

Karel Rychlík

Funkce spojitě nemající pro žádnou hodnotu proměnné derivace v tělese
čísel Henselových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 222--223

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108887>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1920

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Funkce spojitě nemající pro žádnou hodnotu proměnné derivace v tělese čísel Henselových.*)

Dr. Karel Rychlík.

V tělese Henselových čísel p -adických (p racionálně prvočíslo) definujeme funkci $f(x)$ takto: Každé číslo Henselovo p -adické lze znázoruiti jednoznačně redukováním rozvojem p -adickým $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \dots$, kdež r je racionálně celé číslo, koeficienty a pak čísla z řady $0, 1, 2, \dots, p-1$. Položme $f(x) = a_r p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \dots$.

O jednoznačně určené funkci $f(x)$ lze snadno dokázat, že je spojitá pro všechna x . Je-li totiž $h \equiv 0 \pmod{p^n}$, ($n > r$) t. j. $h = h_n p^n + h_{n+1} p^{n+1} + \dots$, bude

$$x = a_r p^r + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \dots,$$

$$x + h = a_r p^r + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + h_n) p^n + \dots,$$

z čehož je viděti, že $f(x+h) \equiv f(x) \pmod{p^n}$; z toho pak vyplývá spojitost $f(x)$.

Položme nyní $\varepsilon_{r+n} = 1$ neb -1 dle toho, je-li $a_{r+n} \neq p-1$ neb $= p-1$ ($n \geq 0$). I bude $x + \varepsilon_n p^n = a_r p^r + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + \varepsilon_n) p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \dots$, což zase bude redukováný rozvoj p -adický.

Snadno zjistíme, že je pak $f(x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}) = f(x)$ pro n liché
a $f(x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}) = f(x) + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}$ pro n sudé.

Sestrojíme posloupnosti

$$h'_k = \varepsilon_{r+2k+1} p^{r+2k+1}, \quad h''_k = \varepsilon_{r+2k} p^{r+2k} \quad (k \geq 0).$$

tak že pro první z těchto posloupností je $\frac{f(x+h'_k) - f(x)}{h'_k} = 0$

a limita tohoto výrazu pro $k = \infty$ je též 0; pro druhou z oněch postoupností bude $\frac{f(x+h''_k) - f(x)}{h''_k} = 1$ a limita toho

*) K utvoření této funkce byl jsem veden článkem p. prof. Petra v předešlém čísle časopisu.

výrazu bude 1. Tím důkaz, že funkce $f(x)$ nemá derivace pro žádnou hodnotu proměnné x proveden.

Stejně by tomu bylo pro obor čísel g -adických (g racionálně celé číslo) a pro Henselova čísla příslušná k tělesům algebraickým číselným konečného stupně.

Une fonction continue définie au corps des nombres de Hensel et n admettant de dérivée pour aucune valeur de la variable indépendante.

Par K. Rychlík.

(Résumé de l'article précédent.)

Pour définir une telle fonction $f(x)$, représentons la variable indépendante x par un développement p -adique réduit (qui est alors unique) $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \dots$, où r est un nombre entier rationnel et les coefficients a sont des nombres de la suite $0, 1, 2, \dots, p-1$, et posons $f(x) = a_r \cdot p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \dots$. On démontre sans aucune peine que la fonction uniforme $f(x)$ est continue. Si nous posons $\varepsilon_{r+n} = 1$ pour $a_{r+n} \neq p-1$ et $\varepsilon_{r+n} = p-1$ ($n \geq 0$), nous aurons

$$\frac{f(x + h'_k) - f(x)}{h'_k} = 0, \quad \frac{f(x + h''_k) - f(x)}{h''_k} = 1$$

où l'on a posé

$$h'_k = \varepsilon_{r+2k+1} p^{r+2k+1}, \quad h''_k = \varepsilon_{r+2k} p^{r+2k} \quad (k \geq 0).$$

Il en suit immédiatement que la fonction continue $f(x)$ n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable x .

La même démonstration s'appliquerait pour les nombres g -adiques de Hensel et pour les nombres de Hensel attachés aux corps algébriques numériques d'un degré fini.
