Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených). [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 2, 82--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108829

a osy v společné přímce, avšak směry os křivek P a L jsou protivné. Parabola L má parametr třikrát větší, M pětkrát menší, než parabola P.

Pro ellipsu a hyperbolu jest L křivka řádu šestého, M pak křivka třídy čtvrté. Obě zejména v ellipse jsou pozoruhodny pro zvláštní tvar svůj. Geom. místo

$$\mathrm{M} \equiv (b^2x^2 + a^2y^2)^3 - a^2b^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = 0$$

má tvar čtyrlístku do ellipsy vepsaného, jejž také affinní transformací odvoditi lze ze známého čtyrlístku v kruhu

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2,$$

čili v polárné soustavě

$$\varrho = a \,.\cos 2\varphi.$$

Několik analytických studií o plochách mimosměrek (zborcených).*)

Podává

Vilém Jung,

s. professor při státní průmyslové škole v Brně.

12. *Hyperbolický paraboloid má za řídící plochu kuželovou dvě řídící roviny. Přímky jedné soustavy jsou rovnoběžné s jednou a přímky druhé soustavy s druhou řídící rovinou. Asymptotická rovina, stanovená určitou povrchovou přímkou, jest rovnoběžná s onou řídící rovinou, ku které jest zmíněná přímka rovnoběžná.*

Mějž $\varDelta$ týž význam jako v odstavci 11.

Řídící plocha kuželová má rovnici:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_1x + \mathrm{A}_2y + \mathrm{A}_3z, & \mathrm{B}_1x + \mathrm{B}_2y + \mathrm{B}_3z \\ a_1x + a_2y + a_3z, & b_1x + b_2y + b_3z \end{vmatrix} = \varrho_{11}x^2 + \varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2$$
$$+ (\varrho_{12} + \varrho_{21})\,xy + (\varrho_{23} + \varrho_{32})\,yz + (\varrho_{31} + \varrho_{13})\,zx = 0. \quad \text{(I)}$$

V případě $\varDelta = 0$, t. j. pro hyperbolický paraboloid, znamená rovnice (I) dvě roviny.**)

---

*) Dodatek ku článku p. Junga v ročníku XVIII.

**) Známo z theorie ploch 2-ho stupně; v tomto případě totiž všechny čtyři determinanty soustavy rovnic, určujících střed plochy, rovnají se nulle, tak že má plocha nesčíslné množství středů, které jsou na přímce.

Z toho dále plyne, že se dá pro tento případ levá strana rovnice (I) napsati ve formě součinu dvou stejnoměrných trojčlenů, totiž

$$(P_1x + P_2y + P_3z)(Q_1x + Q_2y + Q_3z) = 0 .$$

Tomu se obecně vyhoví, když:

$$A_k + \nu a_k + \mu(B_k + \nu b_k) = 0 \qquad \text{(II)}$$

čili

$$A_k + \mu B_k + \nu(a_k + \mu b_k) = 0 \qquad \text{(III)}$$

pro $k = 1, 2, 3$; hodnoty μ, ν jsou určité.

Soustava první povrchových přímek hyperb. paraboloidu jest určena rovnicemi:

$$A + tB = 0 ,$$
$$a + tb = 0 ;$$

soustava druhá rovnicemi:

$$A + \tau a = 0 ,$$
$$B + \tau b = 0 .$$

Jednoduchou transformací lze tyto rovnice nahraditi následujícími, a sice pro první soustavu:

$$A + \nu a + t(B + \nu b) = 0 ,$$
$$a + tb = 0 ;$$

druhou soustavu:

$$A + \mu B + \tau(a + \mu b) = 0 ,$$
$$B + \tau b = 0 .$$

Uváživše podmínku (II), můžeme na základě rovnic první soustavy psáti rovnici řídící plochy kuželové ve formě:

$$[(B_1 + \nu b_1)x + (B_2 + \nu b_2)y + (B_3 + \nu b_3)z].[(a_1 + \mu b_1)x + (a_2 + \mu b_2)y + (a_3 + \mu b_3)z] = 0. \qquad \text{(IV)}$$

K témuž výsledku dospějeme na základě rovnic soustavy druhé, uváživše podmínku (III).

Podmínka (II) nám praví, že přímky *soustavy první* jsou rovnoběžné s rovinou, jejíž rovnicí jest:

$$(B_1 + \nu b_1)x + (B_2 + \nu b_2)y + (B_3 + \nu b_3)z = 0 . \qquad \text{(V)}$$

Z podmínky (III) pak plyne, že přímky *soustavy druhé* jsou rovnoběžné s rovinou, jejíž rovnicí jest:

$$(a_1 + \mu b_1)x + (a_2 + \mu b_2)y + (a_3 + \mu b_3)z = 0 . \qquad \text{(VI)}$$

Jest tedy rovnicí (V) vyjádřena *první* a rovnicí (VI) *druhá* řídící rovina hyp. paraboloidu.*)

*) Jsou-li řídící roviny hyp. paraboloidu k sobě kolmy, nazývá se stejnostranným.

Dle věty *b*) odst. 6. pak možno vysloviti větu: Asymptotická rovina, stanovená určitou povrchovou přímkou, jest rovnoběžná s onou řídící rovinou, ku které jest zmíněná přímka rovnoběžná.

Hodnoty μ, ν určíme z podmínky (II.); dle této platí totiž

$$\begin{aligned} \nu a_1 + \mu B_1 + \mu\nu b_1 &= -A_1 \\ \nu a_2 + \mu B_2 + \mu\nu b_2 &= -A_2 \\ \nu a_3 + \mu B_3 + \mu\nu b_3 &= -A_3, \end{aligned}$$

$$\nu = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & b_1 \\ A_2 & B_2 & b_2 \\ A_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & B_1 & b_1 \\ a_2 & B_2 & b_2 \\ a_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \quad \mu = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & A_1 & b_1 \\ a_2 & A_2 & b_2 \\ a_3 & A_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & B_1 & b_1 \\ a_2 & B_2 & b_2 \\ a_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix}}.$$

Ježto ale

$$\mu\nu = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & B_1 & A_1 \\ a_2 & B_2 & A_2 \\ a_3 & B_3 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & B_1 & b_1 \\ a_2 & B_2 & b_2 \\ a_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix}},$$

musí

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & b_1 \\ A_2 & B_2 & b_2 \\ A_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & A_1 & b_1 \\ a_2 & A_2 & b_2 \\ a_3 & A_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & B_1 & A_1 \\ a_2 & B_2 & A_2 \\ a_3 & B_3 & A_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & B_1 & b_1 \\ a_2 & B_2 & b_2 \\ a_3 & B_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

což souhlasí s podmínkou $\Delta = 0$.

Poznámka. Co zde analyticky dokázáno, lze také stručně takto odůvodniti:

Řídící plocha kuželová plochy určuje její křivku úběžnou. Hyperbolický paraboloid má dvě řídící roviny, proto se skládá jeho úběžná křivka ze dvou přímek, vyskytuje se tedy v každé soustavě povrchových přímek jedna úběžná přímka. I dotýká se úběžná rovina z té příčiny hyperb. paraboloidu v průsečíku jeho úběžných přímek, který jest dán směrem průsečnice řídících rovin (směrem osy hyp. paraboloidu). Přímky soustavy první protínají úběžnou přímku soustavy druhé, což znamená, že přímky soustavy první musí býti rovnoběžné s rovinou, určující úběžnou přímku soustavy druhé, t. j. s první rovinou řídící;

podobně jsou přímky soustavy druhé rovnoběžné s rovinou, určující úběžnou přímku soustavy první, t. j. s řídící rovinou druhou.

Asymptotická rovina, přímkou první soustavy stanovená, jest určena ještě přímkou druhé soustavy, protínající onu v bodě úběžném, t. j. přímkou úběžnou druhé soustavy, což znamená, že jest rovnoběžná s první řídící rovinou.

13. *Polárná rovina plochy mimosměrek 2-ho stupně vzhledem k určitému bodu; diametrálná rovina, združená s určitým směrem.*

Stanovme dotyčnou křivku plochy kuželové, opsané z bodu (X, Y, Z) ku ploše mimosměrek 2-ho stupně, určené rovnicemi

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} + t\mathrm{B} = 0 \\ a + tb = 0 \end{array}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Tečná rovina v bodě (x, y, z) této plochy má rovnici

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}(\xi\eta\zeta), & \mathrm{B}(xyz) \\ a(\xi\eta\zeta), & b(xyz) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{A}(xyz), & \mathrm{B}(\xi\eta\zeta) \\ a(xyz), & b(\xi\eta\zeta) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Poněvadž má tato rovina obsahovati bod (X, Y, Z), platí

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}(\mathrm{XYZ}), & \mathrm{B}(xyz) \\ a(\mathrm{XYZ}), & b(xyz) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{A}(xyz), & \mathrm{B}(\mathrm{XYZ}) \\ a(xyz), & b(\mathrm{XYZ}) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III)}$$

Tuto lze psáti ve formě

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z + \sigma_4 = 0, \qquad \text{(IV)}$$

značí-li

$$\sigma_k = (\varrho_{k1} + \varrho_{1k})\,\mathrm{X} + (\varrho_{k2} + \varrho_{2k})\,\mathrm{Y} + (\varrho_{k3} + \varrho_{3k})\,\mathrm{Z} + (\varrho_{k4} + \varrho_{4k}),$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}^k & \mathrm{B}_i \\ a_k & b_i \end{vmatrix} = \varrho_{ki}.$$

Rovnice (IV) s rovnicemi (I) stanoví dotyčné body (x, y, z). Ježto ale σ_k jest na parametru (t) nezávislým, plyne ze (IV), že veškeré dotyčné body jsou v jedné rovině, jejíž rovnice (III) má v podstatě formu (II), značí-li (xyz) souřadnice bodu, mimo plochu se nalézajícího.

Tato rovina nazývá se polárnou rovinou vzhledem k bodu zmíněnému.

Je-li bod (XYZ) úběžným, tak že $\mathrm{X} = \infty$, $\mathrm{Y} = \infty$, $\mathrm{Z} = \infty$, avšak $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}$, $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}$, jsou hodnoty konečné a určité, dá se rovnice (IV) napsati ve formě

$$\omega_1 \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} + \omega_2 \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}} + \omega_3 = 0,$$

při čemž

$$\omega_k = (\varrho_{k1} + \varrho_{1k})\,x + (\varrho_{k2} + \varrho_{2k})\,y + (\varrho_{k3} + \varrho_{3k})\,z + (\varrho_{k4} + \varrho_{4k}),$$
což znamená, že prochází polarná rovina, bodu úběžnému příslušná, středem plochy; i nazývá se rovinou diametralnou, združenou se směrem, jenž určuje onen bod úběžný.

14. *Plochou normal dle určité povrchové přímky na ploše mimosměrek jest stejnostranný hyperb. paraboloid, jehož vrchol jest v centru zmíněné přímky.*

Budiž dána plocha mimosměrek rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Mějtež dále α_k, β_k, γ_{ki}, týž význam jako v odstavci 9.

V bodě (x, y, z) dotýká se plochy rovina T,
„ (x', y', z') „ „ „ „ T′,

a budiž T′ ⊥ T.

Normala v bodě (x, y, z) plochy mimosměrek jest patrně průsečnicí roviny R, bod tento obsahující a kolmé ku přímce t), s rovinou T′, kolmou ku tečné rovině T v bodě (x, y, z) a přímku (t) obsahující.

Souhrnem normal dle povrchové přímky (t) jest určena *plocha normal.*

Patrno, že rovina T′, obsahujíc dvě povrchové přímky plochy normal [normalu a přímku (t)], dotýká se této plochy v bodě (x, y, z). Z toho plyne, že tečná rovina T′, stanovená v bodě (x, y, z) ku ploše normal, jest kolmá ku tečné rovině T, stanovené v tomže bodě společné přímky (t) ku ploše původní.

Jest tedy normala plochy v bodě (xyz) dána rovnicemi:

$$\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta - (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$(\beta_1 x' + \gamma_{11})\,\xi + (\beta_2 x' + \gamma_{21})\eta + (\beta_3 x' + \gamma_{31})\,\zeta + \beta_4 x' + \gamma_{41} = 0, \quad \text{(III)}$$

při čemž platí dle odst. 9.

$$xx' \sum_1^3 \beta_k^2 + (x + x') \sum_1^3 \beta_k \gamma_{k1} + \sum_1^3 \gamma_{k1}^2 = 0. \quad \text{(IV)}$$

Vyloučíme-li z (II) pomocí (I) veličiny y, z, vyskytne se ve (II) parametr x linearně a sice jenom v prostém členu.

Nahradíme-li v (III) veličinu x' pomocí (IV) veličinou x, vyskytne se tam parametr x ve všech členech linearně.

Vyloučením parametru x z rovnic (II), (III) obdržíme rovnici ohledně ξ, η, ζ stupně druhého; jest tedy plocha normal plochou mimosměrek stupně druhého.

Z (II) zároveň patrno, že jest rovina, kolmá ku přímce (t), jednou řídící rovinou plochy normal.

Rovina, dotýkající se plochy normal v bodě úběžném přímky (t), jest kolma dle předešlého k rovině asymptotické původní plochy; jest to tedy rovina centralná. Z té příčiny jest centralná rovina původní plochy druhou řídící rovinou plochy normal.

Poněvadž jsou řídící roviny k sobě kolmy, jest plocha normal stejnostranný hyperb. paraboloid.

Vrcholem hyperb. paraboloidu nazýváme dotyčný bod roviny tečné, kolmé ku směru osy hyp. paraboloidu, danému průsečnicí řídících rovin.

Průsečnice řídících rovin plochy normal jest však kolmá k rovině asymptotické původní plochy. Tato rovina dotýká se ale plochy normal v bodě, v němž se centralná rovina dotýká původní plochy, t. j. v centru přímky (t).

Nalézá se tedy vrchol plochy normal, stanovené dle přímky (t) plochy mimosměrek, v centru involuce této přímky.

15. *Kuželová plocha 2-ho stupně jakožto zvláštní případ jednodílného hyperboloidu.*

Dle odstavce 4. tohoto pojednání platí pro rozvinutelné elementy plochy mimosměrek, dané rovnicemi

$$A = 0, \quad a = 0,$$

soustava rovnic:

$$A = 0, \quad a = 0, \quad A' = 0, \quad a' = 0.$$

Dle toho platí pro vrcholy (v našem smyslu) plochy mimosměrek 2-ho stupně, dané rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} A + tB &= 0 \\ a + tb &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

mimo soustavu (I) ještě soustava rovnic

$$\left.\begin{aligned} B &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Těmto čtyřem rovnicím vyhoví se pro *jakékoliv t určitými* hodnotami x, y, z, když

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III)}$$

Vyhoví-li se tedy podmínce (III), má plocha, daná rovnicemi (I), veškeré elementy rozvinutelné; mimo to jsou veškeré vrcholy v jediném bodě, kterým patrně veškeré povrchové přímky .procházejí· Souřadnice tohoto bodu určíme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad a = 0, \\ B &= 0, \quad b = 0. \end{aligned}$$

Tato plocha nazývá se *kuželovou plochou* 2-ho stupně.

Rovnice plochy, stanovené soustavou (I), zní ve tvaru rozvinutém:

$$\begin{aligned} &\varrho_{11}x^2 + \varrho_{22}y^2 + \varrho_{33}z^2 + (\varrho_{12} + \varrho_{21})xy + (\varrho_{23} + \varrho_{32})yz \\ &\quad + (\varrho_{31} + \varrho_{13})zx + (\varrho_{14} + \varrho_{41})x + (\varrho_{24} + \varrho_{42})y \\ &\quad + (\varrho_{34} + \varrho_{43})z + \varrho_{44} = 0, \end{aligned} \tag{IV}$$

značí-li

$$\varrho_{ki} = \begin{vmatrix} A_k & B_i \\ a_k & b_i \end{vmatrix}.$$

Má-li (IV) znamenati kuželovou plochu, musí se vyhověti podmínce (III).

Potom ale platí také:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & -B_4 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Provedeme-li v posledním vzorci naznačené násobení, obdržíme:

$$\begin{vmatrix} \varrho_{11} + \varrho_{11}, & \varrho_{12} + \varrho_{21}, & \varrho_{13} + \varrho_{31}, & \varrho_{14} + \varrho_{41} \\ \varrho_{21} + \varrho_{12}, & \varrho_{22} + \varrho_{22}, & \varrho_{23} + \varrho_{32}, & \varrho_{24} + \varrho_{42} \\ \varrho_{31} + \varrho_{13}, & \varrho_{32} + \varrho_{23}, & \varrho_{33} + \varrho_{33}, & \varrho_{34} + \varrho_{43} \\ \varrho_{41} + \varrho_{14}, & \varrho_{42} + \varrho_{24}, & \varrho_{43} + \varrho_{34}, & \varrho_{44} + \varrho_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{V}$$

Má-li znamenati rovnice (IV) plochu kuželovou, musí se vyhověti podmínce (V), což jest také známo z theorie rovnic 2-ho stupně.

16. Dvojná křivka plochy mimosměrek; plocha různosměrek (rozvinutelná) dotýkající se plochy mimosměrek dvojnásobně.

Zkoumejme, které z povrchových přímek plochy mimosměrek, jež jest určena rovnicemi

$$A = 0, \quad a = 0, \tag{1}$$

protíná libovolná její povrchová přímka, určená parametrem (t) a tedy stanovená rovnicemi

$$A(t) = 0, \quad a(t) = 0. \qquad (2)$$

Abychom obdrželi podmínku, za kterou tato přímka protíná povrchovou přímku, určenou rovnicemi

$$A(t+u) = 0, \quad a(t+u) = 0, \qquad (3)$$

musíme z těchto čtyř posledních rovnic vyloučiti proměnné x, y, z, čímž obdržíme

$$\Sigma \pm \left[A_1(t),\ a_2(t),\ A_3(t+u),\ a_4(t+u) \right] = 0. \qquad (4)$$

Z této rovnice pak vypočteme hodnoty veličiny u, a na základě toho jsme s to stanoviti hodnoty parametru $(t+u)$, jež určují hledané přímky na ploše.

Předpokládejme algebraickou plochu mimosměrek stupně n.

Znamenejž ku př. A algebr. funkci veličiny t stupně $k$tého; a algebraickou funkci veličiny t stupně $l$tého.

Vyloučíme-li z rovnic $A = 0$, $a = 0$, plochu určujících, dle některé methody, na př. Sylvestrovy veličinu t, obdržíme resultantu, která jest ohledně součinitelů, jež obsahují veličiny x, y, z linearně, stupně $k + l$; znamená tedy $k + l = n$ stupeň plochy.

V tom případě možno ale psáti dle theorému Taylorova:

$$A(t+u) = \sum_{m=0}^{k} A^{(m)} \frac{u^m}{m!},$$

$$a(t+u) = \sum_{m=0}^{l} a^{(m)} \frac{u^m}{m!},$$

při čemž

$$A^{(m)} = \frac{d^m A}{dt^m}, \quad A^{(0)} = A, \quad 0! = 1, \quad u^0 = 1.$$

Podmínka (4) z předu odvozená dá se pak napsati ve formě

$$\Sigma \pm \left[A_1,\ a_2,\ \sum_0^k A_3^{(m)} \frac{u^m}{m!},\ \sum_0^l a_4^{(m)} \frac{u^m}{m!} \right] = 0.$$

Tato rovnice má tvar

$$\sum_{r=0}^{r=k+l} L_r u^r = 0,$$

při čemž

$$L_0 = \Sigma \pm (A_1 a_2 A_3 a_4) = 0,$$

$$L_1 = \Sigma \pm (A_1 a_2 A_3 a'_4) + \Sigma \pm (A_1 a_2 A'_3 a_4) = 0.$$

Krátíme-li tuto rovnici veličinou u^2 a uvážíme-li, že $k + l = n$, obdržíme konečně

$$\sum_{r=0}^{n-2} L_{r+2} u^r = 0,$$

což podává $n - 2$ hodnot pro veličinu u.

Z toho plyne: Na každé povrchové přímce plochy mimosměrek stupně n, nalézá se $n - 2$ bodů, jimiž prochází pokaždé ještě jedna povrchová přímka. Z té příčiny má plocha v každém tomto bodě dvě různé roviny tečné, z nichž jedna prochází jednou a druhá druhou povrchovou přímkou.

Projdeme-li nepřetržitě veškeré povrchové přímky plochy, tvoří ony body na ploše křivku, v jejíchž bodech má plocha pokaždé dvě různé roviny tečné; tato křivka zove se *dvojná křivka* *) plochy a protíná každou povrchovou přímku v n—2 bodech.

Na *dvojné křivce* nalezají se také *vrcholy* plochy, to jest body, v nichž se dvě soumezné přímky povrchové protínají; v těchto bodech má *dvojná křivka* karaktér *křivky vratu*, vyskytující se na plochách různosměrek, a obě tečné roviny se v nich pokaždé ztotožňují; tyto body jsou *body vratu* čili *cuspidálními body* plochy mimosměrek.

Dvě se protínající povrchové přímky plochy mimosměrek stanoví rovinu, která se plochy dotýká *ve dvou bodech*, z nichž pokaždé jeden nalezá se na jedné z oněch přímek.

Takových rovin prochází n—2 každou povrchovou přímkou plochy mimosměrek stupně n.

Projdeme-li nepřetržitě veškeré povrchové přímky plochy, obalují tyto roviny *plochu různosměrek*, dotýkající se *dvojnásobně* dané plochy mimosměrek a mající s každou její povrchovou přímkou n—2 společných rovin.

Jenom při těch rovinách, jež obsahují *vrcholové přímky* plochy, ztotožňují se oba body dotyčné.

Mimo to ovšem platí o tečných rovinách ve vrcholech a

---

*) Vyloučíme-li z rovnic (3) a rovnice (4) veličiny t, u, obdržíme rovnici, která spojena s rovnicemi (1) určuje *dvojnou křivku* na ploše mimosměrek.

v ostatních bodech příslušné vrcholové přímky na plošc mimosměrek to, co bylo v odstavci 4. odvozeno.

17. *Na ploše mimosměrek stupně n tého nalézá se* $2n-4$ *vrcholových přímek a tedy* $2n-4$ *vrcholů* (*bodů cuspidalních*).

Znamená-li

$$A_k \equiv A_{1k}x + A_{2k}y + A_{3k}z + A_{4k},$$
$$a_k \equiv a_{1k}x + a_{2k}y + a_{3k}z + a_{4k},$$

jest dána plocha mimosměrek stupně n rovnicemi

$$\sum_0^p A_k t^k = 0, \quad \sum_0^q a_k t^k = 0, \quad p + q = n.$$

Hodnoty parametru t pro vrcholové přímky vypočítáme z rovnice

$$\Sigma \pm \left(\sum_0^p A_{1k} t^k, \quad \sum_0^q a_{2k} t^k, \quad \frac{d}{dt}\sum_0^p A_{3k} t^k, \quad \frac{d}{dt}\sum_0^q a_{4k} t^k\right) = 0$$

čili

$$\Sigma \pm \left(\sum_0^p A_{1k} t^k, \quad \sum_0^q a_{2k} t^k, \quad \sum_1^p k A_{3k} t^{k-1}, \quad \sum_1^q k a_{4k} t^{k-1}\right) = 0.$$

Upravením obdržíme tuto rovnici ve formě

$$\sum_0^{2n-2} L_k t^k = 0.$$

Avšak

$$\begin{aligned}
L_{2n-2} &= \quad pq\, \Sigma \pm (A_{1p}, \quad a_{2q}, \quad A_{3p}, \quad a_{4q}) = 0.\\
L_{2n-3} &= p(q-1)\, \Sigma \pm (A_{1p}, \quad a_{2q}, \quad A_{3p}, \quad a_{4(q-1)})\\
&\quad + (p-1)q\, \Sigma \pm (A_{1p}, \quad a_{2q}, \quad A_{3(p-1)}, \quad a_{4q})\\
&\quad + pq\, \Sigma \pm (A_{1p}, \quad a_{2(q-1)}, \quad A_{3p}, \quad a_{4q})\\
&\quad + pq\, \Sigma \pm (A_{1(p-1)}, \quad a_{2q}, \quad A_{3p}, \quad a_{4q}) = 0.
\end{aligned}$$

Obdržíme tedy pro t rovnici

$$\sum_0^{2n-4} L_k t^k = 0,$$

což podává obecně $2n-4$ hodnot, čímž jest věta dokázána.