Matyáš Lerch

Drobnosti z počtu integrálního

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 5, 298--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108844

Drobnosti z počtu integrálního.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

1. V prvním dílu sebraných spisů Cauchyových přichází na str. 128. vzorec

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \sin(x+y)\, dx\, dy = \frac{\pi k}{4\left(1+\frac{k^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jednak abychom jej dokázali a jednak abychom obdrželi hodnotu integrálu, kde místo sin stojí cos, uvažujme integrál

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}+i(x+y)} dx\, dy.$$

Tento převeďme substitucí x^2, y^2 za x, y na tvar

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-kxy+i(x^2+y^2)} 4\, xy\, dx\, dy$$

a transformujme jej substitucí $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, čímž vznikne

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{r^2(i-k\sin\varphi\cos\varphi)} 4r^3 \sin\varphi\cos\varphi\, dr.$$

Provedeme-li na vnitřním integrálu proměnu $r^2 = x$, vznikne

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^\infty e^{x(i-k\sin\varphi\cos\varphi)} x\, dx;$$

vnitřní tento integrál má však — jak parcialnou integrací se snadno shledá — hodnotu

$$\frac{1}{(i-k\sin\varphi\cos\varphi)^2}$$

a tedy máme

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(i - k\sin\varphi\cos\varphi)^2} = 2\frac{d}{dk}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{i - k\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Avšak výraz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{i - k\sin\varphi\cos\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\frac{i}{\cos^2\varphi} - k\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

přejde substitucí $\mathrm{tg}\,\varphi = t$ na tvar

$$\frac{1}{i}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2 + kit}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\int_0^{\infty} dt\left(\frac{1}{t+\frac{ki}{2} - i\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}} - \frac{1}{t+\frac{ki}{2} + i\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\left[\log\left(t + \frac{ki}{2} + i\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)\right.$$

$$\left. - \log\left(t + \frac{ki}{2} - i\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\left[\pi i + \log\frac{\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}{-\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\right]$$

čili posléz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{i - k\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\left[\pi i + 2\log\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)\right].$$

Následovně

$$\text{(1)} \qquad J = -\frac{d}{dk}\left[\frac{\pi i}{\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}} + \frac{2\log\left(\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}\right]$$

a odtud máme separací částí realných a pomyslných vzorce

$$\text{(2)} \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \sin(x+y)\, dx\, dy = \frac{\pi k}{4\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{(3)} \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \cos(x+y)\, dx\, dy$$

$$= -2 \frac{d}{dk} \frac{\log\left(\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}.$$

Z posledního vzorce máme integrací dle k v mezích $(\infty \ldots k)$ vztah

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \cos(x+y) \frac{dx\, dy}{\sqrt{xy}} = -2 \frac{\log\left(\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}$$

aneb, přetvoříme-li levou stranu substitucí liter x^2, y^2 za x, y:

$$\text{(4)} \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-kxy} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy = -\frac{\log\left(\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{4}+1}}.$$

2. Hodnotu integralů, jež uvažoval Stern (Beiträge zur Theorie der Euler'schen Integrale), a o nichž jedná G. F. Meyer ve své knize „Verlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen“ § 61., možno též následujícím způsobem obdržeti.

Znamenejme

$$(\alpha) \qquad \mathrm{F}(a, s) = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} x^{s-1} dx}{e^x - 1};$$

pak bude rozdíl $\mathrm{F}(a, s) - \mathrm{F}(b, s)$ na místě $s = 1$ chovati se pravidelně a bude tu zvláště

$$\mathrm{F}(a, s) - \mathrm{F}(b, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{b+n}\right) + (s-1),$$

kde $(s-1)$ znamená funkci, jež mizí zároveň s $s-1$; v následujícím psáti budeme rovnice tvaru

$$\varphi(s)=\psi(s)+(s-1)\mathfrak{P}(s-1),$$

kde nám na posledním členu $(s-1)\mathfrak{P}(s-1)$ mizícím pro $s=1$ nezáleží, takto:

$$\varphi(s)\sim\psi(s).$$

Náš výsledek první bude tedy

$$\mathrm{F}(a,s)-\mathrm{F}(b,s)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n}-\frac{1}{b+n}\right)$$

čili po vyčíslení pravé strany

$$(\beta)\qquad \mathrm{F}(a,s)-\mathrm{F}(b,s)\sim\frac{\Gamma'(b+1)}{\Gamma(b+1)}-\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)}.$$

Ve vzorcích těchto značí a, b veličiny kladné, aneb komplexní veličiny s kladnými částmi realnými.

Buďte nyní $a_1, a_2, \ldots a_n$ veličiny libovolné, c komplexní veličina s kladnou částí realnou, dosti velikou, aby součty

$$c+a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}+\ldots+a_{\alpha_h}$$

(kde $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h$ značí sestavu čísel z řady $1, 2, \ldots n$) byly kladny ve svých částech realných, a znamenejme

$$f(x)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-e^{-a_\nu x}\right);$$

součin tento bude možno rozvinouti v součet

$$f(x)=1-\sum_{\alpha_1=1}^{n}e^{-a_{\alpha_1}x}+\sum_{\alpha_1,\alpha_2}e^{-(a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2})x}$$
$$-\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}e^{-(a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}+a_{\alpha_3})x}+\ldots,$$

kde v součtech

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2},\quad \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\quad \text{čísla}\quad \alpha_1\alpha_2,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\quad \ldots,$$

probíhají všecka amba, terna, ... z řady 1, 2, 3, ..., n.

Odtud patrno, že bude

$$(\gamma)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-cx} f(x)\, x^{s-1} dx}{e^x - 1} = \mathrm{F}(c, s) - \sum_{\alpha_1} \mathrm{F}(c + a_{\alpha_1}, s)$$
$$+ \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \mathrm{F}(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2}, s) - \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \mathrm{F}(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3}, s) + \ldots$$

Jelikož pak dle (β)

$$\mathrm{F}(c + a, s) \sim \mathrm{F}(c, s) + \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + 1) - \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a + 1),$$

máme

$$\sum_{\alpha_1} \mathrm{F}(c + a_{\alpha_1}, s) \sim \binom{n}{1} [\mathrm{F}(c, s) + \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + 1)]$$
$$- \sum_{\alpha_1} \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a_{\alpha_1} + 1),$$

dále

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2} \mathrm{F}(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2}, s) \sim \binom{n}{2} [\mathrm{F}(c, s) + \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + 1)$$
$$- \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + 1),$$

atd., takže vložením těchto výsledků do (γ) obdržíme

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} f(x)\, x^{s-1}\, dx}{e^x - 1} \sim \left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots\right]$$
$$\times [\mathrm{D}_c \log \Gamma(c + 1) + \mathrm{F}(c, s)] - \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + 1)$$
$$+ \sum_{\alpha_1} \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a_{\alpha_1} + 1) - \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + 1)$$
$$+ \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \mathrm{D}_c \log \Gamma(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3} + 1)$$

$$-\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} \mathrm{D}_c \log \Gamma\,(c + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3} + a_{\alpha_4} + 1) + \dots$$

Prvý člen v pravo odpadá následkem identity

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots = 0$$

a zbývá tedy pouze

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} f(x)\, x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}$$

$$\sim -\mathrm{D}_c \log \frac{\Gamma(1+c)\Pi\Gamma(1+c+a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}) \,.\, \Pi\Gamma(1+c+a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}+a_{\alpha_3}+a_{\alpha_4})\dots}{\Pi\Gamma(1+c+a_{\alpha_1}) \,.\, \Pi\Gamma(1+c+a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}+a_{\alpha_3})\dots}$$

kde Π znamená součin vztažený ke všem kombinacím čísel α_1, α_2, ... v závorce přicházejících.

Znamenáme-li tedy

$$\prod_{\alpha_1} \Gamma\,(u + a_{\alpha_1}) = \Phi_1\,(u)\,,$$

$$\prod_{\alpha_1,\alpha_2} \Gamma\,(u + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2}) = \Phi_2\,(u)\,,$$

$$\prod_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \Gamma\,(u + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3}) = \Phi_3\,(u)\,, \quad {}^{*)}$$

. . . .

obdržíme výsledek

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} f(x)\, x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}$$

$$\sim -\mathrm{D}_c \log \frac{\Gamma\,(c+1)\,\Phi_2\,(c+1)\,\Phi_4\,(c+1)\,\Phi_6\,(c+1)\dots}{\Phi_1\,(c+1)\,\Phi_3\,(c+1)\,\Phi_5\,(c+1)\dots}$$

Pravá strana udává stálý člen v řadě stoupajících mocnin $s-1$ pro funkci v levo psanou, tedy hodnotu této funkce pro $s = 1$; máme tak rovnici

---

*) K vůli vyvarování možnému nedorozumění stůj zde výraz

$$\Phi_2\,(u) = \Gamma\,(u + a_1 + a_2)\,\Gamma(u + a_1 + a_3)\,\Gamma(u + a_2 + a_3)\dots\Gamma\,(u + a_{n-1} + a_n).$$

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-cx} f(x)\, dx}{e^x - 1}$$

$$= - D_c \log \frac{\Gamma(c+1)\, \Phi_2(c+1)\, \Phi_4(c+1)\, \Phi_6(c+1) \ldots}{\Phi_1(c+1)\, \Phi_3(c+1)\, \Phi_5(c+1) \ldots}.$$

Je-li součet realných částí veličin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladným, existuje levá strana i pro $c = 0$, a jakožto funkce analytická veličiny c rovná se pravé straně i v tomto případě.

Není-li žádná z veličin a_{α_1}, $a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2}$, $a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + a_{\alpha_3}, \ldots$ realnou a zápornou, bude pravá strana chovati se pravidelně na všech kladných hodnotách c, a tedy obdržíme integrací dle c v mezích o a ∞:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x} = \log \frac{\Phi_2 \Phi_4 \Phi_6 \ldots}{\Phi_1 \Phi_3 \Phi_5 \ldots},$$

při čemž psáno Φ_k místo $\Phi_k(1)$.

Volme na př. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$; pak bude

$$f(x) = (1 - e^{-ax})^n, \quad \Phi_1(u) = \Gamma(u + a)^n,$$

$$\Phi_2(u) = \Gamma(u + 2a)^{\binom{n}{2}}, \quad \Phi_3(u) = \Gamma(u + 3a)^{\binom{n}{3}},$$

a rovnice (1) a (2) podají nám vztahy

$$(1^a) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-cx}(1 - e^{-ax})^n}{e^x - 1}\, dx$$

$$= - D_c \log \frac{\Gamma(1+c)\, \Gamma(1+c+2a)^{\binom{n}{2}}\, \Gamma(1+c+4a)^{\binom{n}{4}}\, \Gamma(1+c+6a)^{\binom{n}{6}} \ldots}{\Gamma(1+c+a)^n\, \Gamma(1+c+3a)^{\binom{n}{3}}\, \Gamma(1+c+5a)^{\binom{n}{5}} \ldots}$$

$$(2^a) \qquad \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-ax})^n}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \log \frac{\Gamma(1+2a)^{\binom{n}{2}}\, \Gamma(1+4a)^{\binom{n}{4}}\, \Gamma(1+6a)^{\binom{n}{6}} \ldots}{\Gamma(1+a)^n\, \Gamma(1+3a)^{\binom{n}{3}}\, \Gamma(1+5a)^{\binom{n}{5}} \ldots}.$$

3. Známý Dirichletův integrál (Crelleův žurnál, sv. 4.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cxi}\,dx}{(l^2+x^2)(k+xi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+xi)^{a_1}} \cdot \frac{1}{(k_2+xi)^{a_2}} \cdot \frac{1}{(k_n+xi)^{a_n}}$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k+l)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+l)^{a_1}} \cdots \frac{1}{(k_n+l)^{a_n}},$$

v němž k, k_1, ..., k_n jsou kladné veličiny, obdrží se jako celá řada integrálů příbuzných prostým užitím Cauchyovy věty o integraci funkcí jednoznačných.

Ukažme to na integrálu obecnějším

$$\text{(A)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{axi} f(x)\,dx}{(c_1^2+x^2)(c_2^2+x^2)\dots(c_m^2+x^2)}$$

$$= \pi \frac{e^{-|a|c_1} f(\pm c_1 i)}{c_1 \cdot (c_2^2-c_1^2)(c_3^2-c_1^2)\dots(c_m^2-c_1^2)}$$

$$+ \pi \frac{e^{-|a|c_2} f(\pm c_2 i)}{c_2 \cdot (c_1^2-c_2^2)(c_3^2-c_2^2)\dots(c_m^2-c^2)}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots,$$

kde $f(x)$ je funkce, mající veškera místa zvláštní $\left\{\begin{matrix}\text{pod}\\ \text{nad}\end{matrix}\right\}$ osou realnou, a pak značí realnou veličinu $\left\{\begin{matrix}\text{kladnou}\\ \text{zápornou}\end{matrix}\right\}$; veličiny c_1, c_2, ..., c_m jsou vesměs kladny a vespolek různy, a při výrazech $f(\pm c_1 i)$, $f(\pm c_2 i)$, ... dlužno bráti znamení $\left\{\begin{matrix}\text{hořejší}\\ \text{dolejší}\end{matrix}\right\}$. Funkce $f(x)$ mimo to má býti pro nekonečně veliká x položená v $\left\{\begin{matrix}\text{severní}\\ \text{jižní}\end{matrix}\right\}$ polovici roviny takovou, aby integrovaná funkce pro tato x byla nekonečně malou stupně vyššího než prvého.

Neboť zde stačí místo udaného integrálu studovati integrál téhož funkce vzatý podél cesty složené z úseku osy realné $(-N \dots N)$ a z půlkruhu položeného v $\left\{\begin{matrix}\text{severní}\\ \text{jižní}\end{matrix}\right\}$ polovici roviny x. Integrál bude dle Cauchyova theorému roven součinu čísla $\left\{\begin{matrix}2\pi i\\ -2\pi i\end{matrix}\right\}$ se součtem residuí integrované funkce a jednak při $N = \infty$ odpadne složka pochodící z půlkruhové cesty, z čehož zbývá

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \pm 2\pi i \,.\, \Sigma \text{ Resid. na pólech } \pm ci;$$

vypočtením těchto residuí máme pak napsaný výsledek.

Zároveň patrno, že veličiny c_1, c_2, c_m ani nemusí býti realné, nýbrž stačí, aby jich realné části byly kladné.

Kdybychom ve jmenovateli pod integrálem (A) psali

$$c_1 - ix, \; c_2 - ix, \; \ldots, \; c_m - ix \text{ místo } c_1^2 + x^2 \text{ etc.},$$

byl by integrál nullou pro $a > 0$, ale měl by hodnotu dvakrát tak velkou, jako (A), kdyby $a < 0$ a ovšem při tom ostatní parallelní podmínky byly splněny.

Věta Cauchyova o integraci v komplexním oboru jest instrument pro stanovení hodnot integrálů a pro studium jich vlastností tak velkolepý, že se jím starý počet integrální redukuje aspoň na třetinu a to při neocenitelném zisku na přehledu a systematice.

Drobné zprávy z fysiky.

Podává **B. Mašek**,
assistent c. k. fys. ústavu čes. univ.

O některých reformách týkajících se praktických jednotek elektrických.

Kongres elektriků v Paříži r. 1881. zavedl názvy a definice pro některé z nejdůležitějších quantit fysikálných, hlavně elektrických, jež r. 1884 delegáti mnohých států přijali, takže od té doby usnesení kongresu prvého vešla v obecné užívání. S neobyčejným pokrokem v nauce o elektřině a zvláště v elektrotechnice nadešla však během posledních desíti let nutnost v nejednom směru usnesení kongresů dřívějších doplniti a po případě revidovati. Tak stalo se již r. 1889., kdy v době pařížské výstavy mezinárodní kongres elektriků zavedl mimo užívané již praktické jednotky Ohm, Volt, Ampère, Coulomb a Farad nové názvy: pro jednotku energie Joule, pro intensitu pracovní Watt