$\overline{bb^*} \equiv az - cx = 0$, $\overline{cc^*} \equiv bx - ay = 0$. Znásobíme-li prvou z těchto tří rovnic hodnotou a, druhou b, třetí c, jest součet takto znásobených rovnic totožně roven nulle, a tedy přímky ony mají společný průsečík k. Souřadnice bodu tohoto vypočítáme z rovnic posledních a z rovnice $ax + by + cz = 2\Delta$; obdržíme tím

$$x = \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2},\ y = \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2},\ z = \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ježto jest $x : y : z = a : b : c$, t. j. *vzdálenosti bodu k od stran základního trojúhelníka jsou úměrny délkám těchto stran*, poznáváme bod k jakožto *bod Lemoineův* či *Grebeův* v trojúhelníku abc, o kterémž význačném bodě jsme v tomto ročníku „Časopisu“ našeho na str. 27. promluvili. Dodatečně připomínáme, že pojednání Grebeovo o tomto bodě nalezá se v VII. díle archivu Grunertova.

Když článek tento již vysázen byl, dověděl se pisatel jeho z letošního únorového čísla časopisu *Mathesis*, že o tvaru zde vyšetřovaném pojednáno bylo v I. ročníku onoho časopisu na str. 93. a ve IV. díle *Nouvelle correspondance mathématique*, str. 142., kterých však si opatřiti nemohl, aby je s prací svou srovnal. Větu vyslovenou ku konci 3. odstavce uveřejnil ve formě úlohy *Fuhrmann* v Hoffmannově *„Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht,“* XIII. Jahrg. p. 365.

O Steinerových parabolách souosých osnov konfokálních kuželoseček.

Napsal

Václav Tlučhoř v Jičíně.

Značí-li o, o_1 ohniska a m střed osnovy O konfokálních kuželoseček, obalují, jak známo, veškeré přímky, které ku jednotlivým prvkům v rovině osnovy ležícího svazku paprsků s libovolným středem s, vzhledem k této osnově sdružené jsou, tak zvanou Steiner-ovu parabolu P_s, která se os A, B osnovy O, jakož i os N, N_1 involučního svazku s — jakožto zvláštních poloh sdružených přímek osnovy — dotýká a tudíž spojnici $\overline{ms}$ za řídící přímku míti musí.*)

Poněvadž parabola P_s čtyřmi tečnami A, B, N, N_1 dokonale jest stanovena, tedy obdržíme její ohnisko φ — dle známých vlastností paraboly — buď co úhlopříčně ms protilehlý bod diagonální úplného, parabole P_s opsaného pravoúhlého čtyrstranu (A, B, N, N_1), aneb co čtvrtý, bodu s harmonicky sdružený bod skupiny o, o_1, s, φ na kružnici K, která body o, o_1, s proložena jest.

Vytkneme-li na hlavní ose A osnovy O jiné dva, od středu m stejně vzdálené body o', o_1' za ohniska nové souosé osnovy O′ konfokálních kuželoseček, obdržíme též jiný involuční svazek se středem s, jehož osy N′, N_1' půlí úhly $o'so_1'$ a (180^0 — $o'so_1'$) a tudíž též i jinou Steiner-ovu parabolu (P_s).

Pozorujeme-li geometrické místo ohnisek φ, danému bodu s příslušných Steiner-ových parabol P_s, které, jak patrno, spojnici ms za společnou řídící přímku mají, vzhledem k veškerým souosým osnovám konfokálních kuželoseček, jichž ohniska na společné hlavní ose A osnov se nachází, tedy náleží místu onomu též společný střed m osnov — splyne-li o, o_1 s bodem m — a úběžný bod přímky pq — sjednotí-li se o, o_1 s úběžným bodem hlavní osy A, kdež $p \equiv (A, sp \,||\, B)$ a $q \equiv (B, sq \,||\, A)$.

Osy veškerých involučních, v s soustředných svazků tvoří pravoúhlou involuci se středem s, a řady na osách A, B průsekem jich s tímto svazkem vzniklé jsou spolu promětné. Geometrickým výtvarem obou promětných řad A a B jest ale kuželosečka, a jelikož se tato, jak shora vysvítá, též úběžné přímky roviny dotýká, jest tudíž výtvar onen parabolou P_t, která má za ohnisko bod s a za řídící s pq rovnoběžnou, perspektivní osu $m\varphi$ obou řad A a B. Z této úvahy plyne následující věta:

„*Otáčí-li se jeden z pravých úhlů úplného pravoúhlého čtyrstranu kolem svého vrcholu v rovině jeho, při čemž druhý pravý úhel nehybným jest, obalují veškeré, vrcholy pravých úhlů neprocházející úhlopříčny takto povstalých úplných čtyrstranů, parabolu,*

*) Jakým způsobem Steiner parabolu P_s obdržel, viz ku př. Schröter: Steiner's Vorlesungen über die Theorie der Kegelschnitte. II. vyd. p. 203. a násl.

jejímž ohniskem jest vrchol hybného pravého úhlu a jejíž řídící přímkou, která vrcholem nehybného pravého úhlu prochází, jest geometrické místo, diagonale vrcholů pravých úhlů, protilehlých bodů diagonalních."

Z této věty plyne bezprostředně následující:

„Ohniska veškerých, libovolnému bodu vzhledem k souosým osnovám konfokálních kuželoseček náležejících Steinerových parabol, leží na řídící přímce oné paraboly, jejímž ohniskem jest daný bod a která zahalena jest, vrcholy pravých úhlů neprocházejícími úhlopříčnami oněch úplných pravoúhlých čtyrstranů, které osy osnov za dvě společné nehybné strany mají a jichž druhé dvě proměnlivé strany vždy s párem paprsků pravoúhlé involuce v daném bodu se sjednocují."

Pro jiný bod s' přímky ms obdržíme dle výše uvedeného též jinou parabolu P_t, jejíž ohnisko jest s'. Avšak veškeré takto obdržené paraboly P_t mají přímku $m\varphi$ za společnou řídící a nejsou nic jiného než Steinerovy paraboly bodů φ přímky $m\varphi$ vzhledem k dřívějším souosým osnovám. Neb pozorujeme-li pravoúhlý úplný čtyrstran (A, B, $\overline{\varphi 1}$, $\overline{\varphi 2}$) — kdež $1 \equiv (N, A)$ a $2 \equiv (N, B)$ — s hybným vrcholem v bodu φ, tedy musí o něm platiti totéž co platilo o výše zmíněném čtyrstranu (A, B, N, N_1). Z toho však plyne, pakli uvážíme, že při parabole $\sphericalangle \varphi mo = \sphericalangle oms$, věta:

„Geometrickým místem ohnisk veškerých, libovolnému bodu, středem souosých osnov konfokálních kuželoseček procházející přímky, vzhledem k těmto osnovám náležejících Steinerových parabol, jest čtvrtá, dané přímce vzhledem k společným osám osnov harmonicky sdružená přímka."

Z této věty možná též následující, pro jednotlivou osnovu konfokálních kuželoseček náležející větu obdržeti:

„Každá z oněch dvou, středem osnovy konfokálních kuželoseček procházejících, vzhledem k osám osnovy harmonicky sdružených přímek, jest geometrickým místem bodů, k nimž příslušné Steinerovy paraboly vzhledem k dané osnově svá ohniska na druhé sdružené přímce mají.

Ve Vídni v červenci 1884.