x^2}\, [c_0 + c_1\, U_1(x) + c_2\, U_2(x) + \ldots], \qquad (7)$$

kdež $U_n(x)$ značí n-tý Hermite-ův polynom, to znamená platí vztah

$$e^{-x^2}\, U_n(x) = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

²) Versich. wiss. Mitteillung 1911.

V tomto případě lze totiž za předpokladu konvergence rozvojů při tom užívaných nalézti řešení rovnice (5'') ve tvaru

$$u(x) = e^{-x^2}\,[b_0 + b_1\,U_1(x) + b_2\,U_2(x) + \ldots],$$

při čemž platí pro určení koeficientů b_0, b_1, b_2, ... relace

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = b_0,$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{\pi}}\,a_1 = a_0\,b_1 + a_1\,b_0,$$

$$\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{\pi}}\,a_2 = a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0 \quad \text{atd.}$$

Po formální stránce lze tedy určiti čísla b_k podle metody Rungeovy[3]) dělením dvou potenčních řad.

Contribution à la théorie de l'ajustement mécanique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur part de la formule générale pour l'ajustement mécanique dans la forme

$$v_x = \sum_{k=-n}^{+n} a_k u_{x+k}$$

et de son analogie analytique

$$v(x) = \int_{-n}^{+n} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

où $K(x, \xi)$ est la fonction d'ajustement .Contrairement à M. Wirtinger, il suppose, d'accord avec les faits observés, que $K(x, \xi)$ est fonction de l'argument $x - \xi$ et il donne trois résultats découlant des considérations sur l'équation intégrale

$$u(x) = \int_{x-1}^{x+1} K(y)\, u(x+y)\, dy:$$

1. la détermination de la fonction $u(x)$ qui se reproduit par la fonction d'ajustement donnée $K(x)$;
2. la détermination de la fonction d'ajustement $K(x)$ qui reproduit une fonction donnée $u(x)$;
3. la déterminantion de la fonction $u(x)$, laquelle se reproduit par la fonction d'ajustement $K(x)$, celle-ci étant dévelloppée en une série de polynomes d'Hermite.

Les premiers deux problèmes conduisent, si l'on fait des hypothèses simples sur les fonctions $K(x)$, $u(x)$, aux résultats connus de M. Gross.

[3]) Runge: Über eine besondere Art von Integralgleichungen. Math. Annalen 75, sv. 1914.