Bohumil Machytka

Lineární systémy obecných kubických křivek rovinných invariantních vzhledem ke kvadratické involuci třídy prvé

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 60--69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108935

Lineární systémy obecných kubických křivek rovinných invariantních vzhledem ke kvadratické involuci třídy prvé.

† *B. Machytka.*

Úplné lineární systémy Σ_r^n rovinných křivek eliptických, jichž dimense $r > 1$, lze Cremonovou transformací převésti v systémy Σ_r^3 obecných křivek kubických s touž charakteristickou soustavou bodovou. S hlediska toho není snad neužitečno zabývati se studiem vlastností systémů v názvu práce blíže definovaných, hlavně pokud jde o vlastnosti, jež jsou invariantní k transformacím Cremonovým.

1. Buď dána rovinná kvadratická involuce třídy prvé T, jejíž hlavní body jsou A_1, A_2, A_3 a samodružné body B_1, B_2, B_3, B_4. Označení zvolme tak, že jest $A_3 \equiv (\overline{B_1 B_2} \,.\, \overline{B_3 B_4})$, $A_2 \equiv (\overline{B_2 B_3} \,.\, \overline{B_4 B_1})$ a $A_1 \equiv (\overline{B_1 B_3} \,.\, \overline{B_2 B_4})$. Především vezměme zřetel k tomu, že každá kuželosečka procházející dvěma body skupiny (B) a dvěma hlavními body, při čemž žádné tři z těchto bodů neleží v přímce, jest reprodukována involucí T. Existuje tudíž v rovině šest svazků kuželoseček, z nichž každý se skládá z křivek invariantních k transformaci T.

Vyšetřujme nyní obecné kubické křivky, které jsou involucí T reprodukovány. Křivky ty můžeme děliti podle toho, vytvořuje-li na nich transformace T korespondenčními bodovými páry buď centrické, racionalní involuce g_2^1 prvého druhu, nebo eliptické involuce druhého druhu. Dospějeme tak v dalším

a) k síti Σ_2^3 isologických obecných kubických křivek C_P^3;

b) k lineárnímu neúplnému komplexu S_3^3 obecných kubických křivek K^3.

a) Všimneme si nejprve obecných kubických křivek C^3, které jsou transformací T reprodukovány tak, že na každé z nich vzniká centrická racionální involuce g_2^1, která má samodružné body B_1, B_2, B_3, B_4. Křivky tyto procházejíce body (B), (A) tvoří síť Σ_2^3. Vskutku degeneruje, jak známo, Geiserova rovinná involuce, určená sedmibodovou skupinou tvořící čtyřroh a jeho diagonálné vrcholy, v involuci kvadratickou prvé třídy, a každá křivka C^3 procházející vrcholy čtyřrohu (B) a jeho diagonálními vrcholy (A) jest tím charakterisována, že body (B) tvoří na ní čtveřinu konjugovaných bodů o společném tečnovém bodě. Mění-li se křivka C^3 sítě Σ_2^3, pak mění se též společný tečnový bod P konjugované čtveřiny bodové (B) a vyplňuje tak celou rovinu. A opačně: zvolíme-li v rovině libovolný bod P za společný tečnový bod čtveřiny (B), pak jest tím určena jediná křivka sítě Σ_2^3, neboť přímek $\overline{P B_i}$ dotýká se v bodech B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ jediná kubická křivka jdoucí bodem P; tato majíc čtveřinu bodovou (B) za konjugovanou, nutně prochází diagonálními vrcholy (A) a náleží tudíž síti Σ_2^3. Označme tuto křivku, volbou bodu P jednoznačně určenou, znakem C_P^3 a bod P nazývejme jejím bodem „charakteristickým". Přísluší tedy každému bodu P v rovině obecně zvolenému tímto způsobem jediná křivka C_P^3, takže body rovinného pole a křivky sítě Σ_2^3 si v tomto přiřazení jednojednoznačně odpovídají. Na křivce C_P^3 vytvořuje transformace T korespondenčními bodovými páry M, M' centrickou involuci g_2^1 o středu P, takže křivky C_P^3 tvoří síť isologických křivek transformace T. Odpovídá-li bodu P transformací T bod P', pak lze křivku C_P^3 vytvořiti paprskovým svazkem o středu P a projektivním svazkem kuželoseček o bási A_1, A_2, A_3, P', který prvému svazku transformací T odpovídá. Jest tedy centrická involuce o středu P na křivce C_P^3 vyťata též tímto svazkem kuželoseček, takže bod P jest na C_P^3 korresiduální se čtveřinou bodovou A_1, A_2, A_3, P'. Křivka C_P^3 jest g. m. dotyčných bodů tečen z bodu P vedených ke svazku kuželoseček $S_1^2(B_1 B_2 B_3 B_4)$. Kuželosečky tohoto svazku vytínají totiž na libovolném paprsku p, jdoucím bodem P, kvadratickou involuci, v jejichž samodružných bodech M, M' dotýkají se přímky p dvě kuželosečky svazku. Body M, M' oddělují harmonicky bodové páry vyťaté involuce, jsou tedy polárně sdruženy ke všem kuželosečkám svazku $S_1^2(B)$ a tvoří tudíž bodový pár transformace T. Poláry bodu P ke svazku $S_1^2(B)$ tvoří svazek paprskový o středu P', projektivní ke svazku $S_1^2(B)$ a křivka C_P^3 jest těmito svazky vytvořena. Kuželosečka svazku $S_1^2(B)$ procházející bodem P dotýká se v tomto bodě křivky C_P^3 a obě křivky mají v bodě P společnou tečnu $\overline{P P'}$. Svazek kuželoseček $S_1^2(B)$ vytíná tedy na C_P^3 involuci g_2^1 o středu P', která má v P bod dvojný. Další tři její dvojné body jsou hlavní body A_1, A_2, A_3, v nichž reducibilní kuželosečky svazku $S_1^2(B)$ sečou křivku C_P^3. Body A_1, A_2, A_3, P tvoří tedy na křivce C_P^3 opět konjugovanou čtveřinu bodovou o společném tečnovém bodě P'. Bod P' jest druhým tečnovým bodem konjugované čtveřiny bodové (B) a zároveň k ní bodem korresiduálním. Hlavnímu bodu A_i odpovídá na křivce C_P^3 průsečík její s protější hlavní přímkou $\overline{A_h A_k}$, při čemž tyto dva body musí ležeti s bodem P v přímce. Promítneme-li tedy z bodu P vrcholy trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$ na jeho protější strany, obdržíme další tři průsečíky křivky C_P^3 se stranami tohoto trojúhelníku. Libovolným bodem M v rovině prochází ∞^1 křivek C_P^3 tvořících svazek Σ_1^3; zbývajícím devátým bodem báse tohoto svazku jest korespondenční bod M'. Charakteristické body P křivek C_P^3 tohoto svazku Σ_1^3 vyplňují přímou řadu bodovou $m \equiv \overline{M\,M'}$. Ve svazku tom jest křivka C_M^3 a $C_{M'}^3$, které se v bodech M, resp. M' dotýkají přímky m. Dvěma body M, N v rovině obecně zvolenými prochází jediná křivka C_P^3; její charakteristický bod P jest průsečíkem přímek $\overline{M\,M'}$ a $\overline{N\,N'}$. Tím jest dána jednoduchá konstrukce této křivky. Dvě křivky C_P^3 a C_Q^3 protínají se ve dvou bodech M, M'. Sestrojíme je jako průsečíky přímky $\overline{P\,Q}$ s kuželosečkou, která této přímce odpovídá transformací T. Nalézá-li se charakteristický bod P na některé samodružné přímce transformace T, na př. na přímce $\overline{B_1\,B_2\,A_3}$, pak příslušná křivka C_P^3 skládá se z této samodružné přímky a z jedné kuželosečky svazku $S_1^2(B_3\,B_4\,A_1\,A_2)$, a sice zřejmě z té, která se v bodech B_3 a B_4 dotýká přímek $\overline{P\,B_3}$ a $\overline{P\,B_4}$. Transformace T vytvořuje vskutku na každé kuželosečce svazku $S_1^2(B_3\,B_4\,A_1\,A_2)$ involuci o samodružných bodech B_3, B_4 a středu P na $\overline{B_1\;B_2}$, neboť přímka ta vytíná na této kuželosečce jeden bodový pár této involuce. Pohybuje-li se bod P po přímce $\overline{B_1\,B_2\,A_3}$, pak svazek příslušných kubických křivek C_P^3 skládá se z této přímky a ze svazku kuželoseček $S_1^2(A_1\,A_2\,B_3\,B_4)$. Je-li charakteristickým bodem některý samodružný bod B_i, pak příslušná křivka $C_{B_i}^3$ skládá se z těch tří samodružných přímek involuce T, které tímto bodem B_i procházejí. Nalézá-li se charakteristický bod P na některé hlavní přímce, na př. na $\overline{A_2\,A_3}$, pak na příslušné křivce C_P^3 tvoří body P, A_1, A_2, A_3 čtveřinu bodů konjugovaných o společném tečnovém bodě a ježto v tomto případě tři z těchto bodů P, A_2, A_3 leží v přímce, jest zbývající čtvrtý bod A_1 inflexním bodem této křivky C_P^3 a body P, A_2, A_3 leží na jeho harmonické poláře a jsou body sextaktické. Tato křivka C_P^3 dotýká se tedy přímek $\overline{A_1\,P}$, $\overline{A_1\,A_2}$, $\overline{A_1\,A_3}$ v bodech P, A_2, A_3 a má v inflexním bodě A_1 za inflexní tečnu přímku t, která v involuci T odpovídá přímce $\overline{A_1\,P}$. Pohybuje-li se bod P po hlavní přímce $\overline{A_2\,A_3}$, pak příslušné křivky C_P^3 vytvořují svazek ${}_1\Sigma_1^3$, jehož křivky v bodech A_2, A_3 dotýkají se přímek $\overline{A_1\,A_2}$ a $\overline{A_1\,A_3}$, mají v bodě A_1 společný inflexní bod a jemu příslušící společnou harmonickou poláru $\overline{A_2\,A_3}$. Inflexní tečny v bodě A_1 jsou ovšem různé; odpovídají involucí paprskům $\overline{A_1\,P}$. Všechny křivky tohoto svazku mají tudíž v bodech A_2, A_3 společné body sextaktické. Každá křivka svazku ${}_1\Sigma_1^3$ jest tudíž též reprodukována involutorní centrickou lineární homologií H_1, která má za střed bod A_1 a za osu přímku $\overline{A_2\,A_3}$. Ve svazku ${}_1\Sigma_1^3$ jsou čtyři křivky reducibilní. Jsou to především křivky $C_{A_2}^3$ a $C_{A_3}^3$, z nichž každá se skládá ze tří přímek. Je-li totiž charakteristický bod křivky bodem hlavním, pak křivka tato skládá se z protější strany hl. trojúhelníku a z těch dvou samodružných přímek involuce **T**, které tímto hl. bodem procházejí. Další dvě reducibilní křivky svazku ${}_1\Sigma_1^3$ jsou křivky $C^3_{D_1}$ a $C^3_{D_2}$, při čemž charakteristické body D_1 a D_2 jsou průsečíky přímky $\overline{A_2 A_3}$ se samodružnými přímkami $\overline{A_1 B_1 B_3}$, resp. $\overline{A_1 B_2 B_4}$. Z předchozího plyne, že křivka $C^3_{D_1}$ skládá se z přímky $\overline{A_1 B_1 B_3 D_1}$ a z kuželosečky $K^2_{D_1}$, která prochází body A_2, A_3, B_2, B_4 a dotýká se v bodech A_2, A_3 přímek $\overline{A_1 A_2}$ a $\overline{A_1 A_3}$, a v bodech B_2, B_4 přímek $\overline{D_1 B_2}$, $\overline{D_1 B_4}$. Zcela podobně tomu jest pro křivku $C^3_{D_2}$. Jiné reducibilní křivky ve svazku ${}_1\Sigma_1^3$ nejsou. Totéž ovšem platí pro další dva svazky ${}_2\Sigma_1^3$, resp. ${}_3\Sigma_1^3$, jichž křivky mají společný inflexní bod A_2 resp. A_3.

V síti Σ_2^3 nalézá se tudíž šest svazků kubických křivek C^3_P reducibilních, složených vždy z jedné samodružné přímky $\overline{B_h B_k A_i}$ transformace **T** a z jednoho svazku kuželoseček, jehož bási tvoří zbývající dva body hlavní a dva body samodružné. V síti jest sedm křivek složených ze tří přímek. Jsou to křivky $C^3_{B_i}$ a $C^3_{A_k}$. Jacobian sítě Σ_2^3 skládá se ze šesti stran čtyřrohu (B). V síti Σ_2^3 neexistuje zřejmě nereducibilní kubická křivka racionální.

Vraťme se ještě k obecnému svazku $\Sigma_1^3(X_1 X'_1)$, který se skládá z těch křivek C^3_P sítě Σ_2^3, které procházejí bodovým párem $X_1 X_1'$ transformace **T**. Charakteristické body P těchto křivek vytvořují řadu bodovou na přímce $\overline{X_1 X'_1}$ a tvoří na těchto křivkách s body A_1, A_2, A_3 konjugované čtveřiny bodové. Jest tedy každá křivka C^3_P tohoto svazku reprodukována kvadratickou involucí první třídy $T_i^{(2)}$,*) která má hlavní body X_1, X'_1, A_i, a v níž si zbývající body A_h, A_k odpovídají. Tyto tři kvadratické involuce $T_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3)$ tvoří s identitou grupu G_4 a vytvořují na křivkách C^3_P svazku všechny tři eliptické involuce druhého druhu, tedy konjugované čtveřiny bodové. Přidáme-li k transformacím grupy G_4 původní involuci **T**, pak vznikne grupa G_8, obsahující další tři kubické involuce $T_i^{(3)}$, při čemž $T_i^{(3)}$ jest kubická inverse, mající v bodě A_i hlavní bod druhého řádu a v bodech A_h, A_k, X, X_1' hlavní body lineární. Řídicí křivka K_i^3 této inverse má v hlavních bodech lineárních čtveřinu bodů konjugovaných o společném tečnovém bodě A_i; nenáleží tudíž do sítě Σ_2^3, nýbrž jak z úvah kap. *b*) plyne, do komplexu S_3^3. Jest tedy každý svazek Σ_1^3 sítě Σ_2^3 složen z křivek C^3_P, které jsou reprodukovány grupou typu G_8.

b) V rovině zvolme libovolné dva bodové páry M_1, M'_1; M_2, M'_2 transformace **T**. Každá kvadratická rovinná involuce první třídy, která má tyto dva bodové páry, má nutně též, jak

*) Viz mou práci: „O jistých grupách Jonquièrových rovinných involucí", Spisy přírodovědecké fakulty Karlovy university, č. 27, r. 1925, str. 21. a 27.

jsem ukázal,*) „associovaný" bodový pár: M_{12}, M'_{12}, při čemž jest $M_{12} \equiv \overline{M_1 M_2} . \overline{M'_1 M'_2}$ a $M'_{12} \equiv \overline{M_1 M'_2} . \overline{M'_1 M_2}$. Přiřazení toto jest ovšem vzájemné; dvěma párům bodovým z této trojice jest přiřazen zbývající pár třetí. Každá obecná kubická křivka, na níž body M_1, M'_1; M_2, M'_2 tvoří páry téže eliptické involuce druhého druhu, prochází nutně též bodovým párem associovaným. Skupina těchto tří associovaných bodových párů tvoří s hlavními body (A_i) transformace **T** bási svazku kubických křivek, z nichž každá jest reprodukována transformací **T**. Jest to zřejmo z toho, že těmito devíti body procházejí tyto čtyři reducibilní kubické křivky: $[\overline{M_1 M_2 M_{12}}, K^2(A_i M'_1 M'_2 M'_{12})]$, $[\overline{M'_1 M'_2 M_{12}}, K^2(A_i M_1 M_2 M'_{12})]$ $[\overline{M_1 M'_2 M'_{12}}, K^2(A_i M'_1 M_2 M_{12})]$ a $[\overline{M'_1 M_2 M'_{12}}, K^2(A_i M_1 M'_2 M_{12})]$, z nichž každá jest složena z přímky a kuželosečky, která této přímce transformací **T** odpovídá, takže každá z nich jest vzhledem k **T** invariantní.

Kvadratická rovinná involuce třídy prvé reprodukuje tudíž ∞^3 obecných kubických křivek, které tvoří neúplný lineární komplex $S^3_3(A_1 A_2 A_3 X_1 X'_1, X_2 X'_2, X_3 X'_3)$ o třech pevných bodech báse (A), při čemž X_1, X_2, X_3 jsou tři v rovině obecně zvolené body. Na křivkách K^3 tohoto komplexu vytvořuje transformace **T** eliptické involuce druhého druhu. Vytínají tedy křivky komplexu S^3_3 na libovolné pevné křivce K^3 tohoto systému charakteristickou soustavu bodovou g^2_6, která se skládá ze tří bodových párů téže eliptické involuce druhého druhu, při čemž jest každý z těchto párů k zbývajícím dvěma associován.

Křivka K^3 komplexu S^3_3, určená jednoznačně volbou tří bodů X_1, X_2, X_3, prochází nutně též příslušnými třemi associovanými bodovými páry $X_{12} X'_{12}$, $X_{13} X'_{13}$, $X_{23} X'_{23}$ k bodovým párům $X_i X'_i$ $(i = 1, 2, 3)$; spojíme-li nyní páry $X_i X'_i$, $X_{hk} X'_{hk}$ obdržíme k nim opět další bodový pár associovaný, takže tímto způsobem můžeme postupně pro křivku K^3 určiti jednoduše libovolné množství bodových párů.

Křivka K^3 komplexu S^3_3 procházející některým samodružným bodem (B) má nutně v tomto bodě bod dvojný. Ve svazku $S^3_1(A_i, X_1 X'_1, X_2 X'_2, X_{12} X'_{12})$ nalézají se tedy čtyři křivky racionální o dvojných bodech ve skupině (B) a další čtyři svrchu poznané křivky reducibilní, z nichž každá jest složena z přímky a kuželosečky, která jí transformací odpovídá. Každá síť $S^3_2(A_i X_1 X'_1)$ obsažená v komplexu S^3_3 obsahuje čtyři svazky ${}_kS^3_1(A_1 A_2 A_3 X_1 X'_1 B_k)$, složené z racionálních křivek kubických, majících v příslušném bodě B_k bod dvojný, a mimo to ∞^1 kubických křivek reducibilních, a sice složených z paprsků svazku o středu X_1, resp. X'_1 a z kuželoseček, které těmto paprskům transformací **T** odpovídají. Jacobián této sítě skládá se tudíž

*) Viz tamtéž, str. 4.

z isologických kubických křivek $C^3_{X_1}$ a $C^3_{X'_1}$ sítě Σ^3_2. Křivky komplexu S^3_3, které procházejí dvěma samodružnými body transformace T, na př. body B_1 a B_2, jsou složeny z přímky $B_1 B_2 A_3$ a z kuželoseček svazku $S^2_1(A_1 A_2, B_1 B_2)$. Křivka K^3 komplexu, která prochází třemi samodružnými body (B), skládá se ze tří stran trojúhelníku jimi určeného.

Vezměme nyní v úvahu charakteristickou soustavu bodovou g^2_6, která jest na libovolné pevné křivce K^3 komplexu S^3_3 vyťata ostatními křivkami tohoto systému. Obecná skupina soustavy g^2_6 skládá se z bodů X_1, X'_1; X_2, X'_2; X_{12}, X'_{12}. Je-li $X_2 \equiv X_1$, pak jest $X'_2 \equiv X_2$ a třetí associovaný konjugovaný bodový pár tvoří společný tečnový bod X_{12} bodů X_1 a X_1' a zbývající průsečík X'_{12} křivky K^3 s přímkou $\overline{X_1 X'_1}$. Křivky komplexu S^3_3, které se dotýkají v jednom bodě X_1, dotýkají se i v bodě X'_1 a určují svazek, jehož zbývající dva body báse tvoří společný tečnový bod X_{12} konjugovaných bodů X_1, X'_1 a sdružený bod X'_{12}, ležící na $\overline{X_1 X'_1}$. Svazek tento není ovšem určen volbou přímky $m \equiv \overline{X_1 X'_1}$. V tomto svazku jsou čtyři křivky racionální o dvojných bodech ve skupině (B) a toliko tři křivky reducibilní složené z přímek $\overline{X_1 X'_1 X'_{12}}$, resp. $\overline{X_1 X_{12}}$, resp. $\overline{X'_1 X_{12}}$ a z kuželoseček, které těmto přímkám transformací T odpovídají. Zvolíme-li na křivce K^3 za bod X_1 inflexní bod této křivky, pak jest $X_{12} \equiv X_1$ a $X'_{12} \equiv X'_1$. Charakteristická soustava bodová g^2_6 komplexu S^3_3, vyťatá na obecné jeho křivce K^3, má tedy obecně 9 skupin dvojbodových, z nichž každá se skládá z jednoho bodu inflexního a jednoho k němu konjugovaného bodu sextaktického, které jest tedy nutno považovati za trojnásobné. Každá tato dvojbodová skupina $X_1 X_1'$ soustavy g^2_6 vede tedy ke svazku ${}_{X_1}S^3_1$ křivek K^3, které se v bodech X_1 a X'_1 oskulují, při čemž X_1 jest jejich společný inflexní bod a X'_1 společný k němu konjugovaný bod sextaktický, a ovšem vede též k jednomu svazku ${}_{X'_1}S^3_1$, kde tomu jest obráceně. Ve svazku ${}_{X_1}S^3_1$ jsou vedle obvyklých 4 křivek racionálních s dvojnými body v (B), jen dvě další křivky reducibilní, z nichž prvá se skládá z přímky $x \equiv \overline{X_1 X'_1}$ a kuželosečky $K_x{}^2$, která jí transformací T odpovídá, a druhá z inflexní tečny t bodu X_1 a analogické kuželosečky $K_t{}^2$. Při tom jest zřejmo, že kuželosečka $K_x{}^2$ prochází body X_1 a X'_1 a dotýká se v X_1 inflexní tečny t, neboť x se dotýká v X'_1 křivky K^3, a kuželosečka $K_t{}^2$ oskuluje v X'_1 křivku K^3, neboť t oskuluje tuto křivku v X_1. Oba svazky ${}_{X_1}S^3_1$ a ${}_{X'_1}S^3_1$ mají tedy společnou reducibilní křivku $[x, K_x{}^2]$.

V komplexu S^3_3 existuje ∞^2 takovýchto svazků ${}_{X_1}S_1{}^3$. Každému bodu X_1 v rovině obecně položenému přísluší jeden takový svazek. Sestrojíme jej snadno tím, že určíme obě jeho reducibilní křivky. K přímce $x \equiv \overline{X_1 X'_1}$ určíme transformací T odpovídající kuželosečku $K^2 (A_1 A_2 A_3 X_1 X'_1)$ a sestrojíme tečnu její t v bodě X_1.

Křivky $[t, K_t^2]$ a $[x, K_x^2]$ určují hledaný svazek. Libovolné přímce x roviny jsou tedy tímto způsobem přiřazeny dva takovéto svazky ${}_{x_1}S_1^3$ a ${}_{x'_1}S_1^3$, při čemž X_1 a X'_1 jest korespondenční bodový pár transformace **T** ležící na přímce x; jsou to tedy průsečíky přímky x s kuželosečkou K_x^2. Opačně však každému takovémuto svazku ${}_{x_1}S_1^3$ přísluší jen jediná přímka $x \equiv \overline{X_1X'_1}$.

Všimněme si nyní ještě svazku křivek K^3 komplexu S_3^3, které procházejí dvěma body X_1, X_2, ležícími na dvou hlavních přímkách transformace **T**, na př. body X_1 na $\overline{A_2A_3}$ a X_2 na $\overline{A_3A_1}$. Pak jest $X'_1 \equiv A_1$, $X'_2 \equiv A_2$; křivky tohoto svazku se v bodech A_1 a A_2 navzájem dotýkají, majíce tam za společné tečny přímky t_1 a t_2, které involucí **T** odpovídají paprskům $\overline{A_1X_1}$ resp. $\overline{A_2X_2}$. Associovaný bodový pár tvoří nyní body $X_{12} \equiv \overline{X_1X_2} \,.\, \overline{A_1A_2}$ a $X'_{12} \equiv A_3$. Křivky K^3 komplexu S_3^3, dotýkající se navzájem ve dvou hl. bodech skupiny (A), dotýkají se též ve zbývajícím hl. bodě třetím a protínají strany hl. trojúhelníku v bodech ležících v přímce. Každá křivka K^3 komplexu S_3^3 protíná tudíž strany hl. trojúhelníku ve třech bodech M_1, M_2, M_3, ležících v přímce, a křivky komplexu, které takovouto trojicí bodovou $M_1\,M_2\,M_3$ procházejí, tvoří svrchu poznaný svazek. Tím dáno jest tedy jednojednoznačné přiřazení mezi přímkami m roviny a svazky ${}_mS_1^3$ komplexu S_3^3. Libovolné přímce m, protínající strany hlavního trojúhelníku v bodech M_1, M_2, M_3, přísluší svazek ${}_mS_1^3$, který se skládá z těch křivek komplexu S_3^3, které procházejí body M_1, M_2, M_3 a tudíž se v bodech A_1, A_2, A_3 navzájem dotýkají. Ve svazku tom vedle čtyř racionálních křivek o dvojných bodech ve skupině (B) jsou dvě reducibilní křivky. Jest to především křivka $[m, K_m^2]$ a křivka složená ze tří hlavních přímek. Těmito dvěma křivkami jest svazek ten určen.

Všimněme si nyní křivek K^3 komplexu S_3^3, které procházejí průsečíkem hl. přímky s jednou samodružnou přímkou jdoucí protějším hl. vrcholem, na př. bodem D_1, ve kterém přímka $\overline{A_2A'_3}$ seče samodružnou přímku $b_1 \equiv \overline{A_1B_1B_3}$ [viz kap. *a*)]. Křivky K^3 tímto bodem D_1 procházející dotýkají se navzájem v bodě A_1 přímky $b_1 \equiv \overline{A_1D_1}$. Jsou tedy body A_1, D_1 na těchto křivkách, které tvoří síť $S_2^3(D_1)$, navzájem konjugovány a jejich společným tečnovým bodem jest bod D_1; bod D_1 jest tedy všem křivkám sítě společný bod inflexní a bod A_1 jest k němu konjugovaný společný bod sextaktický. Poněvadž všechny křivky této sítě protínají další dvě hl. přímky v bodech, které leží na paprscích, jdoucích bodem D_1, má inflexní bod D_1 ke všem křivkám této sítě za harmonickou poláru druhý paprsek samodružný, jdoucí bodem A_1, tedy přímku $b_2 \equiv \overline{A_1B_2B_4}$. Jsou tedy všechny křivky K^3 sítě $S_2^3\,(D_1)$ též reprodukovány lineární centrickou homologií o středu D_1 a ose b_2. Poněvadž na každé hl. přímce transformace **T** jsou dva body druhu (D), existuje v komplexu S_3^3 šest sítí $S_2^3\ (D_k)$, $k = 1, 2 \ldots 6$, z nichž každá skládá se z křivek, které mají společný inflexní bod D_k a k němu konjugovaný společný jeden bod sextaktický v bodě hlavním, a které jsou tudíž reprodukovány touž jednou lineární centrickou homologií.

Jestliže přímka m protíná dvě hl. přímky v bodech druhu (D), pak protíná i třetí hl. přímku v takovémto bodu a přímka tato jest harmonikálou jednoho samodružného bodu (B) vzhledem k trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Je-li tedy h_i harmonikála bodu B_i, pak z předchozího jest zřejmo, že svazek ${}_{h_i}S_1{}^3$ skládá se z křivek, které mají společné tři inflexní body D_k, D_l, D_m a k nim konjugované společné body sextaktické v hlavních vrcholech A_1,A_2,A_3. Křivky tohoto svazku jsou tedy reprodukovány třemi involutorními lineárními homologiemi, jichž centra jsou body D_k, D_l, D_m a jichž osy jsou ty tři samodružné přímky, které procházejí pólem B_i harmonikály h_i. V komplexu S_3^3 jsou čtyři takové významné svazky.

Vraťme se ještě k síti $S_2^3(X_1\,X'_1)$ složené z těch křivek K^3 komplexu S_3^3, které procházejí body X_1, X'_1. Vezměme mimo to v úvahu kubické inverse $T_{X_1}{}^{(3)}$ a $T_{X'_1}{}^{(3)}$, z nichž prvá má za řídicí křivku (g. místo bodů samodružných) $C_{X'_1}{}^3$ a druhá $C_{X_1}{}^3$; obě ze sítě Σ_2^3. Libovolný paprsek m, jdoucí bodem X_1, seče $C_{X_1}{}^3$ v bodovém páru $M_1\,M'_1$ transformace T, kdežto křivku $C_{X'_1}{}^3$ v bodovém páru $M\,M_0$, který leží na jedné kuželosečce svazku $S_1^2(B)$, neboť bod X_1 jest na $C_{X'_1}{}^3$ korresidualní ke čtveřině (B). Ježto body M_1, M'_1 jsou sdružené póly tohoto svazku kuželoseček, jest $(M_1\,M'_1\,M\,M_0) = -1$. Paprsek m seče tedy obě kubické křivky v bodových párech harmonicky se oddělujících. Inverse $T_{X_1}{}^{(3)}$ reprodukuje tudíž též křivku $C_{X_1}{}^3$, a opačně. Odtud již snadno plyne, že obě tyto kubické inverse $T_{X_1}{}^{(3)}$, $T_{X'_1}{}^{(3)}$ tvoří s involucí T a identitou grupu G_4.*) Síť $S_2^3(X_1\,X'_1)$ jest zřejmě ke grupě G_4 invariantní. Libovolná křivka K^3 seče křivku $C_{X_1}{}^3$ ve dvou bodových párech transformace T, tedy ve dvou bodových párech centrické involuce $g_2^1(X_1)$, a tedy ve dvou bodových párech inverse $T_{X_1}{}^{(3)}$; poněvadž mimo to seče K^3 křivku $C_{X'_1}{}^3$ ve čtyřech bodech v této inversi samodružných, jest křivka K^3 invariantní v této inversi a tedy i k celé grupě G_4. Seče tedy $C_{X'_1}{}^3$ křivku K^3 ve čtyřech bodech konjugovaných o společném tečnovém bodě X_1. Každá síť $S_2^3(X_1\,X_1')$ kubických křivek K^3 obsažená v komplexu S_3^3 jest tedy reprodukována grupou G_4 typu: 1, T, $T_{X_1}{}^{(3)}$ $T_{X'_1}{}^{(3)}$. Na křivkách této sítě vytvořuje grupa G_4 soustavu bodovou g_4^1, která jest zřejmě charakteristickou soustavou této sítě. Skupiny bodové této soustavy g_4^1 jsou složeny ze dvou bodových párů konjugovaných, které s pevným párem $X_1\,X'_1$ tvoří tři páry navzájem associované.

2. Seznali jsme, že v komplexu S_3^3 nalézají se čtyři sítě ${}_kS_2^3(A_1\,A_2\,A_3,\ B_k{}^2,\ X_1\,X'_1\,X_2\,X'_2)$, složené z křivek racionálních

*) Viz tamtéž, str. 32.

o dvojném bodě B_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Involuce T reprodukuje ovšem též racionální kubické křivky, mající v jednom hlavním bodě bod dvojný a procházející jednoduše jedním dalším bodem hlavním. Každá takováto racionální křivka musí ovšem procházeti jednoduše též dvěma samodružnými body skupiny (B) a sice vždy těmi dvěma, jichž spojnice prochází tím hl. bodem, který jest jednoduchým bodem křivky. Dospějeme tak jednoduchou úvahou k tomu, že existuje v rovině dalších 12 sítí, složených z racionálních křivek kubických, invariantních k transformaci T. Jsou to sítě typů $S^3_2(A_i^2, A_h, B_k, B_l, X_1 X'_1 X_2 X'_2)$, kde X_1 a X_2 jsou libovolné body v rovině a spojnice bodů $B_k B_l$ prochází bodem A_h. Studium vlastností těchto sítí přesahuje úkol názvem práce vymezený.

3. Výsledek týkající se lineárního komplexu S^3_3, k němuž jsme dospěli, lze podstatně zevšeobecniti.

Vezmeme-li zřetel k tomu, že neúplný (dílčí) lineární komplex eliptických křivek rovinných s charakteristickou soustavou g^2_6 lze Cremonovou transformací převésti v lineární komplex kubických křivek se třemi body báse,*) pak můžeme vysloviti větu:

Definuje-li lineární komplex $S_3{}^m$ eliptických křivek s charakteristickou soustavou g^2_6 rovinnou involuci druhého řádu J, která má toliko diskretní počet bodů samodružných (stupeň této involuce nemůže tudíž býti lichý), pak jest tato rovinná involuce J ve smyslu Kantor-Bertiniho reduktivní Cremonovou transformací na kvadratickou involuci třídy prvé. Každá síť $S_2{}^m(X_1 X'_1)$ obsažená v tomto komplexu $S_3{}^m$ skládá se potom z křivek, které jsou reprodukovány grupou 4. stupně, obsahující vedle identity a involuce J další dvě involuce 2. řádu. Tato grupa vytvořuje na křivkách sítě její charakteristickou soustavu g^1_4.

*

Sur les systèmes linéaires de cubiques planes générales invariantes par rapport à l'involution quadratique de la première classe.

(Extrait de l'article précédent.)

1. On peut classifier les cubiques planes générales, qui sont reproduites par l'involution quadratique de la première classe T, d'après le caractère de l'involution, produite par T sur la courbe. Si celle-ci est rationnelle, les cubiques C^3 forment le réseau Σ^3_2 des courbes isologues; si elle est elliptique, les cubiques K^3 forment un complexe linéaire $S_3{}^3$.

a) Le réseau Σ^3_2 des courbes isologues est complet, sa base est fournie par les points principaux (A) et par les points unis (B) de l'involution T. On peut faire correspondre, à tout point P,

*) Viz Enriques-Chisini: Courbes et fonctions algébriques, 1926, p. 281. Poznatek tento není tam sice přímo uveden, ale plyne z obecných vět, které se týkají úplných lineárních systémů křivek eliptických a jež lze v tomto případě i na dílčí systémy aplikovat.

une seule courbe C_P^3 de ce réseau, à savoir celle sur laquelle **T** produit l'involution au centre P. Si le point P parcourt une droite x, les courbes C_P^3 correspondantes passent par un même couple $X_1X'_1$ sur x et forment un faisceau ${}_x\Sigma_1^3$. Les courbes de ce faisceau se reproduisent par un groupe abélien $\mathfrak{G}_8$, lequel contient, outre l'involution **T**, trois involutions quadratiques $\mathbf{T}_i^{(2)}$ et trois inversions cubiques $\mathbf{T}_i^{(2)}$. L'involution $\mathbf{T}_i^{(2)}$ a pour points principaux les points $X_1X'_1A_i$ et échange les autres deux points A_hA_k; l'inversion cubique $\mathbf{T}_i^{(3)}$ a le centre A_i et les points $A_hA_kX_1X'_1$ pour points principaux linéaires. Les courbes directrices de ces inversions font partie du complexe S_3^3. Le faisceau ${}_{ai}\Sigma_1^3$ qui correspond de cette manière à la droite principale a_i, se compose de courbes ayant toutes A_i pour point d'inflexion commun et dont a_i est la polaire harmonique. Le réseau possède six faisceaux de courbes dégénérées; il ne possède pas de courbe rationnelle iréductible.

b) Les courbes K^3, sur lesquelles la transformation **T** produit une involution elliptique de la deuxième espèce, forment un complexe S_3^3 à trois points de base (A) et dont la série caractéristique g_6^2 se compose de trois couples de points conjugués $X_iX'_i$ $(i = 1, 2, 3)$, où $X_3 \equiv \overline{X_1X_2} \,.\, \overline{X'_1X'_2}$, $X'_3 = \overline{X_1X'_2} \,.\, \overline{X'_1X_2}$. La série g_6^2 sur la courbe K^3 contient neuf couples, composés, chacun, d'un point d'inflexion et d'un point sextactique. Tout point X_1, choisi arbitrairement dans le plan, détermine un faisceau S_1^3 composé des courbes K^3 qui sont en osculation aux points $X_1X'_1$, ayant en X_1 une inflexion et en X'_1 un point sextactique conjugué. Toutes les courbes K^3, passant par les points $X_1X'_1$, forment un réseau, dont la Jacobienne se compose de deux cubiques isologues $C_{X_1}{}^3$ et $C_{X'_1}{}^3$. Les courbes de ce réseau se reproduisent par un groupe $\mathfrak{G}_4$ contenant, outre **T**, deux inversions cubiques aux courbes directrices $C_{X_1}{}^3$ $C_{X'_1}{}^3$ et aux centres X'_1, X_1. Le complexe $S_3{}^3$ contient quatre réseaux composés de courbes rationnelles iréductibles et, en outre, une infinité double de courbes composées d'une droite et de la conique correspondante. On peut faire correspondre, à toute droite m du plan, un faisceau ${}_mS_1^3$ contenant les courbes K^3 qui passent par les points d'intersection M_i de la droite m avec les droites principales a_i et qui se touchent aux points principaux A_i. Si h est la polaire du point double B par rapport au triangle $A_1A_2A_3$, le faisceau correspondant ${}_hS_1^3$ se compose de courbes ayant, en commun, trois points d'inflexion $\mathbf{H}_i$ et les points sextactiques A_i conjugués.

2. Si un complexe linéaire S_8^n de courbes elliptiques, ayant une série caratéristique g_6^2, définit une involution plane du deuxième ordre J, possédant seulement des points unis discrets, cette involution est réductible à une involution quadratique de la première classe. Les courbes du complexe passant par le couple $X_1X'_1$ forment un réseau et se reproduisent par un groupe $\mathfrak{G}_4$, contenant, outre **J**, deux involutions réductibles à l'inversion cubique. Le groupe $\mathfrak{G}_4$ engendre la série caractéristique g'_4 de ce réseau.