Milan Mikan

Konstrukce prostorových kvadratických transformací z daných podmínek

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 70--73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108916

Konstrukce prostorových kvadratických transformací z daných podmínek.

Napsal Dr. *Milan Mikan.*

Jsou-li dány hlavní body O_1, O_2 Cremonovy příbuznosti (22) prostorů Σ_1 Σ_2 a 4 družiny ${}^1A_1\,{}^1A_2$, ${}^2A_1\,{}^2A_2$, ${}^3A_1\,{}^3A_2$, ${}^4A_1\,{}^4A_2$, je tím stanovena kollineace prostorových svazků (O_1) koll. (O_2) a prostorová kubika k^3 jakožto geometrické místo průsečíků kollineárních paprsků. Jsou-li (při soumístnosti Σ_1, Σ_2) ony 4 družiny nahraženy 4^{mi} ze 6^{ti} koincidencí ${}_i^{1/4}\,{}^iA_1 \equiv {}^iA_2$, prochází jimi k^3. Útvary tyto značí v obou případech 18 podmínek. Je-li dán hlavní kužel n. př. K_1, je tím stanoven již také kužel K_2, což jest 5 podmínek a dalšími třemi n. př. hlavní rovinou $\varkappa_1$ je proto dán konečný počet transformací. Pokud jsou již hlavní kužele dány, neliší se v podstatě úvahy, jsou-li dány družiny nebo stejný počet koincidencí; nechať ${}^iA$ značí tudíž v následujících úvahách buďto družinu nebo koincidenci.

Dáno-li: O_1, O_2, ${}^{1/4}\,{}^iA$, K_1, $\varkappa_1$, přísluší rovině ${}^1\alpha_1 \equiv ({}^1A_1\,{}^3A_1\,{}^4A_1)$ kvadrika ${}^1\alpha_2$ a rovině ${}^2\alpha_1 \equiv ({}^2A_1\,{}^3A_1\,{}^4A_1)$ kvadrika ${}^2\alpha_2$; označme $({}^1\alpha_1\,\varkappa_1) \equiv {}^1a$, $({}^2\alpha_1\,\varkappa_1) \equiv {}^2a$, $({}^1a\,O_1) \equiv {}^1\beta_1$, $({}^2a\,O_1) \equiv {}^2\beta_1$ a sestrojme ${}^1\beta_{2(O_2)}$ koll. ${}^1\beta_{1(O_1)}$, ${}^2\beta_{2(O_2)}$ koll. ${}^2\beta_{1(O_1)}$. Promítněme všechny útvary prostoru Σ_2 z bodu O_2 do libovolné roviny ϑ a označme na př. průmět bodu ${}^1A_2 \ldots {}^1A_2'$ atd., průsek $(\mathrm{K}_2 \,.\, \vartheta) \equiv K'_2$. ${}^1\beta_2$, ${}^2\beta_2$ protínají K_2 po dvou přímkách, jejichž stopy na rovině ϑ jsou resp. ${}^1M'\,{}^1N'$, ${}^2M'\,{}^2N'$, $\overline{{}^1M'\,{}^1N'} \equiv {}^1b'$, $\overline{{}^2M'\,{}^2N'} \equiv {}^2b'$. Tyto spojnice protínají se na $\overline{{}^3A_2'\,{}^4A'_2}$, v bodě ${}^{34}B'$, kdež $\overline{{}^{34}B'\,O_2}$ koll. $\overline{{}^{34}AO_1}$, je-li ${}^{34}A \equiv (\varkappa_1 \,.\, \overline{{}^3A\,{}^4A})$. Na př. bod ${}^1M'$ je průmětem jistého bodu ${}^1M$ v $({}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2)$, ${}^1b'$ přímky ${}^1b$ v $({}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2)$ atd.

. ${}^1\beta_2$, ${}^2\beta_2$ jsou tečnými rovinami kvadrik resp. ${}^1\alpha_2$, ${}^2\alpha_2$ v O_2, ${}^1L$ budiž průsek ${}^1\alpha_2 \,.\, ({}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2)$ a prochází body ${}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2\,{}^1M\,{}^1N$ ${}^2L$ průsek ${}^2\alpha_2 \,.\, ({}^2A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2)$ a prochází body ${}^2A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2\,{}^2M\,{}^2N$; ${}^1L'$, ${}^2L'$ jsou jejich průměty. ${}^1L$, ${}^2L$ protínají K_2 každá ještě po dvou bodech resp. ${}^1P\,{}^1Q$, ${}^2P\,{}^2Q$, jichž spojnice $\overline{{}^1P\,{}^1Q} \equiv {}^1c$, $\overline{{}^2P\,{}^2Q} \equiv {}^2c$ protínají se na $\overline{{}^3A\,{}^4A}$ v bodě ${}^{34}C$, což dokážeme takto:

Kuželosečky ${}^1L'$ a $({}^3A'\,{}^4A' + {}^1M'\,{}^1N')$ určují svazek ${}^1S$, z jehož základních bodů ${}^1M'\,{}^1N'$ leží na K_2', pročež kuželosečky svazku ${}^1S$ protínají K_2' v družinách involuce o středu ${}^{34}C'$ na ${}^3A_2'\,{}^4A_2'$, k nimž náleží i družina ${}^1P'\,{}^1Q'$. Totéž platí o analogickém svazku ${}^2S$ a o středu příslušné involuce ${}^{34}C''$. Body ${}^3A_2'\,{}^4A_2'\,{}^2P'\,{}^2Q'$ určují svazek kuželoseček, k němuž náleží ${}^2L'$, protínající K_2'

v družině ${}^2M'\,{}^2N'$ involuce o středu ${}^{34}B'$, obsahující i družinu ${}^1M'\,{}^1N'$, t. j. 6 bodů ${}^1N'$, ${}^1M'$, ${}^3A_2'$, ${}^4A_2'$, ${}^2P'$, ${}^2Q'$ leží na téže kuželosečce, obsažené také ve svazku ${}^1S$, pročež $\overline{{}^2P'\,{}^2Q'}$ prochází též bodem ${}^{34}C' \equiv {}^{34}C^{I'}$, průmětem bodu ${}^{34}C$ na $\overline{{}^3A\,{}^4A}$; ${}^1c$, ${}^2c$ leží v téže rovině $\varkappa_2$ jakožto hlavní v Σ_2.

O_1, O_2, ${}^{1}/{}^{4i}A$, K_1, $\varkappa_1$ *stanoví jednoznačně transformaci* $(\Sigma_1\,\Sigma_2)$.

Označme průsečíky $({}^3A_2'\,{}^4A_2' \,.\, K'_2) \equiv {}^{34}D, {}^{34}E$. Bod ${}^{34}C'$ (a tím i ${}^{34}C$) závisí toliko na kuželosečce K_2' a na poloze bodů ${}^3A_2'$, ${}^4A_2'$, ${}^{34}B'$, nikoli však na poloze paprsků ${}^1b'$, ${}^2b'$. Posouvá-li se ${}^{34}B'$ po ${}^2A_2'$, ${}^4A_2'$ dostáváme projektivitu řad $({}^{34}B', \ldots) \overline{\wedge} ({}^{34}C', \ldots)$ kteráž je involucí; označme ji ${}^{34}I$. Není třeba, dán-li ${}^{34}B'$, konstruovati kuželosečku n. př. ${}^1L$, neboť na jejím tvaru ${}^{34}C'$ nezávisí. Stačí, prochází-li tato kuželosečka body ${}^3A_2'\,{}^4A_2'$ a protíná-li K_2' ve čtyřech bodech tak, že spojnice dvou z nich prochází bodem ${}^{34}B'$; spojnice druhých dvou prochází bodem ${}^{34}C'$. Veďme tudíž bodem ${}^{34}B'$ libovolně sečnu ${}^1N'\,{}^1M'$ a proložme body ${}^1N'\,{}^1M'\,{}^3A_2'\,{}^4A_2'$ jednu z degenerovaných kuželoseček, na př. $({}^1N'\,{}^3A_2' + {}^1M'\,{}^4A_2')$. Tato protíná K_2' v bodech ${}^1P'\,{}^1Q'$, jichž spojnice stanoví ${}^{34}C'$. V involuci ${}^{34}I$ jsou obsaženy též družiny ${}^3A_2'$, ${}^4A_2'$; ${}^{34}D'$, ${}^{34}E'$.

Budiž na př. $\vartheta \equiv ({}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2)$, $K_2' \equiv (\mathrm{K}_2 \,.\, \vartheta)$. Na stranách $\Delta\,{}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2$ leží body ${}^{34}B, {}^{13}B, {}^{14}B$. Analogické body bychom dostali na ostatních hranách čtyřstěnu ${}^1A_2\,{}^2A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2$, kdyby ϑ byla některou jinou jeho stěnou. Skupiny $O_1\,{}^1A_1\,{}^2A_1\,{}^3A_1\,{}^4A_1$, $O_2\,{}^1A_2\,{}^2A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2$ stanoví prostorovou kollineaci, ve které jsou body na př. ${}^{34}A$, ${}^{34}B$ sdruženy, atd. Proto, poněvadž všech 6 bodů ${}^{ik}A$ leží v téže rovině $\varkappa_1$, leží též všech 6 bodů ${}^{ik}B$ v téže rovině $\varkappa^I_2$. V rovině na př. ϑ vznikají na stranách $\Delta\,{}^1A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2$ tři involuce ${}^{34}I, {}^{13}I, {}^{14}I$, v nichž vrcholy ${}^{1}/{}^{3\,i}A_2$ jsou sdruženy. Zvolme na př. ${}^{34}B$ v průsečíku $\overline{{}^3A_2\,{}^4A_2} \,.\, \overline{{}^{13}E\,{}^{14}E}$. Potom příslušný bod ${}^{34}C$ je v průsečíku se spojnicí $\overline{{}^{13}D\,{}^{14}D}$. Proto také bodům ${}^{34}B$, ${}^{13}E$, ${}^{14}E$ na jedné přímce přísluší ${}^{34}C$, ${}^{13}D$, ${}^{14}D$ též na téže přímce, t. j. *involuce* ${}^{34}I$, ${}^{13}I$, ${}^{14}I$ *jsou vázané.**) Obdobné involuce vzniknou v ostatních stěnách čtyřstěnu. Proto na př. ${}^{34}C, {}^{13}C, {}^{14}C$ leží na téže přímce, leží-li ${}^{34}B, {}^{13}B, {}^{14}B$ na téže přímce a leží-li 6 bodů ${}^1{}_i/{}_k{}^{4\,ik}B$ v téže rovině $\varkappa_2^I$, *leží 6 bodů* ${}^1{}_i/{}_k{}^{4\,ik}C$ *v téže rovině* $\varkappa_2$: ${}^1{}_i/{}_k{}^{4\,ik}A$ jsou rovnocenné pro konstrukci na str. 1, 2.

Prochází-li $\varkappa_1$ jedním z bodů ${}^iA_1$, prochází $\varkappa_2^I$ bodem ${}^iA_2$ a $\varkappa_2$ je jeho protější stěnou ve čtyřstěnu ${}^1A_2\,{}^2A_2\,{}^3A_2\,{}^4A_2$. Všem ∞^2 rovinám $\varkappa_1$ svazku $({}^iA_1)$ odpovídá tato stěna jakožto $\varkappa_2$. Prochází-li $\varkappa_1$ jednou hranou prvního čtyřstěnu, prochází $\varkappa_2$ hranou mimoběžnou k příslušné hraně druhého tetraedru. Tentokráte každé rovině $\varkappa_1$ přísluší každá z rovin $\varkappa_2$ a je opět ∞^2 přidružení. Konečně, prochází-li $\varkappa_1$ třemi vrcholy prvého čtyřstěnu, prochází $\varkappa_2$ protějším vrcholem druhého. Pokaždé však transformace

*) R. Sturm: Die Lehre von den geom. Verwandtschaften, I., str. 101—105.

degeneruje, poněvadž bodu ${}^cA_1$ přísluší kromě ${}^iA_2$ též O_2, tudíž celý paprsek $\overline{{}^iA_2O_2}$.

Tvoří-li roviny $\varkappa_1$ svazek o obecně položené ose p, tvoří $\varkappa_2^I$ svazek o ose p^I a protínají strany $\Delta\,{}^1A_2{}^3A_2{}^4A_2$ v perspektivních řadách ${}^{13}B, \dots \overline{\wedge}\,{}^{14}B, \dots \overline{\wedge}\,{}^{34}B, \dots$. Řady bodů ${}^{13}c, \dots {}^{14}c, \dots {}^{34}c, \dots$ jsou projektivní. Obecně nejsou perspektivní, neboť kdyby na př. ${}^1A_2$ byl samodružný jakožto ${}^{13}C$, ${}^{14}C$, procházela by rovina $\varkappa_2^I$ přímkou $\overline{{}^3A_2{}^4A_2}$; t. j. toliko, protíná-li p ${}^3A_1{}^4A_1$. Stopy rovin $\varkappa_2$ obalují tudíž v rovině $({}^1A_2{}^3A_2{}^4A_2)$ kuželosečku R^{134}, dotýkající se stran $\Delta\,{}^1A_2{}^3A_2{}^4A_2$. Dotyčný bod se stranou na př. $\overline{{}^3A^4A}$ je v involuci ${}^{34}I$ sdružený s průsečíkem s rovinou $(p^I\,.\,{}^1A_2)$. V rovině na př. $({}^2A_2{}^3A_2{}^4A_2)$ dostáváme obdobnou kuželosečku R^{234}, jejíž dotyčný bod s ${}^3A^4A$ je v ${}^{34}I$ přidružen průsečíku s rovinou $(q\,.\,{}^2A_2)$. Dotyčné body obou kuželoseček by splývaly, kdyby p^I protínala hranu $\overline{{}^1A_2{}^2A_2}$, t. j. p hranu $\overline{{}^1A_1{}^2A_1}$; obecně se od sebe liší. Roviny $\varkappa_2$, příslušné rovinám $\varkappa_1$ svazku o ose p dotýkají se čtyř kuželoseček; stačí, uvažujeme-li dvě z nich: *Roviny $\varkappa_2$ příslušné rovinám $\varkappa_1$ svazku o ose p obalují rozvinutelnou plochu 3ti třídy.*

∞^3 transformací daných podmínkami O_1, O_2, ${}^{1/4}\,{}^iA$, K_1 nazývejme čtyřprvkovou soustavou. Vyměníme-li prvek ${}^4A$ za prvek ${}^5A$, dostáváme druhou soustavu čtařprvkovou. Rovinám $\varkappa_1$ svazku o ose p přísluší v prvé soustavě torsus 3tí třídy ${}^4\Gamma^3$ rovin $\varkappa_2$, v druhé soustavě obdobný torsus ${}^5\Gamma^3$, Každá společná tečná rovina obou ploch jakožto $\varkappa_1$ přísluší v obou soustavách téže rovině svazku (p) jakožto $\varkappa_2$. Tyto společné tečné roviny jsou — poněvadž oba torsy obalují touž kuželosečku R^{123} — celkem 4. Jim přísluší 4 roviny $\varkappa_1$ svazku (p).

Roviny $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ pětiprvkové soustavy dané útvary O_1, O_2, ${}^{1/5}\,{}^iA$, K *obalují dvě (nerozvinutelné) plochy 4té třídy Π_1^4, Π_2^4 a jsou jedno-jednoznačně přidruženy.*

Protíná-li p na př. $\overline{{}^1A_1{}^2A_1}$, protíná p^I $\overline{{}^1A_2{}^2A_2}$ a kuželosečka vyťatá stopami rovin $\varkappa_2$ soustavy čtyřprvkové v rovině $({}^1A_2{}^2A_2{}^3A_2)$ degeneruje ve svazek paprskový (kromě ${}^3A_2$). Roviny $\varkappa_2$ soustavy ${}^{1/4}\,{}^iA$ obalují kužel kvadratický, obdobně i při soustavě $({}^1A{}^2A{}^3A{}^5A)$, tyto dva kužele mají kromě roviny $({}^1A_2{}^2A_2{}^3A_2)$ společné 3 roviny tečné a bodem M (sdruženým v ${}^{12}I$ k bodu $(p^I\,.\,\overline{{}^1A_2{}^2A_2}))$ procházejí 3 roviny $\varkappa_2$, jimž ve svazku (p) příslušejí 3 roviny $\varkappa_1$. Tyto 3 dvojice $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ vyhovují pětiprvkové soustavě ${}^{1/5}\,{}^iA$, kdežto rovině ${}^1A_2{}^2A_2{}^3A_2$ jakožto $\varkappa_2$ přísluší jednak rovina $(p\,{}^4A_1)$, jednak $(p\,{}^5A_1)$ v obou soustavách čtyřprvkových, Čtvrtá tečná rovina plochy π_1^4 přímkou p jakožto rovina $\varkappa_1$ je $(p\,{}^1A_1{}^2A_1)$, jíž přísluší jakožto $\varkappa_2$ rovina $({}^3A_2{}^4A_2{}^5A_2)$. Proto hrana ${}^1A_1{}^2A_1$ je jednoduchou površkou plochy π_1^4, neboť každá rovina $\varkappa_1$, procházející touto hranou, je jednoduchou tečnou rovinou.

V obou prostorech 10 spojnic prvků ${}^{1/5}\,{}^iA$ jsou jednoduchými površkami ploch resp. Π_1^4, Π_2^4.

Leží-li přímka p v rovině $({}^1A_1{}^2A_1{}^3A_1)$, leží p^I v $({}^1A_2{}^2A_2{}^3A_2)$, roviny $\varkappa_2$ tvoří v obou čtyřprvkových soustavách dva navzájem projektivní svazky, v nichž příslušné roviny $\varkappa_2$ odpovídají téže rovině $\varkappa_1$. Přímkou p procházejí 2 tečné roviny plochy $\Pi_1{}^4$ (obdobně pro $\Pi_2{}^4$), kromě (dvojnásobné) roviny $({}^1A_1{}^2A_1{}^3A_1)$.

V obou prostorech 10 rovin určených vždy třemi z prvků $^{1}/^{5}{}^iA$ *jsou dvojnásobnými tečnými rovinami ploch* $\Pi_1{}^4$, $\Pi_2{}^4$.

Vyměníme-li prvek ${}^5A$ za ${}^6A$, dostáváme obdobnou soustavu pětiprvkovou a obě mají vždy čtyřstěn $^{1}/^{4}{}^iA$ společný. K oběma jsou příslušné 2 plochy $\Pi_1{}^4$ a dvě $\Pi_2{}^4$, z nichž každé dvě mají vždy 6 hran společného čtyřstěnu. Zbývá torsus 10té třídy $\Gamma_1{}^{10}$, resp. $\Gamma_2{}^{10}$. Na úplném „proniku"*) obou ploch je každá stěna společného čtyřstěnu čtyřnásobnou, na části „proniku" tvořené 6ti hranami čtyřstěnu trojnásobnou, proto na torsu je jednoduchou.

Hlavní roviny šestiprvkového systému $^{1}/^{6}{}^iA$ *obalují torsy resp.* $\Gamma_1{}^{10}$, $\Gamma_2{}^{10}$, *z nichž každý má 20 jednoduchých rovin tečných, stanovených vždy třemi z prvků.* Tečné roviny obou torsů jsou jedno-jednoznačně přidruženy.

Připojme družinu B_1B_2 jakožto 7mou podmínku: Dostaneme celkem po třech plochách $\Pi_1{}^4$ resp. $\Pi_2{}^4$. Vždy 3 plochy mají celkem 64 tečných rovin společných, z nichž v každé stěně společného čtyřstěnu $(^{1}/^{4}{}^iA)$ je $2 \cdot 2 \cdot 2$ rovin ztotožněno, celkem $4 \cdot 8 = 32$. Kromě toho jsou roviny promítající vždy 6 hran čtyřstěnu z bodů resp. B_1, B_2 na prvních dvou plochách jednoduchými, na třetí ploše dvojnásobnými, celkem $2 \cdot 6 = 12$. Zbývá 20 rovin, *6 koincidencí a 1 družina, nebo 7 družin* (*kromě* O_1, O_2, K) *stanoví 20 transformací.*

(Nebo: Torsus $\Gamma_1{}^{10}$ má s třetí plochou $\Pi_1{}^4$ společné 4 roviny, jež jsou na něm jednoduchými, na $\Pi_1{}^4$ dvojnásobnými, celkem 8, 12 rovin promítajících z bodů resp. ${}^5A$, ${}^6A$ 6 hran čtyřstěnu $(^{1}/^{4}{}^iA)$ jsou jednoduchými na $\Gamma_1{}^{10}$ i na $\Pi_1{}^4$. Zbývá $40 - 8 - 12 = 20$ rovin).

*

La construction des transformations quadratiques de l'espace, satisfaisant à des conditions données.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donnés: les deux points principaux, quatre couples de points ou quatre points unis, les cônes principaux et un plan principal, la transformation de Cremona, quadratique dans les deux sens, de l'espace est déterminée d'une manière univoque. Les plans principaux de toutes les transformations quadratiques, données par les points principaux, par cinq couples de points ou par autant de points unis et par les cônes principaux, enveloppent deux surfaces de la 4e classe; ces plans enveloppent deux torses de la 10e classe, si six couples (ou six points unis) sont donnés; enfin, sept couples déterminent 20 transformations.

*) Ve smyslu duálním.