

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

K didaktice veličin komplexních. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 5, 265–269

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108855>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1891

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

K didaktice veličin komplexních.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

Mathematika jest v povaze své složitější, než jak se zdá povrchnímu pozorovateli. Během věků podařilo se udělití metodám a výsledkům algebry jistou *formální* jednoduchost, nutnou k dalšímu pokroku, která však u začátečníka bývá na újmu jasnosti.

Který z nás nebyl se kdy pozastavil nad teorií čísel záporných a veličin komplexních? A všechny tyto útvary povahy ryze formální nemají jiného významu, než vésti k formálně nejkratší cestě při řešení algebraických problémů a k nejstručnějšímu popisu vlastností obyčejných čísel. Co se tkne čísel záporných, pojednal jsem o nich obšírně ve 4. ročníku „Athenaea“ a mohu zde o nich pomlčet i z toho důvodu, že začátečníku poskytují menší obtíže než veličiny pomyslné, o nichž tuto jednatí chceme.

V algebře se vyskytne při řešení rovnice druhého stupně

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

často případ, že rovnici té nelze vyhověti žádnou hodnotou veličiny x ; a sice nastane tato okolnost tehdy, kdy v rovnici upravené

$$(x + a)^2 + (b - a^2) = 0$$

jest druhý člen $b - a^2$ kladný; píšeme-li zde $x + a = z$, $b - a^2 = c$, zní tato rovnice

$$z^2 + c = 0,$$

a patrně nebude splněna pro žádné z , poněvadž druhá mocnost každé veličiny je kladnou.

Symbol $z = \sqrt{-c}$, který by pro případ záporného c rovnici vyhovoval, nemá žádného významu. Matematikové nicméně podrželi tento v podstatě bezvýznamný symbol $\sqrt{-c}$, a píšíce $-c = c(-1)$, kladli $\sqrt{-c} = \sqrt{c} \sqrt{-1}$, takže absurdita $\sqrt{-c}$ redukována na absurditu jednodušší $\sqrt{-1}$, vše ovšem toliko formálně vzato.

Přesvědčivše se, že lze do počtu zavést formalismy tvaru $c + d\sqrt{-1}$, a že jimi lze docílití mnohých zajímavých správných výsledků, považovali matematikové tento nový tvar za přípustný při úvahách algebraických, aniž se starali o vlastní příčinu a podstatu algebraických zjevů tímto způsobem se naskytších. Tuto podstatu naléztí a objasnití bude účelem následujících řádků.

1. Literami řecké abecedy $\alpha, \beta, \gamma \dots$ znamenati budeme obyčejné veličiny kladné neb záporné. Z libovolných dvou takých veličin α, β sestavme symbol (α, β) , který nemá nic jiného vyjadřovati, než že máme na zřeteli dvě čísla, z nichž první jest α , druhé β ; my uvažujeme *soustavu* aneb *komplex* (α, β) . A budeme psáti $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, jsou-li obě soustavy identické, t. j. je-li $\alpha = \gamma, \beta = \delta$. Soustavu (β, α) dlužno považovati za rozdílnou od (α, β) , pokud jsou α, β vespolek různé.

Máme-li dvě soustavy (komplexy) $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$, pak nazýváme soustavu $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ součtem komplexů $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)$, takže

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\gamma, \delta) + (\alpha, \beta).$$

Mějme na zřeteli několik komplexů

$$a = (\alpha, \alpha'), b = (\beta, \beta'), c = (\gamma, \gamma'), \dots$$

a utvořme komplexy

$$(a + b) + c = (\alpha + \beta, \alpha' + \beta') + (\gamma, \gamma') = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha' + \beta' + \gamma'), \\ a + (b + c), (a + c) + b, \text{ atd.},$$

jež všechny mají tutéž hodnotu $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha' + \beta' + \gamma')$; kterou pak znamená prostě $a + b + c$.

Odtud pak také jasno, co dlužno rozuměti součtem $a + b + c + d, a + b + c + d + e$ etc., a že zde platí základní vlastnosti součtu, neměnití se s pořádkem sčítanců.

Z definice součtu plyne přímo definice rozdílu ve tvaru

$$a - b = (\alpha - \beta, \alpha' - \beta'),$$

který má vlastnost

$$b + (a - b) = a,$$

podobně jako u čísel. Zde se doporučuje psát za $a - a = (0, 0)$ prostě 0.

2. Mějme opět komplexy

$$a = (\alpha, \alpha'), b = (\beta, \beta'), c = (\gamma, \gamma'), \dots$$

a utvořme z libovolných dvou a, b komplex třetí

$$m = (\alpha\beta - \alpha'\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

který znamenejme ab ; bude patrně

$$(1) \quad ab = ba.$$

Vypočtème nyní komplex $(ab)c$, t. j.

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta - \alpha'\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta) (\gamma, \gamma') \\ = & (\alpha\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma - \alpha\beta'\gamma' - \alpha'\beta\gamma', \alpha\beta\gamma' - \alpha'\beta'\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma), \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned} a(bc) &= (\alpha, \alpha') (\beta\gamma - \beta'\gamma', \beta\gamma' + \beta'\gamma) \\ = & (\alpha\beta\gamma - \alpha\beta'\gamma' - \alpha'\beta\gamma' - \alpha'\beta'\gamma, \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma'), \end{aligned}$$

takže máme identitu

$$(2) \quad (ab)c = a(bc)$$

pro libovolné komplexy a, b, c .

Z této plyne vzhledem k větě $ab = ba$:

$$(ba)c = a(bc) = a(cb)$$

atd., takže napíšeme-li kteroukoli přestavu liter abc , na př. cab , a spojíme-li kterékoli dvě sousední litery závorkou, na př. $(ca)b$, obdržíme komplex, jehož hodnota rovná se $(ab)c$. Dokažme to v našem případě, užívajíce vět (1) a (2): Dle (2) máme $(ca)b = c(ab)$ a dle (1) bude tento výraz $= (ab)c$, jak tvrzeno.

Společnou hodnotu těchto výrazů znamenejme kterýmkoli ze způsobů: $abc, bac, cba \dots$

Uvažujme nyní čtyři komplexy a, b, c, d ; pak bude dle (2)

$$(abc)d \equiv [(ab)c]d = (ab).(cd) = a[b(cd)] = a(bcd) = \dots$$

Volme na př. $(ca)(bd)$. Tento výraz můžeme psát též $[(ca)b]d = (abc)d$; to lze dokázati o všech přestavách liter a, b, c, d při libovolném rozkladu v závorky.

Tyto vlastnosti výrazů ab , $(ab)c$, ... jsou zcela podobny vlastnostem součinů $a\beta$, $(a\beta)\gamma$, ... My z té příčiny nazveme operaci ab komposicí či skládáním komplexů a , b ; výraz ab sluje pak součinem, a , b činiteli při této komposici, a výsledky nalezené dají se takto vysloviti: *Při komposici dvou, tří, čtyř ... komplexů jest hodnota součinu nezávislá na pořádku činitelů.* Tak bude na př. pro pět činitelů $(ab)(cde) = (abc)(de) = abcde$.

3. Existuje jediný komplex j , který má povahu jednotky násobící, t. j. dobře vyjádřeno, který nemá vliv na hodnotu součinu, takže pro všechny komplexy a

$$aj = a.$$

Položíme-li totiž $a = (\alpha, \alpha')$, $j = (\iota, \iota')$, bude rovnice $aj = a$ zníti

$$(\alpha\iota - \alpha'\iota', \alpha'\iota + \alpha\iota') = (\alpha, \alpha'),$$

t. j.

$$\alpha\iota - \alpha'\iota' = \alpha$$

$$\alpha'\iota - \alpha\iota' = \alpha'$$

při všech α, α' . Rovnice

$$\alpha(\iota - 1) - \alpha'\iota' = 0,$$

$$\alpha'\iota - \alpha'(\iota - 1) = 0$$

mají obstáti při všech hodnotách α, α' ; to vyžaduje, aby $\iota - 1 = 0$, $\iota' = 0$, takže bude

$$j = (1, 0)$$

jediným komplexem hovičím naší podmínce.

Tento komplex nazývati budeme jednotkovým.

Zaveďme mimo j ještě komplex $i = (0, 1)$.

Značí-li μ libovolnou veličinu, pišme

$$(\mu\alpha, \mu\alpha') = \mu(\alpha, \alpha') = \mu\alpha.$$

Pak plyne přímo z výtěru komposice vztah

$$(\mu\alpha)(\nu b) = \mu\nu \cdot ab$$

a dále

$$\mu\alpha + \nu\alpha = (\mu + \nu)\alpha,$$

$$\mu\alpha + \mu b = \mu(\alpha + b).$$

Při tomto označení pak bude

$$(3) \quad (\alpha, \alpha') = \alpha j + \alpha' i,$$

neboť pravá strana zní

$$\alpha(1, 0) + \alpha'(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \alpha') = (\alpha, \alpha').$$

Vzorec (3) lze slovy takto vyjádřiti:

Každý komplex lze vyjádřiti lineárně pomocí dvou základních komplexů:

$$j = (1, 0), \quad i = (0, 1).$$

4. Komposice má další základní vlastnost násobení:

$$(4) \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Levá strana je totiž

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta, \alpha' + \beta')(\gamma, \gamma') \\ &= (\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha'\gamma' - \beta'\gamma', \alpha\gamma' + \beta\gamma' + \alpha'\gamma + \beta'\gamma) \\ &= (\alpha\gamma - \alpha'\gamma', \alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + (\beta\gamma - \beta'\gamma', \beta\gamma' + \beta'\gamma) \end{aligned}$$

a poslední výraz jest identicky $ac + bc$.

Z toho plyne pak obyčejným způsobem

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Součin (komposiční) dvou, tří, čtyř . . . stejných činitelů a znamenáme $a^2, a^3, a^4 \dots$, takže máme

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha')^2 &= (\alpha^2 - \alpha'^2, 2\alpha\alpha') \\ (\alpha, \alpha')^3 &= (\alpha^3 - 3\alpha\alpha'^2, 3\alpha^2\alpha' - \alpha'^3) \text{ atd.} \end{aligned}$$

Zvláště bude $j^2 = j$, a obecně $j^n = j$, kdežto

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -j.$$

Ve vzorcích $i^2 = -j$, $j^2 = j$ jsou obsaženy všechny komposiční zákony komplexův. Neboť dle předešlé věty bude

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha')(\beta, \beta') &= (\alpha j + \alpha' i)(\beta j + \beta' i) \\ &= \alpha\beta j^2 + \alpha'\beta' i^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) ij \\ &= (\alpha\beta - \alpha'\beta') j + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) i \\ &= (\alpha\beta - \alpha'\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta), \end{aligned}$$

což právě jest výměrem komposice.

(Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Karel Rosa*, stud. VII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Položme $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$, potom výraz daný bude