Václav Jeřábek

O vlastním a vrženém stínu jistého konoidu stupně čtvrtého

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 1, 39--44

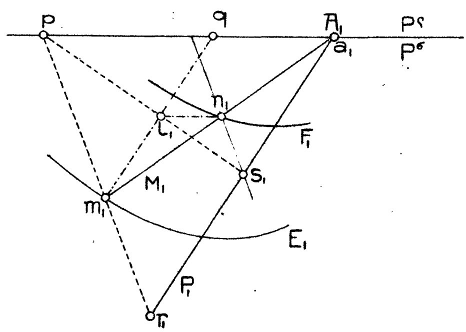
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108865

O vlastním a vrženém stínu jistého konoidu stupně čtvrtého.

Napsal *V. Jeřábek.*

(Obrazce sestrojil prof. dr. *J. Roháček.*)

1. Buď dán průmět E_1 křivky E roviny ϱ, určené bodem r a stopou P^ϱ na průmětně π. (Obr. 1.) Předpokládejme, že bod r je nad průmětnou π a že má svůj průmět v r_1. Některý bod A_1 stopy P^ϱ pokládejme za průmět přímky $A \perp \pi$. Stanovme konoid přímkou A, křivkou E a úběžnou přímkou průmětny π. Průmět M_1 kterékoli plošné přímky M konoidu, jež seče křivku E v bodě m a stojí v bodě a

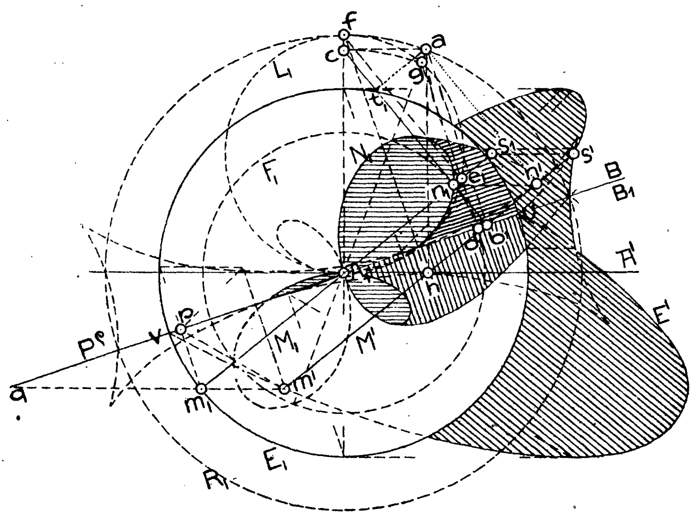


Obr. 1.

kolmo na přímce A, prochází průmětem $a_1 \equiv A_1$ bodu a a protíná E_1 v bodě m_1, do něhož promítá se bod m přímky M. Spojnici P_1 bodů r_1, A_1 mějme za průmět přímky $P \parallel \pi$, stojící kolmo na přímce A. Zvolme na P bod s, jemuž náleží průmět s_1 na P_1. Bodem s a přímkou $P^\sigma \equiv P^\varrho$ proložená rovina σ seče konoid v křivce F, jejíž průmět F_1 jest, jak později dokážeme, s křivkou E_1 homothetický podle středu A_1. K tomu cíli sestrojíme na M_1 a F_1 průmět n_1 bodu n, v němž přímka M seče rovinu σ i křivku F. Zobrazme průměty r_1m_1p, s_1p přímek rmp, sp, jež mají společnou stopu p na P^ϱ; první z nich leží v rovině ϱ a druhá v rovině σ. Přímkou M proložená rovina $\pi' \parallel \pi$ protíná přímku sp v bodě l, rovinu rsp v přímce $ml \parallel rs \parallel r_1s_1 \parallel m_1l_1$ a rovinu σ v přímce $ln \parallel P^\varrho \parallel l_1n_1$, která plošnou přímku M protíná v bodě n, jehož průmět n_1 na M_1 stanoví přímka $l_1n_1 \parallel pA_1$.

Přímkou $m_1 l_1$ protněme P^ϱ v bodě q. Pak platí: $\frac{a_1 n_1}{a_1 m_1} = \frac{q l_1}{q m_1} = \frac{a_1 s_1}{a_1 r_1}$; poměr tento je stálý, pročež má i první poměr hodnotu stálou pro každou polohu přímky $M \parallel M_1$, z čehož jde, že E_1 a F_1 jsou křivky homothetické podle středu A_1, jak jsme tvrdili.

2. Buď E_1 (obr. 2) kružnicí, A_1 jejím středem; křivka E je elipsou, jejíž osa fokální stojí ve středu A_1 v rovině ϱ kolmo na $P^\varrho \equiv B$, druhá osa elipsy na přímce B je průměrem uv kruhu E_1. V tomto případě je konoid stupně čtvrtého, jehož útvary řídící jsou přímka A, elipsa E a úběžná přímka U_∞ průmětny π. Jeho přímky dvojné jsou A a U_∞; B je površkou dvojnou, a dvě torsální přímky procházejí vrcholy elipsy na ose fokální rovnoběžně s průměrem kruhu E_1,



Obr. 2.

který na uv stojí kolmo a v němž jsou průměty přímek torsálních. Vrcholy elipsy na ose fokální jsou body kuspidální. Třetí a čtvrtá přímka torsální, jakož i body kuspidální jsou úběžné a imaginární.

3. Budiž m' na π (obr. 2) vržený stín bodu m površky M a $M' \parallel M_1 \parallel M$ jejím stínem vrženým. Pořadnice $mp \perp uv$ elipsy E má svůj orth. průmět v pořadnici $m_1 p \perp uv$ kruhu E_1 a svůj vržený stín v pm'. Spusťme s bodu b_1, v němž M' a B se protínají, kolmici $b_1 n$ na M v rovině MM' a zobrazme její průmět $b_1 n_1$, kolmý na M_1. Rovina uvn seče konoid v elipse F, jež se na π promítá do kružnice $F_1 \equiv (A_1, \overline{A_1 n_1})$, jdoucí bodem n_1. Kružnicí touto protněme $A_1 b_1$ v bodě d_1. Tečna $b_1 n_1$ kruhu F_1 je průmětem tečny elipsy F v bodě n, protínají se tudíž zmíněné tečny v bodě b_1 na uv. Rovina světelná

MM', obsahující plošnou přímku M a tečnu b_1n, dotýká se v bodě n konoidu. Paprsek světelný $nn' \parallel mm'$, jdoucí bodem n, leží v rovině tečné MM' konoidu a proto dotýká se jej v bodě n, který náleží křivce N, jež omezuje vlastní stín konoidu a má svůj průmět v křivce N_1. Rovnoběžka n_1n', vedená bodem n_1 s m_1m, vytíná na M' vržený stín n' bodu n.

Vrženým stínem elipsy E je elipsa E', jejíž průměr uv je osou a m_1m' směrem afinity, v níž kruhu E_1 přísluší elipsa E'. Protněme spojnicí m_1m' přímku uv v bodě q a vyznačme bod h, ve kterém b_1m' seče A'. Ježto $b_1m \parallel A_1m_1$, jest poměr $\frac{b_1m'}{A_1m_1} = \frac{m'q}{m_1q}$ stálým poměrem afinity; v prvním poměru jsou A_1m_1 a b_1m' stálé délky. Odečteme-li od b_1m' délku $hm' = A_1m_1$, bude b_1h délky stálé.

Mění-li přímka M na konoidu svou polohu, mění s ní její stín M' na π též svou polohu, krajní body b_1, h úsečky b_1h stálé délky vytvořují přímé trajektorie A', B; obaluje tudíž M' šikmou astroidu.

Kolmice vztýčené v bodech b_1, h na B, A' protínají se v okamžitém středu otáčení a, jehož geom. místem je kružnice R_1 soustředná s kružnicí E_1.

Vyznačme bod c, v němž $b_1n_1 \perp b_1h$ seče poloměr A_1f kolmý ku A' kruhu R_1. Pravoúhlému čtyrúhelníku A_1hb_1a lze opsati kružnici (A_1a),[1]) která je totožna s kružnicí opsanou pravoúhlému čtyrúhelníku A_1hb_1c, protože obě mají tři společné body A_1hb_1. V kružnici (A_1a) stojí $ac \perp A_1f$, $ab_1 \perp B$ a $ah \perp A'$. Pohybuje-li se bod a po kružnici R_1, mění vrcholy trojúhelníka pravoúhlého b, h, c na přímkách B, A', A_1f svou polohu, trojúhelník onen zůstává však ve všech polohách shodný se svou původní polohou, neboť délka jeho odvěsny b_1h se nemění a úhel b_1ch stále rovná se danému úhlu $b_1A_1h_1$. Obalují tudíž jeho strany tři astroidy, z nichž jedna, přeponou obalená, jest pravidelná. V patách kolmic spuštěných s bodu a na strany trojúhelníka b_1ch, dotýkají se jeho strany příslušných astroid. Lze tedy dotyčný bod n' na M' též sestrojiti kolmicí spuštěnou s bodu a na M'.

Ježto n_1 je patou kolmice spuštěné s bodu A_1 na b_1c, jest průmět N_1 meze N vlastního stínu konoidu úpatnicí astroidy, obalené jednotlivými přímkami b_1c; pól je v A_1.

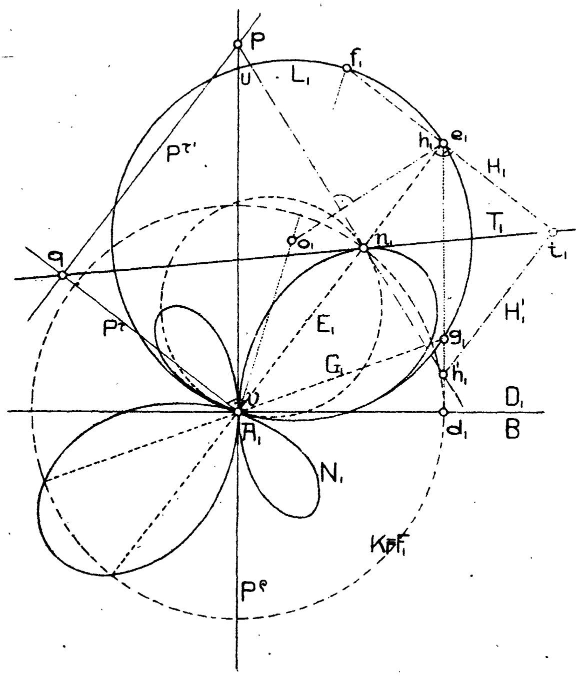
Je-li t_1 patou kolmice spuštěné s bodu a na b_1c, lze, jak známo, tečnou kružnice A_1b_1c v bodě n_1 sestrojiti tečnu křivky N_1.

4. Kružnicí F_1 protněme poloměr A_1u kruhu E_1 v bodě d_1 a vztyčme v tomto bodě kolmici na A_1u, která seče A_1n_1 v bodě e_1 a A_1a v bodě g_1. Nad průměrem $A_1f \perp A'$, který je poloměrem kruhu R_1, opišme kruh L_1. Výška A_1n_1 trojúhelníka A_1b_1c a průměr

[1]) (A_1a) značí kruh, jehož průměr je A_1a.

A_1a kruhu jemu opsaného jsou v úhlu b_1A_1c přímky isogonální, které s rameny úhlu svírají stejné úhly n_1A_1c, b_1A_1a, a že $A_1e_1 = A_1b_1$, $A_1f = A_1a_1$ je trojúhelník A_1e_1f otočenou polohou trojúhelníka A_1b_1a okolo středu A_1, pročež je trojúhelník pravoúhlý vepsán do kruhu L_1. Úhel $A_1g_1e_1 = A_1ab_1 = A_1cb_1 = A_1fe_1$ ($e_1f_1 \parallel n_1c$). Z rovnosti prvního a posledního úhlu vysvítá, že kružnice A_1e_1f obsahuje též bod g_1.

Je-li kružnice L_1 dána, lze body křivky N_1 sestrojovati, když kolmicí vztyčenou v bodě d_1 na Au protneme kružnici L v bodech e_1, g_1, pak kružnice E_1 ze středu A_1 poloměrem A_1d_1 sestrojená seče spojnice A_1e_1, A_1g_1 ve čtyřech bodech křivky N_1.



Obr. 3.

Křivka N_1 je tudíž souměrna podle středu A_1 a symetrál úhlů $b_1A_1f_1$, vA_1f_1.

Tečna M' seče astroidu v bodě s', bodem tímto jdoucí paprsek $ss' \parallel mm'$ protíná přímku M v bodě s, jemuž náleží průmět s_1 na M_1 ($s_1s_1' \parallel m_1m'$). Do bodu s na konoid vrhá svůj stín bod, v němž plošná přímka konoidu, rovnoběžná s tečnou astroidy v bodě s', mez N vlastního stínu seče. Geom. místo bodu s je stínem vrženým křivkou N na konoid.

5. Tečnu křivky, jež zobrazuje v půdorysu mez stínu vrženého na konoid, lze sestrojiti průmětem průsečnice roviny tečné τ konoidu

v bodě s s rovinou τ', která se dotýká podél paprsku ss' světelné plochy válcové, (ss'). Rovinu tečnou τ stanovme površkou M a tečnou elipsy konoidu v bodě s. Její stopa $P^{\tau} \parallel M'$ prochází bodem, ve kterém tečna kruhu (A_1, A_1s_1) v bodě s_1 přímku B seče. Stopa $P^{\tau'}$ roviny tečné τ' dána je tečnou astroidy v bodě s'. Ježto tečna křivky s stanovena je spojnicí bodu s s průsečíkem t stop P^{τ}, $P^{\tau'}$, jest s_1t tečnou křivky s_1.

6. Konstrukce bodů křivky N_1 na kružnici F_1 (obr. 2 a 3) přímkami A_1e_1, A_1g_1, jež v kruhu L_1 omezují tětivu e_1g_1 stojící v bodě d_1 kolmo na B, lze ještě jinak prostorově vysvětliti.

Za tím účelem pokládejme (obr. 3) $P^{\varrho} \perp B$ v bodě A_1 za stopu roviny ϱ, jejíž přímka D i její průmět D_1 stojí v bodě A_1 kolmo na P^{ϱ}.

Kružnice L_1 buď průmětem elipsy L ležící v rovině ϱ. Sestrojme v A_1 přímku $A \perp \pi$ a stanovme přímkou touto, elipsou L a úběžnou přímkou U_{∞} průmětny π konoid Plückerův stupně třetího. V tětivě $e_1g_1 \parallel P^{\varrho}$ kruhu L_1 má svůj průmět tetiva $eg \parallel e_1g_1$ elipsy L; $A_2e_2 \equiv E_2$, $A_1g_1 \equiv G_1$ jsou průměty dvou přímek $E \parallel E_1$, $G \parallel G_1$ konoidu Plückerova. Bod d_1 pokládejme za průmět bodu d, v němž eg přímku D seče. Mějme $v \equiv A_1$ za vrchol rotačního kužele, A za jeho osu a D za jednu plošnou přímku. Kružnice $K_1 \equiv F_1$ je průmětem kružnice K kužele, jdoucí bodem d. Plošné přímky E, G, ležíce v rovině kruhu K, protínají jej ve čtyřech bodech křivky N, společné konoidu a rotačnímu kuželi, jejíž průmět N_1 má na kružnici 4 body vytnuté přímkami E_1, G_1. Křivku N_1 (obr. 3) lze tedy též pokládati za průmět křivky proniku rotačního kužele s konoidem Plückerovým.

7. Tečnu křivky N_1 v bodě n_1 sestrojíme průmětem T_1 průsečnice T rovin tečných τ, τ' kužele, resp. konoidu v bodě n. Rovina τ je stanovena povrchovou přímkou vn a tečnou kruhu K v bodě n. Její stopa P^{τ} je kolmice na poloměr vn_1 v bodě v. Rovina τ' obsahuje plošnou přímku $E \parallel E_1$ a tečnu np elipsy L', n_1p dotýká se kružnice L'_1 v bodě n_1 a stanoví na P^{ϱ} stopu p tečny np. Bodem p a směrem přímky $E_1 \parallel E$ je určena stopa $P^{\tau'}$. Spojnice bodu n_1 s průsečíkem q stop P^{τ}, $P^{\tau'}$ je tečnou křivky N_1 v bodě n_1. Jiný bod t_1 tečny T_1 je průmětem průsečíku t hlavních přímek H, H' rovin τ, τ' ležících v jedné rovině $\pi' \parallel \pi$. Vytkneme-li na přímce vn kužele bod h, jehož průmět je v bodě e_1, stojí H_1 kolmo v bodě h_1 na vh_1. Bodem h v rovině vnp jdoucí přímka $hh' \parallel h_1h_1' \parallel P^{\vartheta}$ leží v rovině π' a seče tečnu pn v bodě h', jehož průmět h_1' je společným bodem průmětů pn_1 a h_1h_1'. Sestrojíme-li bodem h_1' rovnoběžku H_1' s $E_1 \parallel H'$, protne tato H_1 v bodě t_1 tečny T_1.

Sur l'ombre propre et l'ombre portée d'un conoïde du 4^e ordre.

(Extrait de l'article précédent.)

Construction des ombres d'un conoïde dont les éléments directeurs sont une droite, une ellipse et la droite à l'infini d'un plan π perpendiculaire à la droite donnée. L'ombre du conoïde portée sur le plan π est une astroïde oblique; la limite de l'ombre propre se projette sur π suivant la podaire d'une astroïde.