Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jaroslav Friedrich

Poznámky k výkladu pohybu křivočarého a síly odstředivé. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, D23--D28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108923

JAROSLAV FRIEDRICH:

Poznámky k výkladu pohybu křivočarého a síly odstředivé.

Není snad v literatuře fysikální kapitoly větší pestrosti než je ona, která jedná o pohybu křivočarém a souvisící s ním síle odstředivé. A při tom zasluhuje pozornosti, že nejde tu snad pouze o pestrost metody výkladu a postupu, nýbrž že původ tohoto zjevu tkví z valné části v nemalé různosti názorů o vlastní podstatě předmětu. Je to okolnost sice překvapující, avšak dobře pochopitelná, uváží-li se, že se tu sahá až na samy kořeny základních pojmů v mechanice. Proto přes hojnou již příslušnou literaturu vyžadovala by tato partie v zájmu samotné vědy i dnes ještě obsáhlé monografie s důkladnou kritickou studií prací dosavadních.

Ač škola hlubší teoretické úvahy musí ponechati stranou, zasahuje nicméně ráz neujasněnosti této partie také školské její zpracování, i byl zajisté uvítán podnět kol. Ondráka v minulém ročníku Přílohy, str. 33, k projednání otázek, jež se tu vynořují. Jádrem jsou podle mého soudu tři problémy: Jak přivésti žáky k poznání potřeby dostředivé síly, jak odvoditi potřebnou její velikost a jak čeliti vzniku chybných představ o síle odstředivé. Těmto hlavně otázkám jsou určeny následující řádky.

V úvodu do této kapitoly má vodorovný a šikmý vrh zajisté své místo jako příklad křivočarého pohybu, jímž se připomene žákům jeho vznik ze dvou různorodých pohybů v úhlu a zásada vektorového sčítání rychlostí. Užíti ho však zpětně — rozumím-li správně tendenci postupu Ondrákova — k dedukci dynamické podmínky pro jakýkoli křivočarý pohyb, nezdá se mi vhodným z několika důvodů. Předně nedospívá tu žák přes podrobně založenou úvahu k poznatku podstatně novému, i míjí se tento důkaz, vedoucí zpětně pouze k věci známé, s působivostí. Zamýšlený kinematický důkaz měl by zrychlení a sílu jaksi »objeviti«. Vážnější je námitka, že konstrukce příslušného, skutečnosti odpovídajícího obrazce není bez znalosti hodnoty a směru okamžité rychlosti v závislosti na čase vlastně možna, neboť k rychlostem Δv_1 nutno zde dospívati zásadně pochodem odčítacím, a předpoklad dokazovaného není přípustný. Pro žáky bylo by tu nemalé nebezpečí nepříznivého účinku, jejž může míti známost výsledku na správnost zpětného pochodu. Vzhledem pak k zamýšlenému zevšeobecnění výsledku je závadou, že analysován tu speciální případ síly »dostředivé« konstantního směru, případ tudíž, jenž v kapitole pohybu křivočarého má postavení výjimečné. Tím vším je působivost poznatku i průkaznost důkazu zeslabena. Konečně mohlo by se po stránce metodické právem namítnouti, že k prvnímu důležitému poznatku při řešení tohoto problému dochází se pouhou dedukcí místo uznaně správnou cestou experimentálně-induktivní.

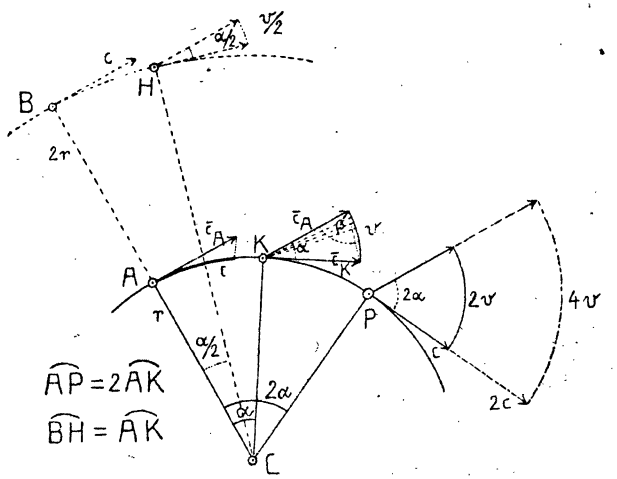
Pro tento postup není ovšem volba tak snadná. Roztočiti předmět na provázku? Zjev příliš běžný, než aby žák pocitoval potřebu pátrati po podmínce kroužení, a přece zase s málo zřejmou a neprokazatelnou silou dostředivou. Týž případ s pružinou? Pozornost odvede zjev vyvolaný silou odstředivou. Sférické kyvadlo? Stav sil není žákovi ještě znám, a kromě toho ruší zde, že síla, kterou možno demonstrovati prostým vypuštěním vychýlené kuličky, není totožna s dostředivou silou kroužení. Pro úvod hodí se podle mého soudu pouze případy s dostředivou silou danou. Užívám k tomu síly magnetické a gravitační. Vypustí-li žák ze žlábku či hadice ocelovou kuličku na stůl, zjistí pohyb přímočarý; umístí-li však s t r a n o u vyšetřené dráhy silný pól magnetický, pohyb se v tomto místě zřetelně zakřiví. Zjev poučí o »b o č n é m« rázu potřebné síly, poskytuje příklad obecného pohybu křivočarého, ale podává vzhledem ke krátké době magnetického zapůsobení současně takřka obraz účinku křivícího prvku, což pro další postup není bez prospěchu. Pohyb kruhový bude patrně vyžadovati trvalé »bočné« síly, mířící pravděpodobně k středu kruhové dráhy — odtud teprve název »dostředivé« síly —, a takovou lze snadno realisovati tahem závaží a provázku provlečeného otvorem vodorovné desky. Pro pokus přímo na stole, kde otvoru nebývá, lze užíti otvoru delšího (tabulového) pravítka přiměřeně podloženého a zatíženého a vésti jím provázek v z h ů r u ke kladce Strouhalova stativu. Pro zmenšení tření lze do otvoru vložiti porculánovou trubku s oblým okrajem. Z jakékoli posice na narýsované kružnici může žák konstatovati směr tažné síly a, uvede-li pak kuličku tangenciálním nárazem do pohybu, přichází sám k důležitému poznatku, že připravená bočná síla vytvoří pohyb právě kruhový pouze při určité rychlosti tangenciální, a že při téže (přibližně) rychlosti má vliv také poloměr, jinými slovy, že síla potřebná k udržování kruhového rovnoměrného pohybu musí míti zcela určitou velikost závislou na tangenciální rychlosti a poloměru.

Těmito dvěma případy je dostatečně připravena půda pro teorii. Kromě obecného průkazu potřeby dostředivé síly jde hlavně o onen vztah kvantitativní. Rozebírati používané metody jednotlivě vedlo by při značném jich počtu daleko; omezuji se proto pouze na souborné poznámky srovnávací.

Pokud se týče pořadí případů, není pochybnosti, že postup od rovnoměrného pohybu kruhového k libovolnému křivočarému a konečně nerovnoměrnému důvodně přihlíží k dosavadní neznalosti pojmu a měření křivosti, didaktickému požadavku postupu od zvláštního jednoduchého k obecnému[1]) i k názornosti výkladu u pohybu

[1]) H ö f l e r (Zeitschrift f. d. phys. und chem. Unterricht, 2:289) shledává v nemožnosti odlišiti při pohybu kruhovém rovnoměrném střed křivky, střed křivosti elementu dráhy a střed centrálního působení dostatečný důvod pro výjimku od oné zásady, i doporučuje vyjíti od obecného případu aspoň pro odvození p o j m u dostředivého zrychlení, v ý p o č e t pak pro-

kruhového. V úvodu nápadně opomíjí se zmínka, do jaké míry je oprávněno užití principu nezávislosti pohybů a metody jich skládání. Vždyť žák přistupuje k látce s tímto principem jako hlavní pomůckou a snadno přichází k poznání, že se tu neosvědčuje. S tím souvisí druhý, rovněž mnohdy nedosti zřetelně akcentovaný fakt, že děj je rázu diferenciálního. Okolnost ta sice ztěžuje výklad, překážka přinese však prospěch, využije-li se jí vhodně k další průpravě pro pojmy počtu infinitesimálního. Poskytuje se tu příležitost jak pro diferenciální krok za krokem, tak i pro výkon jich sumace, zásadu integrační. K výsledku vedou dráhy i rychlosti; cesta první pokládá se za názornější,[2]) mám však za to, že při nemožnosti vyznačiti zavedené dráhy jako velmi malé více ruší vadami zobrazení. Kromě



Obr. 1.

toho pro výpočet zrychlení je metoda rychlostí metodou přímou, a potřeba stanoviti smysl jejich je prospěšným cvičením.[3]) Co se pak týče rázu děje dostředivého, jest zajisté dáti přednost metodám, které jej i podstatu jeho kvantitativních jednotlivostí vyvozují, před metodami, jež jej buď jako rovnoměrně zrychlený přímo předpokládají, aneb bez tohoto předpokladu sice, ale přece jen jako výsledek početního mechanismu[4]) bez objasnění vnitřní podstaty, podávají.

vésti příležitostně, třeba i nejdříve na pohybu kruhovém rovnoměrném. K tomu bych poznamenal, že pro výpočet tento pohyb na první místo přímo patří, ježto resultující hodnota v podstatě vyplývá z vlastností kružnice.

[2]) Viz na př. úsudek Müllerův (Zt. f. d. phys. und chem. Unt. 24:211) a Ondrákův (l. c. str. 33).

[3]) Také Ondrák dává přednost metodě rychlostí, ježto vede k hlubšímu porozumění. Voss (Zt. f. d. phys. und chem. Unt. 2:18) cení si, že je prosta vyumělkovanosti.

[4]) Sem patří — nehledě ani k otázce užitých matematických prostředků — i Lietzmannova oklika přes pohyb harmonický (Zt. f. d. mat. und naturw. Unt. 53:156 a jeho »Methodik des mat. Unt.« III. 134).

Ve smyslu uvedených zásad zněla by dedukce pro kruhový pohyb rovnoměrný asi takto. Podmínkami nám neznámými udržována je hmota m v kruhovém pohybu o poloměru r a konstantní rychlosti c. (Obr. 1.) Smysl její při křivočarosti? Tvoření výrazu $\Delta s/\Delta t$ vede pro libovolné Δt početně k hodnotě c, směrově pak dostává smysl teprve při limitování $\Delta t \rightarrow 0$ a vede k směru tečny v uvažovaném bodě. Podle toho je stejně oprávněno vyznačiti hodnotu rychlosti úsečkou na tečně i obloukem na dráze.[5]) Ostatně — budiž mimochodem poznamenáno — tato dvojakost zdá se mi býti jakousi ilustrací rozdílu mnohdy s důrazem akcentovaného mezi drahou v jednotce časové a rychlostí jakožto pohybovým stavem v některém okamžiku. Již tato úvaha sama vede nutně k přesvědčení o existenci bočného pohybu, i jest blíže jej vyšetřiti. Pokus stanoviti odtud jeho směr sice selhává — vektorové odčítání drah poskytuje zde pro 1, 2, ½,... vteřiny různý výsledek —, ale vede přece k myšlence, že pravý směr příslušný k vyznačenému pohybovému stavu obdrží se asi teprve pochodem limitování. Je jím — prozatím zhruba z názoru vzato — směr kolmý, a ježto se situace pro každý další bod dráhy se změněnou tečnou opakuje, je již jasno, že princip nezávislosti dvou pohybů je tu vlastně použitelný pouze »diferenciálně«.

Proniknouti k zákonitosti pohybu musí býti možno z tvaru dráhy a stálé hodnoty rychlosti. Okolnost právě zjištěná působí při užití prvního prostředku značné obtíže; jednodušeji se utváří cesta druhá, ježto na rozdíl od první umožňuje snadno a přesně provésti potřebné vektorové sečtení všech bočných účinků během konečného času vzhledem k východisku. Pro rychlosti totiž z důvodu, že při postupném jich skládání všechny drobné rychlostní změny jsou kolmy[6]) k směru okamžité rychlosti tangenciální a že výslední rychlost trvale zůstává konstantní, představuje hledaný vektorový součet až po určitou situaci prostě kruhový oblouk v stanovený krajními vektory $\overline{c_A}$, $\overline{c_K}$ zvolené trati $\overset{\frown}{AK}$. Novou rychlost $\overline{c_K}$ lze si sice mysliti vzniklou z bezprostředně předchozí rychlosti tangenciální připojením oné velmi malé, stále se opakující kolmé rychlosti bočné, avšak, ježto ona předchozí rychlost vznikla opět podobným způsobem atd., je stejně oprávněno založiti výpočet na vzniku ekvivalentním z rychlosti počáteční $\overline{c_A}$ a integrální složky bočné v. Vyskytuje se tu tedy neobvyklé skládání rychlostí s jednou složkou křivočarou,[7]) avšak nesnázi chápání snadno lze čeliti poukazem,

[5]) V této věci bývají žáci někdy na rozpacích.

[6]) Přesně to tentokráte v obrazci plyne z $\beta \downarrow 90^0$ pro $\alpha \rightarrow 0^0$. Až po tuto kolmost bočného účinku bylo by možno i záhodno úvahu provésti doslovně stejně na obecném pohybu křivočarém rovnoměrném, závadou je však nemožnost podložiti mu nějaký případ ze zkušenosti nebo pokus.

[7]) Tato právě okolnost je znakem nutné zde formální modifikace principu nezávislosti rychlostí, ježto je aplikován na nekonečně mnoho pohybů vznikajících postupně a ve směrech spojitě se měnících.

že příslušný obrazec je vlastně součtem elementárních obrazců obvyklých.

Vše ostatní vyplývá snadno a průhledně z časového vzrůstu obrazce a geometrie kružnice. S rostoucím časem roste přímo úměrně dráhový oblouk, středový úhel obou výsečí, oblouk v, hodnota dostředivé rychlosti — pohyb dostředivý je tedy rázu rovnoměrně zrychleného.[8]) Zvýšení rychlosti tangenciální, zvětšujíc ve stejném poměru ve výseči rychlostí současně i poloměr i středový úhel, má vliv kvadratický. Naproti tomu na kružnici většího poloměru vyvíjí se ceteris paribus středový úhel v témž poměru menší, tato změna podává tedy úměrnost nepřímou.[9]) Zbývá již jen zjistiti konstantu úměrnosti — případ $c = 1$, $r = 1$ žádá si zřejmě do konce první vteřiny také jednotkové dostředivé rychlosti — a závěrečný vzorec pro potřebnou dostředivou sílu lze již sestaviti. Aplikuje se pak ihned na onen výše uvedený pokus s dostředivou silou gravitační.

V naznačeném postupu vyskytuje se sice — byť ne vysloveně — onen mnohdy odsuzovaný princip hodografu, ale podle mého soudu vchází sem cestou přirozenou, je uveden v těsnější souvislost s dějem, neoperuje se tu zbytečně onou periodou,[10]) a je ho také využito názorně. Námitky[11]) pro obtíže porozumění jsou tím vším zeslabeny. Ostatně, jestliže ve výběru, zda výklad omeziti jen na situaci v okolí elementu dráhy či založiti jej na myšlence integrálního bočného účinku, padne rozhodnutí ve snaze po názornosti nevykoupené nepřesností pro způsob druhý, musí nezbytně vyrůsti řešení rázu hodografického, neboť tvoří podstatu onoho ekvivalentního pohybu.

---

[8]) Z dráhy odvozuje tuto vlastnost aproximativně F. C. G. Müller, l. c. str. 209. Na zrychlenost usuzovati lze již z vypuklého tvaru křivky směrem k tečně.

[9]) Odděleně a názorně vyšetřují jednotlivé vlivy také na př. Huygens (Über die Centrifugalkraft, Ostwald's Klassiker Nr. 138, str. 43) a Mach (Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 8. vyd., str. 152). Je zajímavo, že Poske při reprodukci postupu Huygensova (viz níže) připravuje žáka úpravou na »moderní« mechanismus početní právě o onen názorný průhled.

[10]) Machovi (Zt. f. d. phys. und chem. Unt. 2:103) se zamlouvá, ježto v počtu není třeba zacházeti na veličiny nekonečně malé. Za to Höflerovi (l. c. str. 280), jemuž se pro Machovu formu důkazu jeví býti podstatnou (!) — což by nestačilo pro libovolný čas $r\,arc\omega t = ct$, $c\,arc\omega t = at$? — vadí při přechodu k obecnému pohybu křivočarému. Sahá proto ještě k hodografu zrychlení (zbytečně) a sestavuje rázem úměru $a : c = c : r$ domněle z pouhé znalosti pohybového stavu v jediném bodě, ač v důvodu úměry je zřetel k rovnosti period v podstatě také obsažen.

[11]) Na př. Lietzmann v »Methodik des math. Unt.« III., 143 a Höfler, l. c. str. 282. V Hahnově »Methodik des phys. Unt.« z r. 1927 není o této metodě ani zmínky (!), do Poskeovy »Didaktik des phys. Unt.« se jí pak rovněž nedostalo přijetí, ač je tam její elegance a vhodnost uznávána (str. 253), a to z důvodu, že se nehodí do Poskeova plánu jdoucího za zrychlením odstředivým.

Pro přechod k obecnému pohybu křivočarému stačí zajisté dovolati se platnosti odvozeného zákona i pro každý velmi malý oblouk kruhový a přenésti ji takto na oblouček příslušné kružnice křivosti,[12]) k níž se dojde aproximativní konstrukcí ze dvou sobě velmi blízkých normál, a jejíž proměnlivost se ukáže na př. ve vrcholech elipsy. Pohyb nerovnoměrný vysvětlí se známým způsobem pomocí rozkladu účinkující síly. (Dokončení.)

DR. VLADIMÍR RYŠAVÝ:

Poznámky k výkladu úměr a úměrnosti.

Zbytečnost úctyhodně zastaralé nauky o poměrech a úměrách byla pociťována již před sto léty. Tak na př. Thibaut ve 2. vydání své učebnice (Grundriss der reinen Mathematik, 1809) připojuje tuto nauku jen jako malý dodatek s přiléhavým oceněním: »Obschon die Lehre von den Verhältnissen zweyer gegebenen Zahlen mit der von den vier Rechnungsarten, die von den Proportionen mit besonderen Fällen der Theorie von den einfachen Gleichungen des ersten Grades, völlig dasselbe ist, ja, wegen der Einführung einer ganz neuen und höchst unbequemen Terminologie, als schädliche Lehre (!) angesehen werden muss: so ist sie doch in dem bisherigen Vortrage der mathematischen Wissenschaften so allgemein im Gebrauch, dass eine historische Kenntnis von ihr nicht wohl entbehrt werden kann.« Dr. Johannes Tropfke vysvětluje v díle »Geschichte der Elementar-Mathematik« III, 3, že pro Řeky tkvěla neocenitelná užitečnost úměr v tom, že jim svými proměnami nahrazovaly část naší nauky o rovnicích.

Přes to však i v moderních učebnicích zaujímá tato nauka dosti místa a zabere mnoho času, ale nezdůrazňuje právě to, co jest zde nového. Stejně soudí W. Lietzmann v Methodik des mathematischen Unterrichtes II., 223: »Dieses Gebiet hat ein eigenartiges Schicksal gehabt. Es wird im allgemeinen über Gebühr bevorzugt, leider aber kommt dabei der einzige neue, fruchtbare Gedanke, der zu den bekannten Gesetzen der Bruchrechnung und der Gleichungslehre hinzukommt, meist zu kurz. Eine Proportion ist eine Gleichung, die zwischen zwei Brüchen mit gleichem Werte besteht. Mit diesen Bruchgleichungen kann ich natürlich alles das vornehmen, was man mit Brüchen anstellen darf, ich kann z. B. den einen Bruch erweitern oder kürzen. Ich kann ebenso alle die Operationen vornehmen, die sich aus der Gleichungseigenschaft herleiten. — Neu ist nur die Einführung des Proportionalitätsfaktors. Gerade dieser

---

[12]) O závadách po této stránce pojednává T i m e r d i n g v díle »Die Mathematik in den phys. Lehrbüchern«, na str. 93.