Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O posloupnosti geometrické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 3, 140--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108845

sinbolički označimo

$$\sum_{m=1}^{m=n} p^{(m)} = \frac{p_4}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

Niz u zaporku jest dobro poznata geometrijska progresija. U ovom slučaju imamo za konstantni quotient q vrědnost

$$q = 1 : \frac{1}{2} = 2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} \quad \text{i t. d.}$$

a za sumu iste progresije

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

dakle konačno

$$(R) \qquad \sum_{m=1}^{m=n} = p_4 \frac{2^n - 1}{2}\,.$$

O posloupnosti geometrické.

Podal

Augustin Pánek.

Nalezá-li se v osudí a černých a b bílých kuliček a značí-li pravděpodobnost absolutní, že vytáhneme kuličku černou u a bílou v, jest, jak známo,

$$u = \frac{a}{a+b}, \quad v = \frac{b}{a+b}\,.$$

Podobnost, že vytáhneme v jednom tahu kuličku černou $= u$, ve dvou tazích 1 černou a 1 bílou $= uv$, ve třech tazích 1 černou a 2 bílé $= uv^2$, ve čtyřech tazích 1 černou a 3 bílé $= uv^3, \ldots$, v n tazích 1 černou a $(n-1)$bílých $= uv^{n-1}$ aneb konečně samé bílé $= v^n$; dá pak součet podobností jednotlivých příhod jistotu, to jest

$$u + uv + uv^2 + \ldots + uv^{n-1} + v^n = 1$$

aneb

$$u(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}) = 1 - v^n,$$

a poněvadž podobnosti

$$u + v = 1,$$

tedy

$$u = 1 - v,$$

protož

$$1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v},$$

což jest známý vzorec součtový posloupnosti geometrické.

Je-li řada geometrická nekonečně sestupná

$$s = u + uv + uv^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

aneb

$$s = u + v(u + uv + uv^2 + \ldots)$$

aneb

$$s = u + vs$$

jest

$$s = \frac{u}{1 - v}, \quad v < 1.$$

Podobnost, že v n tazích vytáhneme nejméně jednou kuličku černou, jest

$$P = 1 - v^n = 1 - (1 - u)^n,$$

což znamená: Nechť jest podobnost absolutní u, že příhoda neb příznivý případ nastane, sebe menší, může se počet pokusů n voliti tak velký, by podobnost P blížila se jednotce, t. j. onen výjev nejméně jednou se udál.

Je-li podobnost u, že výjev nastane, velmi malá, rovná se poměru 1 k číslu velkému, $u = \frac{1}{n}$, a tedy

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pro $lim\ n = \infty$, jest však

$$lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

značí-li $e = 2{\cdot}718281\ldots$ základ logarithmů přirozených, proto jest podobnost, že výjev nejméně jednou nastane

$$P = 1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2}.$$