O periodickém dělení diferenciálního mnohočlenu 3ho řádu dif. mnohočlenem 1ho řádu.

Napsal *Frant. Rádl.*

1. K dvěma dif. mnohočlenům

$$a(y) = a = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m y, \qquad m \geqq n$$
$$b(y) = b = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n y,$$

s nemizícím resultantem $(R \neq 0)$ možno udati jiné dva mnohočleny a_1, b_1 téhož resp. řádu

$$a_1(y_1) = a_1 = (a_0)_1 y_1{}^m + \ldots + (a_m)_1 y_1,$$
$$b_1(y_1) = b_1 = (b_0)_1 y_1{}^n + \ldots + (b_n)_1 y_1$$

takové, že řešení y rovnic a, b souvisí s řešením y_1 rovnic a_1, b_1 vztahem resp.

$$y_1 = b(y_1), \quad y_1 = a(y_1).$$

Jestliže týmž způsobem z mnohočlenů a_{-1}, b_{-1} vzniknou za téže supposice mnohočleny a, b, jest mnohočleny a, b definována oboustranná řada polynomů[1])

$$\ldots a_{-q}, b_{-q} \ldots \quad a_{-1}, b_{-1} \quad a, b \quad a_1, b_1 \ldots a_p, b_p \ldots; \qquad (1)$$

tuto vzájemnou transformaci mnohočlenů a, b můžeme nazývat všeobecným dělením mnohočlenů dif. (na rozdíl od obyč. dělení dif. mnoh.).

Jsou-li mnohočl. a_p, b_p identické s mnohočleny a, b, vzniká dělení periodické s periodou p, jímž se autor zabýval v RČA XXIII. č. 14., kde vyšetřil, že při $p = 1$ mají oba mnohočleny a, b stálé koeficienty a kde řešil též případ $p = 2$, ovšem ve specielním případu $m = 2$, $n = 1$.

V tomto článku řešena úloha, nalézti mnohočlen a 3ho řádu, který jsa všeobecně dělen mnohočlenem 1ho ř. b, dává dělení periodické s periodou 2; řešení pro vyšší řády jakož i pro periodu vyšší než 2 zdá se býti nepřístupné.

2. Použijeme při řešení této úlohy teorie zbytků a to zbytků vyššího řádu[2]) vznikajících při obyčejném dělení mnoho-

[1]) Věstník Král. spol. nauk II, 1927, Rádl: Vlastnosti resultantu při dělení mnohočlenů diff.

[2]) RČA. XXXIV, č. 12.

členů a, b; k vůli jednoduchosti předpokládejme $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Počet zbytků neodvislých jest roven řádu m mnohočl. a a jejich všeobecný tvar jest

$$(r^i s^j), \quad i + j \overline{\gtrless} m.$$

Označíme-li $b = \frac{\delta'}{\delta}$, možná dělitel $y' + by$ psát ve tvaru $\frac{(\delta y)'}{\delta}$, z čehož plyne, že můžeme místo dělitele $y' + by$ vzíti jednodušeji dělitele y' bez újmy všeobecnosti; výsledek takto obdržený bude se lišiti pouze substitucí od výsledku s dělitelem $y' + by$.

Polynom a možná nyní psát ve tvaru

$$a\,(y) = \eta' + (r^3)\,\eta + (r^2)\,y_1 + (r)\,y, \quad \eta = y'_1 - y_1 \frac{dl}{dx}(r), \; y_1 = y'$$

čili po vyloučení η, y_1 ve tvaru

$$a\,(y) = y''' + \left[(r^3) - \frac{dl}{dr}(r)\right] y'' + \left[(r^2) - (r^3)\frac{dl}{dx}(r) - \frac{d^2 l}{dx^2}(r)\right] y' + (r)\,y, \tag{2}$$

takže koeficienty mnohočlenu a jsou určeny pomocí zbytků (r), (r^2), (r^3).

Jsou tedy mnohočleny a, b řádu resp. 3ho, 1ho, o nichž platí $a_2 = a$, $b_2 = b$, definovány relacemi

$$(r)_2 = (r), \quad (r^2)_2 = (r^2), \quad (r^3)_2 = (r^3) \tag{3}$$

a na základě těchto vztahů budeme se snažiti nalézti hodnotu zbytků (r), (r^2), (r^3).

3. Koef. $(a_1)_1$ má hodnotu

$$(a_1)_1 = a_1 - \frac{dl}{dx}(r),$$

tudíž koef. $(a_1)_2$ zní

$$(a_1)_2 = a_1 - \frac{dl}{dx}(r)\,(r)_1 = a_1 - \frac{dl}{dx}(r)\,(s),$$

užijeme-li relace[3])

$$(s)_1 = (r); \tag{4}$$

poněvadž má býti koef. $(a_1)_2$ totožný s koef. a_1, platí, je-li α integrační konstanta,

$$\frac{dl}{dx}(r)\,(s) = 0, \quad (r)\,(s) = \alpha. \tag{5}$$

Podle dříve odvozených relací o zbytcích[4]) můžeme vzhledem k (3) psáti

$$(r) = (r)_2 = (r)_1 + (r^2)'_1, \quad (r)_1 = (r) + (r^2)',$$

$$(r^2)_1 = (r^2) + \frac{1}{(r)_1}\,[(r)_1\,(r^3)]';$$

---

[3]) RČA. XXXIV, č. 12 (23).
[4]) Ibid.) 27).

třetí relaci můžeme podle (4) psáti ve tvaru

$$(r^2)_1 = (r^2) + \frac{1}{(s)} [(s)\,(r^3)]'. \tag{a}$$

Spojením těchto tří relací obdržíme

$$2\,(r^2)' + \left\{\frac{1}{(s)} [(s)\,(r^3)]'\right\}' = 0. \tag{b}$$

Podle (3), (4) platí dále[4])

$$(s) = (s)_2 = (r)_1 = (r) + (r^2)'$$

čili

$$(r^2)' = (s) - (r). \tag{c}$$

Relace (b), (c) dávají dohromady

$$\left\{\frac{1}{(s)} [(s)\,(r^3)]'\right\}' + 2\,[(s) - (r)] = 0. \tag{6}$$

Užijme nyní relace (a) ve tvaru

$$(r^2)_2 = (r^2) = (r^2)_1 + \frac{1}{(r)_2} [(r)_2\,(r^3)_1]'\,;$$

dosadíme-li hodnotu za $(r^2)_1$ podle hořejšího a mimo to, dosadíme-li podle (5)

$$(r^3)_1 = (r^3) + \frac{dl}{dx} (r)_2\,(r)_1 = (r^3),$$

obdržíme

$$\frac{1}{(s)} [(s)\,(r^3)]' + \frac{1}{(r)} [(r)\,(r^3)]' = 0$$

čili

$$(r^3) \frac{dl}{dx} (r)\,(s) + 2\,(r^3)' = 0,$$

odkudž vzhledem k (5) plyne

$$(r^3) = \text{konst.} \tag{7}$$

Relace (6), (7) dávají nyní rovnici diferenciální

$$\frac{d^2l}{dx^2} (s) + 2\,[(s) - (r)] = 0, \tag{8}$$

z níž hodnotu (r) vyloučíme pomocí relace (5).

Řešení této dif. rovnice má dvě konstanty, takže podle (5), (7) obdržíme v relacích pro zbytky, tedy i v koef. polynomu a, celkem 4 konstanty. Tento polynom a zahrnuje v sobě patrně jako specielní případ též polynomy s periodou 1 čili polynomy s koef. konst.; obdržíme je patrně vhodnou volbou jedné z konstant.

Rovnici (8) rozřešil autor už dříve[2]), při čemž položeno $a = 1$ a stanoveno pouze partikulární řešení

$$(s) = -\left(\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}\right)^2, \quad (r) = -\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)^2.$$

Podle relace (c) obdržíme (r^2) a podle (7) položme specielně $(r^3) = 1$.

Dosadíme-li tyto výsledky do výrazu (2), obdržíme polynom, jenž dělen jsa polynomem y' dává řadu (1) periodickou s periodou 2 ve tvaru

$$a\,(y) = y''' + \frac{1+8e^{2x}-e^{4x}}{1-e^{4x}}\,y'' + \frac{4e^{2x}(5+3e^{4x})}{(1-e^{4x})^2}\,y' - \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)^2 y.$$

Přirozená je nyní další otázka, rovnici $a\,(y) = 0$, právě na základě její vlastnosti, že její polynom dává dělení periodické, integrovat, jako došli jsme integrace při $m = 2$[2]).

*

Sur la division périodique d'un polynôme différentiel.

(Extrait de l'article précédent.)

Deux polynômes différentiels

$$a = a(y) = a_0 y^{(m)} + \ldots + a_m y, \quad b = b(y) = b_0 y^{(n)} + \ldots + b_n y$$

peuvent être transformés en des polynomes $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_p, b_p$ de telle manière que les intégrales des équations voisines a_{i-1}, b_{i-1}; a_i, b_i soient liées par les relations $y_i = b_{i-1}(y_{i-1})$, $y_i = a_{i-1}(y_{i-1})$. Le cas où

$$a_2 \equiv a, \quad b_2 \equiv b, \quad m = 3, \quad n = 1$$

est étudié dans cet article.