Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [VI.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 209–214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108885

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch.**

(Pokračování.)

10.

V základní identitě, která sloužívá k zavedení Bernoulliových čísel

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\ldots$$

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{p-1}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu-1}+$$

$$+(-1)^{p-1}\Theta\frac{B_p x^{2p-1}}{(2p)!},$$

kde při reálném x je $0<\Theta<1$, násobme obě strany $e^{ux}dx$ a integrujme od $x=0$ do $x=v$:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned}\int_0^v e^{ux}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)dx-\frac{e^{uv}-1}{2u}=\\ =\sum_{\nu=1}^{p-1}(-1)^\nu\frac{B_\nu}{(2\nu)!}\int_0^v e^{ux}x^{2\nu-1}dx+R_p,\end{aligned}$$

kde zbytek R_p má hodnotu

$$R_p=(-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}\int_0^v \Theta x^{2p-1}e^{ux}dx=(-1)^p\frac{\vartheta B_p}{(2p)!}\int_0^v e^{ux}x^{2p-1}dx,$$

$$0<\vartheta<1.$$

Při označení

$$\mathfrak{A}_n(\omega)=\int_0^1 e^{\omega x}x^n dx,\quad \mathfrak{A}_0(\omega)=\frac{e^\omega-1}{\omega}\tag{34}$$

máme

$$\int_0^v e^{ux} x^{2\nu-1} dx = v^{2\nu} \mathfrak{A}_{2\nu-1}(uv),$$

i můžeme pravou stranu rovnice (α) přehledně psáti

$$S_p + R_p,$$

kde

$$\left.\begin{aligned} S_p &= \frac{v}{2}\mathfrak{A}_0(uv) + \sum_{\nu=1}^{p-1}(-1)^\nu \frac{B_\nu v^{2\nu}}{(2\nu)!}\mathfrak{A}_{2\nu-1}(uv), \\ R_p &= (-1)^p \frac{\vartheta B_p v^{2p}}{(2p)!}\mathfrak{A}_{2p-1}(uv), \quad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Levá strana rovnice (α) jeví se jako rozdíl integrálů I—II,

$$I = \int_0^v \frac{e^{ux}-1}{x} dx, \quad II = \int_0^v \left(\frac{e^{ux}}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) dx;$$

první z nich má hodnotu

$$I = \mathfrak{Li}(uv),$$

značíme-li obecně

$$\mathfrak{Li}(\omega) = \sum_1^\infty \frac{\omega^\nu}{\nu!\,\nu}, \tag{36}$$

takže logarithmointegrál $li(e^\omega)$ má hodnotu

$$\log|\omega| + E + \mathfrak{Li}(\omega).$$

Druhý integrál přetvoříme na součet

$$II = \int_0^v \frac{e^{ux}-e^x}{e^x-1} dx + \int_0^v \left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) dx;$$

druhý člen má hodnotu

$$\log\frac{e^v - 1}{v},$$

a v prvním integrálu pišme $e^x = \zeta$; obdržíme tak výsledek

$$\mathfrak{Li}(uv) - \int_1^{e^v} \frac{\zeta^{u-1}-1}{\zeta - 1} d\zeta = \log\frac{e^v-1}{v} + S_p + R_p. \tag{35b}$$

Pro nekonečně rostoucí p přechází S_p v řadu, která konverguje pro $|v| < 2\pi$, a při tom $\lim R_p = 0$.

Vlastní nerv výsledku spočívá ve vyjádření binomického integrálu

$$\Phi(c, u) = \int_1^c \frac{x^{u-1} - 1}{x - 1}\, dx \tag{37}$$

integrálním logarithmem a řadou S_p, slouží však též k výpočtu logarithmo-integrálu, zvolíme-li na př. u celistvým. V tom případě, kdy u je celistvé a kladné, máme očividně

$$\Phi(c, u) = \sum_{\nu=1}^{u-1} \frac{1}{\nu}(c^\nu - 1).$$

Užijeme-li elementárního vztahu

$$\sum_1^{u-1} \frac{1}{\nu} - E = \psi(u), \quad \psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)},$$

přepíše se (35^b) na

$$li(e^{uv}) = \sum_{\nu=1}^{u-1} \frac{1}{\nu} e^{\nu v} - \psi(u) + \log |uv| + \log \frac{e^v - 1}{v} + S_p + R_p. \tag{35^c}$$

Rovnice (35^b) platí pro u, v libovolných znamének, v poslední rovnici se celistvé číslo u předpokládá kladné. Znamenitě se hodí k výpočtu logarithmointegrálů obou typů tento vzorec pro v blízká ± 1, pokud $\omega = uv$ nemá příliš velkou hodnotu; pro velká ω máme v řadě značný počet velkých členů.

Podle (35^b) se výraz

$$\Phi(e^v, u) + \log \frac{e^v - 1}{v} + \frac{v}{2} \mathfrak{A}_0(uv)$$

nezmění, obrátí-li se současně znamení při u a v; tím vychází vztah

$$\Phi(c, u) - \Phi\left(\frac{1}{c}, -u\right) + \log c + \frac{c^u - 1}{u} = 0. \tag{37^a}$$

Pro počítání hodnot $\mathfrak{A}_n$ máme vedle (34)

$$\mathfrak{A}_n(\omega) = D_\omega^n \frac{e^\omega - 1}{\omega} = (-1)^{n-1} \frac{n!}{\omega^{n+1}} e^\omega \left[e^{-\omega} - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\omega^\nu}{\nu!}\right] \tag{34^a}$$

a vzorec návratný

$$\mathfrak{A}_n = \frac{e^\omega - \mathfrak{A}_{n-1}}{\omega}; \tag{34^b}$$

pro sblížené ocenění chyb hodí se též

$$\mathfrak{A}_n(\omega) = e^{\omega}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{\omega}{(n+1)(n+2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots\right].$$

Připojme číselné hodnoty pro $\omega = 10$:

$e^{10} = 22026{\cdot}47$, $\mathfrak{A}_0 = 2202{\cdot}547$, $\mathfrak{A}_1 = 2202{\cdot}392$,
$\mathfrak{A}_2 = 1762{\cdot}169$, $\mathfrak{A}_3 = 1673{\cdot}996$, $\mathfrak{A}_4 = 1533{\cdot}049$,
$\mathfrak{A}_5 = 1436{\cdot}122$, $\mathfrak{A}_6 = 1340{\cdot}974$, $\mathfrak{A}_7 = 1263{\cdot}965$.

Velikost součinitelů $\mathfrak{A}_{2\nu-1}$ v součtu S_p vyvažuje se malým obnosem činitelů

$$\frac{B_\nu}{(2\nu)!};$$

tak je zde ($\omega = 10$)

$$\frac{B_5}{10!}\mathfrak{A}_9 < 0{\cdot}0\,5.$$

Funkce (37) $\Phi(c, u)$ hoví dále rovnici

$$\Phi(u+1) = \Phi(u) + \frac{c^u - 1}{u}. \tag{37^b}$$

Přeměnou c za $\frac{1}{c}$ a u za $-u$ máme tedy

$$\Phi\left(\frac{1}{c},\ 1-u\right) = \Phi\left(\frac{1}{c},\ -u\right) - \frac{c^u - 1}{u},$$

načež vztah (37^a) přejde na

$$\Phi(c, u) - \Phi\left(\frac{1}{c},\ 1-u\right) = -\log c. \tag{37^c}$$

Funkce

$$F(c, u) = \int_0^c \frac{1 - x^{u-1}}{1-x}\,dx = \Phi(c, u) + \psi(u) - \psi(1) \tag{38}$$

tedy hoví rovnicím

$$\left.\begin{aligned} F(c, u+1) &= F(c, u) + \frac{c^u}{u}, \\ F(c, u) - F\left(\frac{1}{c},\ 1-u\right) &= -\log c - \pi \operatorname{cotg} \pi u. \end{aligned}\right\} \tag{38^a}$$

Pro $0 < c < 1$ platí očividně rozvoj

$$F(c, u) = -\log(1-c) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^{u+\nu}}{u+\nu}, \tag{38^b}$$

hterý nás vede k útvarům výše studovaným.

Pro $c > 1$ obdržíme pomocí druhé rovnice (38ᵃ) a (38ᵇ):

$$F(c, u) = -\log(c-1) - \pi \operatorname{cotg} u\pi + \sum_{1}^{\infty} \frac{c^{u-\nu}}{u-\nu},$$

a odtud dle (38) — ježto $\psi(1) = -E$ —

$$E + \Phi(c, u) = -\log(c-1) - \psi(1-u) + \sum_{1}^{\infty} \frac{c^{u-\nu}}{u-\nu}, \qquad c > 1.$$

Přetvořme výraz $\mathfrak{A}_n$ pro ryze pomyslné argumenty, kladouce

$$\mathfrak{A}_n(i\omega) = \mathfrak{C}_n(\omega) + i\mathfrak{D}_n(\omega); \tag{39}$$

rovnice (34ᵃ) dává

$$\mathfrak{C}_n + i\mathfrak{D}_n = i^{n+1} n! \left\{ \frac{1}{\omega^{n+1}} - \frac{\cos\omega + i\sin\omega}{\omega^{n+1}} \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^\alpha i^\alpha \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} \right\}.$$

Znamenejme P_n ryze lomenou část řady

$$(-1)^n \frac{n!}{\omega^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \ldots\right),$$

a Q_n ryze lomenou část řady

$$(-1)^{n-1} \frac{n!}{\omega^{n+1}} \left(\omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \ldots\right);$$

pak zní poslední rovnice

$$\mathfrak{C}_n + i\mathfrak{D}_n = i^{n+1} \left\{ \frac{n!}{\omega^{n+1}} - (\cos\omega + i\sin\omega)(-1)^n (P_n + iQ_n) \right\},$$

z ní separací částí reálné a pomyslné plynou výrazy pro $\mathfrak{C}_n$ a $\mathfrak{D}_n$.

Volme zvláště $n = 2m - 1$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_{2m-1} &= (-1)^m \left\{ \frac{(2m-1)!}{\omega^{2m}} + P_{2m-1}\cos\omega - Q_{2m-1}\sin\omega \right\} \\ \mathfrak{D}_{2m-1} &= (-1)^m \{ P_{2m-1}\sin\omega + Q_{2m-1}\cos\omega \}. \end{aligned}\right\} \tag{39^a}$$

Pro kladné $v (< 2\pi)$ a kladné celistvé $u = a$ nám rovnice (35ᶜ) dává

$$(\beta) \qquad li(e^{av}) = \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{1}{\nu} e^{\nu v} - \psi(a) + \log(av) + \log \frac{e^v - 1}{v} + S_\infty,$$

$$S_\infty = \frac{e^{av}-1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{A}_{2m-1}(av);$$

definujeme-li pro komplexní $\omega = av$ funkci $li\,(e^{\omega})$ jako prodloužení funkce z kladných hodnot ω do roviny ω opatřené řezem $(-\infty \ldots . 0)$ podél realné osy, bude tento rozvoj platný také pro komplexní v, pokud $|\, v \,| < 2\pi$. Vložme tedy ryze pomyslnou hodnotu iv za v, předpokládajíce $0 < v < 2\pi$; je pak

$$li\,(e^{i\omega}) = Ci\,(\omega) + i\,Si\,(\omega) + \frac{i\pi}{2},$$

na pravé straně (β) máme

$$\log\,(a\,vi) = \log\,(av) + i\,\frac{\pi}{2}, \qquad \log\frac{e^{iv}-1}{iv} = \log\frac{2\sin\frac{v}{2}}{v} + i\,\frac{v}{2}.$$

$$S_\infty\,(i\omega) = \frac{\cos\omega - 1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m v^{2m}}{(2m)!}\,\mathfrak{C}_{2m-1}(\omega)$$

$$+\, i\left\{\frac{\sin\omega}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!}\,\mathfrak{D}_{2m-1}(\omega)\right\},$$

a tedy nacházíme porovnáním částí realné a pomyslné rozvoje, v nichž $\omega = av$, $0 < v < 2\pi$, a celistvé:

$$Ci\,(\omega) = \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{\cos\nu v}{\nu} - \psi(a) + \log a + \log\left(2\sin\frac{v}{2}\right)$$

$$+ \frac{\cos\omega - 1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!}\,\mathfrak{C}_{2m-1}(\omega), \qquad (40^a)$$

$$Si\,(\omega) = \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{\sin\nu v}{\nu} + \frac{v}{2} + \frac{\sin\omega}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m v^{2m}}{(2m)!}\,\mathfrak{D}_{2m-1}(\omega). \qquad (40^b)$$

Návratný vztah (34^b) podává rovnice

$$\omega\mathfrak{C}_n = \sin\omega - n\mathfrak{D}_{n-1}, \qquad \omega\mathfrak{D}_n = -\cos\omega + n\mathfrak{C}_{n-1}, \qquad (39^b)$$

z nichž vycházejí vztahy k počítání vhodnější

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\mathfrak{C}_n &= \omega\sin\omega + n\cos\omega - n\,(n-1)\,\mathfrak{C}_{n-2}, \\ \omega^2\mathfrak{D}_n &= -\,\omega\cos\omega + n\sin\omega - n\,(n-1)\,\mathfrak{D}_{n-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (39^*)$$

$$(n = 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\cos\omega + \omega\sin\omega - 1}{\omega^2}, \qquad \mathfrak{D}_1 = \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2}.$$