V. Lenz

O jistém vztahu mezi agregátními a selekčními tabulkami úmrtnosti invalidů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 56--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108915

O jistém vztahu mezi agregátními a selekčními tabulkami úmrtnosti invalidů.

Dr. V. *Lenz.*

Řád aktivnosti jest posloupnost čísel l_x^{aa} udávajících počet osob, které z původního počtu aktivních osob $l_{x_0}^{aa}$ nejnižšího věku x_0 jsou ve věku x ještě na živu a aktivní. Jest tedy řád aktivnosti závislý na takových zjevech, které jsou příčinou změny uzavřeného souhrnu osob definovaného daným způsobem. Počet osob aktivních se zmenšuje následkem umírání, invalidisací, zvětšuje se však tím, že některé z osob, které z původního souhrnu stávají se invalidními, později znovunabytím výdělečné schopnosti stávají se aktivními, tedy vracejí se opět do souhrnu osob aktivních následkem reaktivisace.

V následujících úvahách nebudeme bráti zřetel na reaktivování invalidů a použijeme obvyklých indirektních metod k výpočtu řádu aktivnosti, které vycházejí z předpokladu, že souhrn osob vůbec skládá se ze souhrnu osob aktivních a osob invalidních, což jest vyjádřeno vztahem

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii}, \tag{1}$$

kde l_x jest dáno tabulkou úmrtnosti celkového souhrnu osob vůbec; l_x^{aa} jsou příslušná čísla shora uvedeného řádu aktivnosti; l_x^{ii} udává počet osob, které z původního počtu osob $l_{x_0}^{aa}$ nejnižšího věku x_0 jsou ve věku x ještě na živu a invalidní.

Při výpočtech vycházíme od toho nejnižšího věku x_0, v němž všechny osoby l_{x_0} jsou aktivní, takže

$$l_{x_0}^{aa} = l_{x_0}. \tag{2}$$

Při indirektních metodách výpočtu řádu aktivnosti předpokládáme, že z pozorování jsou známá čísla invalidisace osob aktivních vyjádřena ročními měrami invalidisace, i_x a roční míry celkové výluky invalidů $\sigma_{[x]+k}^{i}$.

Podle množství pozorovaného materiálu možno získati buď selekční tabulky čísel výluky invalidů $\sigma_{[x]+k}^{i}$, tříděné také podle doby trvání požitku důchodu invalidního jako jsou na příklad rozsáhlé tabulky ze zkušeností německého invalidního pojištění,[1]) nebo agregátní tabulky σ^i_x bez ohledu na dobu trvání požitku důchodu. V dalším naznačen postup stanovení řádu aktivnosti jednou při agregátních a jednou při selekčních tabulkách čísel invalidů.

Předpokládáme-li, že jak případy invalidity, tak případy výluky z invalidity jsou rozděleny rovnoměrně během roku, pak počet osob invalidních je, podle známých vzorců přibližně

$$l_{x_0+k} = l^{aa}_{x_0+k} + l^{aa}_{x_0+k-1}\, i_{x_0+k-1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{x_0+k-1}}{2}\right) + l^{ii}_{x_0+k-1}\left(1 - \sigma^i_{x_0+k-1}\right) \tag{3}$$

což značí, že ve věku $x_0 + k$ ze všech osob aktivních a invalidních úhrnného počtu l_{x_0+k} jest aktivních $l^{aa}_{x_0+k}$, dále invalidů, kteří se stali invalidními ve věku $x_0 + k - 1$ a dožili se věku $x_0 + k$, jest $l^{aa}_{x_0+k-1}\, i_{x_0+k-1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{x_0+k-1}}{2}\right)$ a invalidů, kteří se stali invalidními ve věku od x_0 do $x_0 + k - 1$ a dožili se věku $x_0 + k$, jest $l^{ii}_{x_0+k-1}\left(1 - \sigma^i_{x_0+k-1}\right)$.

Použijeme-li selekčních tabulek výluky invalidů bude podobně

$$l_{x_0+1} = l^{aa}_{x_0+1} + l^{aa}_{x_0}\, i_{x_0}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0]}}{2}\right) \tag{4}$$

$$l_{x_0+2} = l^{aa}_{x_0+2} + l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+1]}}{2}\right) + l^{aa}_{x_0}\, i_{x_0}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0]}}{2}\right)\left(1 + \sigma^i_{[x_0]+1}\right)$$

označíme-li

$$1 - \sigma^i_{[x_0+k]} = p^i_{[x_0+k],\ [x_0+k]+1}$$

a

$$\left(1 - \sigma^i_{[x_0+k]}\right)\left(1 - \sigma^i_{[x_0+k]+1}\right) \ldots \left(1 - \sigma^i_{[x_0+k]+m}\right) = p^i_{[x_0+k],\ [x_0+k]+m+1}$$

možno psáti obecně

$$l_{x_0+k} = l^{aa}_{x_0+k} + l^{aa}_{x_0+k-1}\, i_{x_0+k-1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+k-1]}}{2}\right) + \tag{5}$$
$$+ \sum_{2}^{k} {}_m\, l^{aa}_{x_0+k-m}\, i_{x_0+k-m}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+k-m]}}{2}\right) p^i_{[x_0+k-m]+1,\ [x_0+k-m]+m}.$$

Jak jednoduchým způsobem možno stanoviti hodnoty agregátní tabulky σ^i_x podle výpočtů provedených na podkladě selekční tabulky $\sigma^i_{[x_0]+k}$ seznáme z porovnání rovnic (3) a (5).

Buďtež pro oba výpočty tytéž tabulky l_x a i_x a mějme na-

[1]) Das Ausscheiden der Invalidenrentenempfänger der Jahre 1891 bis 1899 aus dem Rentengenuss. Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamts 1906, 1. Beiheft.

počtený řád aktivnosti l_x^{aa} a řád invalidnosti l_x^{ii} pomocí selekční tabulky $\sigma^i_{[x_0]+k}$. Pak je tím agregátní tabulka σ^i_x dána jednoznačně, neboť v obou případech jedná se o tytéž souhrny osob aktivních a invalidních čili, označujeme-li hvězdičkou hodnoty napočtené pomocí agregátní tabulky, a bez tohoto označení hodnoty napočtené pomocí tabulky selekční, že platí pro každé k

$$*l^{aa}_{x_0+k} = l^{aa}_{x_0+k}, \quad *l^{ii}_{x_0+k} = l^{ii}_{x_0+k}. \tag{6}$$

Pro $k = 0$ jest

$$*l^{ii}_{x_0} = l^{ii}_{x_0} = 0$$

a současně

$$\sigma^i_{x_0} = \sigma^i_{[x_0]}.$$

Pro $k = 1$ jest

$$*l^{aa}_{x_0}\, i_{x_0}\left(1 - \frac{\sigma^i_{x_0}}{2}\right) = l^{aa}_{x_0}\, i_{x_0}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0]}}{2}\right)$$

pro $k = 2$ jest podle rovnic (3) a (5)

$$*l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{x_0+1}}{2}\right) + *l^{ii}_{x_0+1}\left(1 - \sigma^i_{x_0+1}\right) =$$

$$= l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+1]}}{2}\right) + l^{aa}_{x_0}\, i_{x_0}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0]}}{2}\right)\left(1 - \sigma^i_{[x_0]+1}\right),$$

což možno psáti ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\, *l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1} + \left(\tfrac{1}{2}\, *l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1} + *l^{ii}_{x_0+1}\right)\left(1 - \sigma^i_{x_0+1}\right) = l^{ii}_{2+x},$$

z čehož

$$1 - \sigma^i_{x_0+1} = \frac{l^{ii}_{x_0+2} - \frac{1}{2} l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1}}{*l^{ii}_{x_0+1} + \frac{1}{2} * l^{aa}_{x_0+1}\, i_{x_0+1}}$$

a obecně pro $(k+1)$-ní rok pozorování jest

$$*l^{aa}_{x_0+k}\, i_{x_0+k}\left(1 - \frac{\sigma^i_{x_0+k}}{2}\right) + *l^{ii}_{x_0+k}\left(1 - \sigma^i_{x_0+k}\right) =$$

$$= l^{aa}_{x_0+k}\, i_{x_0+k}\left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+k]}}{2}\right) + \sum_2^k {}_m l^{aa}_{x_0+k-m+1}\, i_{x_0+k-m+1} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{\sigma^i_{[x_0+k-m+1]}}{2}\right) p^i_{[x_0+k-m+1]+1,\ [x_0+k-m+1]+m}$$

čili

$$\tfrac{1}{2}\, *l^{aa}_{x_0+k}\, i_{x_0+k} + \left(\tfrac{1}{2}\, *l^{aa}_{x_0+k}\, i_{x_0+k} + *l^{ii}_{x_0+k}\right)\left(1 - \sigma^i_{x_0+k}\right) = l^{ii}_{x_0+k+1}$$

z čehož

$$1-\sigma^i_{x_0+k}=\frac{l^{ii}_{x_0+k+1}-\frac{1}{2}\,{}^*l^{aa}_{x_0+k}\,i_{x_0+k}}{{}^*l^{ii}_{x_0+k}+\frac{1}{2}\,l^{aa}_{x_0+k}\,i_{x_0+k}}.$$

Píšeme-li x místo x_0+k, bude podle (6)

$$1-\sigma^i_x=\frac{l^{ii}_{x+1}-\frac{1}{2}\,l^{aa}_x\,i_x}{l^{ii}_x+\frac{1}{2}\,l^{aa}_x\,i_x}. \qquad (7)$$

Tento jednoduchý vztah dává možnost z dané tabulky určitého souhrnu žijících osob vůbec l_x, tabulky invalidnosti i_x a selekční tabulky úmrtnosti invalidů $\sigma^i_{[x]+k}$ sestrojiti agregátní tabulku úmrtnosti invalidů σ^i_x pro tento souhrn.

*

Sur une correlation entre les tables agrégées et les tables sélectives de mortalité des invalides.

(Extrait de l'article précédent.)

En calculant l'ordre d'activité l^{aa}_x selon les méthodes indirectes á l'aide des tableaux de mortalité de toutes les personnes l_x, des tableaux d'invalidité i_x et des tableaux d'extinction d'invalidité $\sigma^i_{[x]+k}$, sans tenir compte de la réactivisation — une fois d'aprés les tables agrégées et l'autre fois d'après les tables d'extinction sélective de l'invalidité, nous arrivons aux expréssions données par les formules (3) et (5).

En comparant ces résultats, on peut donner la preuve par induction complète que la proportion (7) a lieu, laquelle nous met en mesure de construire une table agrégée de mortalité des invalides σ^i_x pour ce total, en se servant d'une table d'un total donné de personnes vivantes l_x, du tableau d'invalidité i_x et du tableau de sélection de la mortalité des invalides $\sigma^i_{[x]+k}$.