Funkce spojité nemající pro žádnou hodnotu proměnné derivace v tělese čísel Henselových.*)

Dr. Karel Rychlík.

V tělese Henselových čísel p-adických (p racionálné prvočíslo) definujme funkci $f(x)$ takto: Každé číslo Henselovo p-adické lze znázorniti jednoznačně redukovaným rozvojem p-adickým $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \ldots$, kdež r je racionálné celé číslo, kooficienty a pak čísla z řady $0, 1, 2, \ldots p-1$. Položme $f(x) = a_r p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \ldots$

O jednoznačně určené funkci $f(x)$ lze snadno dokázati, že je spojitá pro všechna x. Je-li totiž $h \equiv 0 \pmod{p^n}$, $(n > r)$ t. j. $h = h_n p^n + h_{n+1} p^{n+1} + \ldots$, bude

$$x = a_r p^2 + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \ldots,$$

$$x + h = a_r p^2 + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + h_n) p^n + \ldots,$$

z čehož je viděti, že $f(x+h) \equiv f(x) \pmod{p^n}$; z toho pak vyplývá spojitost $f(x)$.

Položme nyní $\varepsilon_{r+n} = 1$ neb -1 dle toho, je-li $a_{r+n} \neq$ $\neq p-1$ neb $= p-1$ $(n \geq 0)$. I bude $x + \varepsilon_n p_n = a_r p^r + \ldots$ $+ a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + \varepsilon_n) p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots$, což zase bude redukovaný rozvoj p-adický.

Snadno zjistíme, že je pak $f(x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}) = f(x)$ pro n liché a $f(x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}) = f(x) + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}$ pro n sudé.

Sestrojme posloupnosti

$$h'_k = \varepsilon_{r+2k+1} p^{r+2k+1}, \quad h''_k = \varepsilon_{r+2k} p^{r+2k} \quad (k \geq 0).$$

tak že pro první z těchto posloupností je $\dfrac{f(x + h'_k) - f(x)}{h'_k} = 0$ a limita tohoto výrazu pro $k = \infty$ je též 0; pro druhou z oněch postoupností bude $\dfrac{f(x + h''_k) - f(x)}{h''_k} = 1$ a limita toho

*) K utvoření této funkce byl jsem veden článkem p. prof. Petra v předešlém čísle časopisu.

výrazu bude 1. Tím důkaz, že funkce $f(x)$ nemá derivace pro žádnou hodnotu proměnné x proveden.

Stejně by tomu bylo pro obor čísel g-adických (g racionálné celé číslo) a pro Henselova čísla příslušná k tělesům algebraickým číselným konečného stupně.

Une fonction continue definie au corps des nombres de Hensel et n admettant de derivée pour ancune valeur de la variable indépendante.

Par K. Rychlík.

(Résumé de l' article precédent.)

Pour définir une telle fonction $f(x)$, représentons la variable indépendante x par un développement p-adique réduit (qui est alors unique) $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \ldots$, où r est un nombre entier rationel et les coefficients a sont des nombres de la suite 0, 1, 2,... p-1, et posons $f(x) = a_r . p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \ldots$. On démontre sans ancune peine que la fonction uniforme $f(x)$ est continue. Si nous posons $\varepsilon_{r+n} = 1$ pour $a_{r+n} \neq p - 1$ et $\varepsilon_{r+n} = p - 1$ $(n \geqq 0)$, nous aurons

$$\frac{f(x + h'_k) - f(x)}{h'_k} = 0, \quad \frac{f(x + h''_k) - f(x)}{h''_k} = 1$$

où l'on a posé

$$h'_k = \varepsilon_{r+2k+1} p^{r+2k+1}, \quad h''_r = \varepsilon_{r+2k} p^{2+2k} \; (k \geqq 0).$$

Il en suit immédiatement qua le fonction continue $f(x)$ n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable x.

La même démonstration s'appliquerait pour les nombres g-adiques de Hensel et pour les nombres de Hensel attachés aux corps algébriques numériques d'un degré fini.
