Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miloš Kössler

Dvě poznámky k teorii číselné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 30–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108938`

Dvě poznámky k teorii číselné.

Napsal *M. Kössler.*

I. *Euler* odvodil vzorec

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=\frac{1}{\prod\limits_{0}^{\infty}(1-x^{2n+1})}, \tag{1}$$

kdež oba součiny jsou absolutně konvergentní pro $|x|<1$. Jestliže obě strany rovnice (1) proměníme v řady mocninné podle x a porovnáme-li koeficienty, obdržíme důležitou větu z aditivní teorie číselné:[1])

> Každé přirozené číslo lze rozečísti právě tolikrát na sčítance od sebe *různé*, kolikrát jest možno ho rozečísti na *stejné* nebo *různé* sčítance *liché*.

Sestrojíme k této větě analogickou, která odpovídá na obdobnou otázku z multiplikatívní teorie: Eksistuje snad analogický vztah pro rozklad přirozeného čísla v činitele?

Nazveme **akvadráty** ona přirozená čísla 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10,..., která nejsou úplnými čtverci. Zavedeme dále symbol

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, & \text{když } n \text{ jest akvadrát,}\\ 0, & \text{když } n \text{ jest kvadrát.}\end{cases}$$

Označme

$$P(s)=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^s}\right); \qquad Q(s)=\prod_{2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right).$$

Z toho plyne

$$P(s)\,.\,Q(s)=\prod_{2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^{2s}}\right)=P(2s),$$

$$Q(s)=\frac{P(2s)}{P(s)}=\frac{1}{\prod\limits_{2}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon(n)}{n^s}\right)}$$

a tedy

---

[1]) Viz na př. Bachmann: Die Analytische Zahlentheorie p. 30.

$$\prod_{2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{2}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon(n)}{n^s}\right)}. \tag{2}$$

To jest analogon vzorce (1). Oba součiny jsou absolutně konvergentní, jestliže reálná část čísla s jest větší než 1.

Provedeme-li násobení na levé straně rovnice (2), obdržíme řadu Dirichletovu

$$\prod_{2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^s}, \tag{3}$$

v níž $\alpha_n =$ počet rozkladů čísla n na různé činitele. Dále jest

$$\frac{1}{\prod\limits_{2}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon(n)}{n^s}\right)}=\prod_{2}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon(n)}{n^s}+\frac{\varepsilon^2(n)}{n^{2s}}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n^s}, \tag{4}$$

kdež $\beta_n =$ počet rozkladů čísla n na akvadratické činitele *různé* nebo *stejné*. Podle (2) rovnají se řady (3) a (4) a tedy i jejich koeficienty. Tak dospěli jsme k větě úplně analogické s větou Eulerovou:

> Každé přirozené číslo lze rozložiti právě tolikráte na činitele od sebe *různé*, kolikráte jest možno ho rozložiti na *stejné* nebo *různé* činitele *akvadratické*.

Tak na př. číslo $n = 36$ má rozklady na různé činitele 1 . 36, 2 . 18, 3 . 12, 4 . 9, 2 . 3 . 6, v počtu pěti, a rozklady na činitele akvadratické stejné nebo různé 2 . 18, 3 . 12, 2 . 3 . 6, 6 . 6, 2 . 2 . 3 . 3, také v počtu pěti.

Tato elementární věta, jak se zdá, ušla dosud pozornosti. Není registrována ani ve velké knize *Dicksonově*: History of the theory of numbers. Washington, Carnegie Institution. Analogie mezi aditivními a multiplikativními vlastnostmi čísla n může býti ještě zobecněna, jak bude ukazováno jinde.

II. Každé přirozené číslo lze jednoznačně vyjádřiti jako součin prvočísel povýšených na jisté mocniny

$$n = p_1^{\alpha_1} \,.\, p_2^{\alpha_2} \,.\, \ldots \,.\, p_k^{\alpha_k}. \tag{5}$$

Toto vyjádření všech přirozených čísel pomocí jisté skupiny čísel základních (zde prvočísel) není ovšem jediné možné. Všimneme si zde jiné takové representace čísel přirozených.

Buďtež $q_1, q_2, q_3, \ldots$ přirozená čísla větší než jedna seřazená podle velikosti, která mají tu vlastnost, že nejsou úplnou mocninou jiného (menšího) čísla přirozeného. Nazveme je čísla a p o t e n č n í. Jest tedy $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, $q_4 = 6$, $q_5 = 7$, $q_6 = 10, \ldots$. Lze snadno nahlédnouti, že číslo n jest apotenční, když v jeho vyjádření tvaru (5) eksponenty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ ne-mají společnou míru větší než 1. Mají-li tato čísla největší společnou míru α, bude číslo n míti tvar

$$n = q_\nu^{\alpha},$$

kdež ν, α jsou jednoznačně určeny číslem n. Při tom značí q_ν zcela určité číslo apotenční. Budeme říkati, že n patří k apotenčnímu číslu q_ν.

Chceme řešiti úlohu formulovanou podle analogie známého problemu z teorie prvočísel. Kolik jest apotenčních čísel menších než x?

K číslu q_ν patří tato a jen tato čísla přirozená

$$q_\nu,\ q_\nu^2,\ q_\nu^3,\ q_\nu^4,\ \ldots. \tag{6}$$

Z toho plyne, že všechna přirozená čísla se vyskytnou v posloupnostech (6) a, sice každé jen jednou, jestliže klademe postupně $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Tak získáme okamžitě vztah pro *Riemannovu* funkci dzéta:

$$\begin{aligned}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 &+ \frac{1}{q_1^s} + \frac{1}{q_1^{2s}} + \frac{1}{q_1^{3s}} + \ldots \\ &+ \frac{1}{q_2^s} + \frac{1}{q_2^{2s}} + \frac{1}{q_2^{3s}} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Sečteme-li podle sloupců, což vzhledem k absolutní konvergenci dvojné řady pro $R(s) > 1$ jest dovoleno, obdržíme

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^s} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^{2s}} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^{3s}} + \ldots \tag{7}$$

Dosadíme-li sem za s postupně $s, 2s, 3s, \ldots$, sečteme-li všechny tak vzniklé rovnice násobené postupně Moebiusovými koeficienty[2]) $\mu(1), \mu(2), \mu(3), \ldots$, obdržíme inversní vztah

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^s} = \mu(1)\{\zeta(s) - 1\} + \mu(2)\{\zeta(2s) - 1\} + \mu(3)\{\zeta(3s) - 1\} + \ldots \tag{8}$$

Zvolme kladné číslo x k vůli zjednodušení nikoliv celé. Potom v řadě

$$\zeta(ks) - 1 = \frac{1}{2^{ks}} + \frac{1}{3^{ks}} + \frac{1}{4^{ks}} + \ldots$$

bude počet (p) sčítanců, jichž jmenovatel má základ menší než x vyjádřen vztahy

$$(p+1)^k < x < (p+2)^k,$$

---

[2]) Definici faktorů Moebiusových a jich vlastností viz na př. Bachmann: l. c. str. 309 a násl.

čili

$$p+1<x^{\frac{1}{k}}<(p+2),$$
$$p+1=[x^{\frac{1}{k}}],$$

kdež hranatá závorka značí známý *Gaussův* symbol. Označme dále $p(x)$ počet čísel apotenčních menších než x. Koeficienty Dirichletovy řady na levé straně rovnice (8) jsou jednotky. Součet těchto koeficientů u všech sčítanců, jichž jmenovatel má základ menší než x bude roven právě $p(x)$. Jest tedy

$$p(x)=\mu(1)\{[x]-1\}+\mu(2)\{[x^{\frac{1}{2}}]-1\}+\ldots+\mu(k)\{[x^{\frac{1}{k}}]-1\}. \quad (9)$$

Při tom sčítáme na pravé straně až k onomu sčítanci, pro nějž jest

$$x^{\frac{1}{k}}>2>x^{\frac{1}{k+1}}$$

a tedy

$$\frac{\log x}{\log 2}-1<k<\frac{\log x}{\log 2},$$

čili

$$k=\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]. \quad (10)$$

Vzorec (10) určuje přesně počet $p(x)$ čísel apotenčních menších než x. Určíme ještě asymptotické chování této funkce pro velká x. Protože $x^{\frac{1}{m}}-[x^{\frac{1}{m}}]<1$, $\mu(m)$ rovná se buď 0 nebo 1 nebo -1 a protože počet sčítanců na pravé straně v (9) jest menší než $\log x$, bude[3])

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\text{konečnému číslu.}$$

$$p(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)\left\{x^{\frac{1}{\nu}}-1\right\}+O(\log x). \quad (11)$$

Sem dosadíme

$$x^{\frac{1}{\nu}}-1=\frac{\log x}{1!\,\nu}+\frac{\log^2 x}{2!\,\nu^2}+\frac{\log^3 x}{3!\,\nu^3}+\ldots$$

Vhodné uspořádání členů dá výsledek

$$p(x)-O(\log x)=\log x\left\{\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\ldots+\frac{\mu(k)}{k}\right\}+$$
$$+\frac{\log^2 x}{2!}\left\{\frac{\mu(1)}{1^2}+\frac{\mu(2)}{2^2}+\ldots+\frac{\mu(k)}{k^2}\right\}+$$

[3]) Budiž $g(x)$ positivní funkce definovaná pro všechna kladná x a $f(x)$ funkce definovaná pro všechna kladná x od jistého počínaje. Znakem $f(x)=O(g(x))$ rozumíme

$$+\frac{\log^3 x}{3!}\left\{\frac{\mu(1)}{1^3}+\frac{\mu(2)}{2^3}+\ldots+\frac{\mu(k)}{k^3}\right\}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prvý řádek na pravé straně můžeme zahrnouti do členu $O(\log x)$, protože, jak známo, řada $\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\frac{\mu(3)}{3}+\ldots$ má součet rovný nule. Ze vztahu

$$\frac{1}{\zeta(r)}=\frac{\mu(1)}{1^r}+\frac{\mu(2)}{2^r}+\ldots$$

vyplývá

$$\frac{\mu(1)}{1^r}+\frac{\mu(2)}{2^r}+\ldots+\frac{\mu(k)}{k^r}=\frac{1}{\zeta(r)}-R_r,$$

kdež

$$|R_r|=\left|\frac{\mu(k+1)}{(k+1)^r}+\frac{\mu(k+2)}{(k+2)^r}+\ldots\right|,$$

$$|R_r|<\frac{1}{(k+1)^r}+\frac{1}{(k+2)^r}+\ldots<\int_{k+1}^{\infty}\frac{dx}{x^r}$$

a tedy

$$|R_r|<\frac{1}{(r-1)\,k^{r-1}}.$$

Protože podle (10)

$$k>\frac{\log x}{2},$$

bude

$$|R_r|<\frac{2^{r-1}}{(r-1)\log^{r-1}x},\quad r\geqq 2.$$

Jest tedy celkem

$$p(x)-O(\log x)=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\log^r x}{r!\,\zeta(r)}-H(x),$$

kdež

$$|H(x)|<\frac{2\log x}{2!}+\frac{2^2\log x}{3!\;2}+\frac{2^3\log x}{4!\;3}+\ldots$$

a tedy $H(x)=O(\log x)$. Celkem

$$p(x)=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\log^r x}{\zeta(r)\,.\,r!}+O(\log x). \tag{12}$$

Zvolme dále číslo ν pevně (nezávisle na x) a při tom menší než k. Od rovnice (12) odečteme

$$\mu(1)\{x-1\}+\mu(2)\{x^{\frac{1}{2}}-1\}+\ldots+\mu(\nu)\{x^{\frac{1}{\nu}}-1\}=$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\log^r x}{r!}\left\{\frac{\mu(1)}{1^r}+\frac{\mu(2)}{2^r}+\ldots+\frac{\mu(\nu)}{\nu^r}\right\}.$$

Protože $\mu(1)+\mu(2)+\ldots+\mu(\nu)=O(\log x)$, bude

$$p(x)-\{\mu(1)x+\mu(2)x^{\frac{1}{2}}+\mu(3)x^{\frac{1}{3}}+\ldots+\mu(\nu)x^{\frac{1}{\nu}}\}=$$

$$=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\log^r x}{r!}\left\{\frac{1}{\xi(r)}-\frac{\mu(1)}{1^r}-\frac{\mu(2)}{2^r}-\ldots-\frac{\mu(\nu)}{\nu^r}\right\}+O(\log x).$$

Avšak

$$A_r=\frac{1}{\zeta(r)}-\frac{\mu(1)}{1^r}-\ldots-\frac{\mu(\nu)}{\nu^r}=\frac{\mu(\nu+1)}{(\nu+1)^r}+\frac{\mu(\nu+2)}{(\nu+2)^r}+\ldots$$

a tedy

$$|A_r|<\frac{1}{(\nu+1)^r}+\frac{1}{(\nu+2)^r}+\ldots\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{(\nu+1)^r}\left\{1+\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^2+\left(\frac{\nu+1}{\nu+3}\right)^2+\ldots\right\},$$

$$|A_r|<\frac{C_\nu}{(\nu+1)^r},$$

kdež C_ν nezávisí na r. Jest tedy

$$|p(x)-(\mu(1)x+\mu(2)x^{\frac{1}{2}}+\ldots+\mu(\nu)x^{\frac{1}{\nu}})|<$$

$$<|O(\log x)|+C_r\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\log^r x}{(\nu+1)^r!}<|O(\log x)|+x^{\frac{1}{\nu+1}}\,.\,C_\nu.$$

Z toho plyne konečně asymptotické vyjádření počtu čísel apotenčních

$$p(x)=\mu(1)x+\mu(2)x^{\frac{1}{2}}+\ldots+\mu(\nu)x^{\frac{1}{\nu}}+O(x^{\frac{1}{\nu+1}}),\qquad(13)$$

kdež ν jest libovolné přirozené číslo menší než $\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ a nezávislé na x.

Deux remarques concernant la théorie des nombres.

(Extrait de l'article précédent.)

I. Euler a établi le théorème suivant: *On peut décomposer tout nombre entier en une somme de termes différents autant de fois, combien de fois on peut le décomposer en une somme de nombres impairs, égaux ou différents.*

L'auteur donne la démonstration d'un théorème analogue de la théorie multiplicative: *On peut décomposer tout nombre entier en facteurs différents autant de fois, combien de fois on peut le décomposer en facteurs nonquadratiques, égaux ou différents.*

La démonstration se base sur la formule (2), où $\varepsilon(n)=1$, quand n n'est pas carré parfait, et $\varepsilon(n) = 0$, quand n est carré parfait.

II. Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots$ des entiers positifs, supérieurs à l'unité, ordonnés par ordre croissant, définis par la propriété de ne pas être puissance exacte d'un nombre entier. Alors, tout nombre entier positif n est déterminé d'une manière univoque par la relation $n = q_\nu^\alpha$, où α et ν sont des fontions uniformes du nombre n. Le nombre $p(x)$ des nombres q inférieurs à x, x n'étant pas entier, est donné exactement par les formules (9), (10). Ici, par $u(n)$ sont désignés les facteurs de Moebius. L'expression asymptotique du nombre $p(x)$ est fournie par les relations (12) ou (13), où ν désigne un entier positif quelconque inférieur à ($\log x/\log 2$.)