Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Krontil

O některých zvláštních řadách nekonečných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 2, 70--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108827

O některých zvláštních řadách nekonečných.

Napsal

Jan Kroutil,

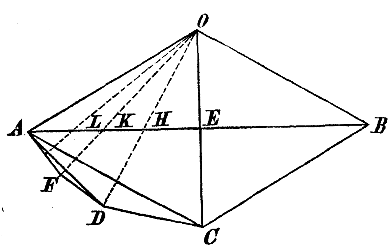
professor ve Valašském Meziříčí.

Jak známo, jest několik způsobů, kterými lze *daný* výraz přeměniti v řadu více méně pravidelnou. Jsou také návody, které nám dávají na ruku, jak bychom vytvořili konvergentní řadu a zároveň udali její součet. Není však žádného všeobecného způsobu, dle něhož by vždy bylo lze určiti součet dané řady. Proto není zajisté zbytečno, znáti součty aspoň řad takových, jejichž zákon výtvarný jest jednoduchý. Některé takové řady chci zde udati, jejichž součet, pokud mně aspoň známo, dosud nebyl nikde uveden.

Vepíšeme-li do kruhu o poloměru r pravidelný n-úhelník (obr. 1.), bude každá jeho strana $AB = 2r \sin\frac{\pi}{n}$; sestrojíme-li pak $OC \perp AB$, bude strana pravidelného $2n$-úhelníku

$$AC = 2r \sin\frac{\pi}{2n};$$

strana pravidelného $4n$-úhelníku $AD = 2r \sin\frac{\pi}{4n}$ atd.



Obr. 1.

Plocha tohoto do kruhu vepsaného pravidelného n-úhelníku jest, jak známo, $\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. Plocha trojúhelníku

$$ACB = \frac{AC \,.\, CB}{2}\sin ACB$$

$$= 2r^2 \sin^2\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Podobně jest plocha trojúhelníku ADC $= 2r^2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} \sin \frac{\pi}{2n}$;

plocha trojúhelníku AFD $= 2r^2 \sin^2 \frac{\pi}{8n} \sin \frac{\pi}{4n}$ atd.

Plocha celého kruhu πr^2 skládá se z plochy pravidelného n-úhelníku, z n-násobné plochy trojúhelníku ACB, z $2n$-násobné plochy trojúhelníku ADC, ze $4n$-násobné plochy trojúhelníku AFD a. t. d., tak že jest

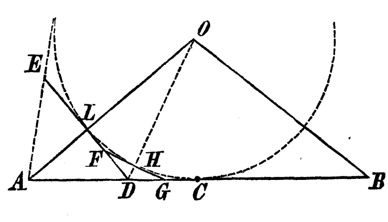
$$\pi r^2 = \tfrac{1}{2} nr^2 \sin \frac{2\pi}{n} + n \,.\, 2r^2 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{2n} + 2n \,.\, 2r^2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin^2 \frac{\pi}{4n}$$
$$+ 4n \,.\, 2r^2 \sin \frac{\pi}{4n} \sin^2 \frac{\pi}{8n} + \ldots,$$

z čehož jde, dáme-li první člen ze strany pravé na levou, dělíme-li celou rovnici výrazem $2nr^2$, a píšeme-li místo $\frac{\pi}{n}$ krátce α, následující velmi jednoduchá řada:

$$(1) \quad \frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{4} \sin 2\alpha = \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4} + \ldots$$
$$+ 2^k \sin \frac{\alpha}{2^k} \sin^2 \frac{\alpha}{2^{k+1}} + \ldots \text{ in inf.}$$

Řada tato platí, jak z odvození patrno, pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$, neboť n jest nutně větší než 2.

Opíšeme-li zase kruhu o poloměru r pravidelný n-úhelník (obr. 2.), jest jeho strana $AB = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.



Obr. 2.

Spojíme-li konečné její body se středem kruhu a vztýčíme v průsecích kruhu s přímkami spojovacími na tyto kolmice, budou mezi stranami n-úhelníku ležící části jejich, jako ED, stranami pravidelného $2n$-úhelníku témuž kruhu opsaného, i bude

$ED = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$. Podobně bude $FG = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ a t. d.

Z $\triangle$ ALD však snadno se odvodí, že

$$AL = LD \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n};$$

podobně z $\triangle$ DGH plyne $DH = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ a t. d.

Plocha trojúhelníku $AED = \frac{1}{2} AL \,.\, ED = r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$;

podobně plocha $\triangle$ $DFG = r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n}$ a t. d.

Plocha kruhu jest patrně rovna ploše opsaného n-úhelníku $n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ zmenšené o n-násobnou plochu trojúhelníku AED, $2n$-násobnou plochu trojúhelníku DFG a t. d. Máme tedy:

$$\pi r^2 = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \left(nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} + 2\, nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n} + \ldots\right),$$

z čehož jde, píšeme-li zase α místo $\frac{\pi}{n}$, řada řadě hořejší velmi podobná:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} + \ldots \\ + 2^k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^k} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^{k+1}} + \ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Řada tato platí zase pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$.*)

---

*) Řadu (2) lze odvoditi ze známé stejniny $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$. Z této

totiž jde $\qquad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Podobně je $\qquad 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$,

$$4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{8} = 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} - 8 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Dále je z obrazce patrno, že $LD = AD \,.\, \cos\frac{\pi}{\pi}$, z čehož $AD = LD \sec\frac{\pi}{n}$, aneb píšeme-li za LD dříve uvedenou hodnotu $r \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, také

$$AD = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \sec\frac{\pi}{n}.$$

Podobně jest

$$DG = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} \sec\frac{\pi}{2n} \text{ a t. d.}$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme v levo AC čili $r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, tak že jest

$$r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \sec\frac{\pi}{n} + r \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} \sec\frac{\pi}{2n} + \dots$$

nebo, píšeme-li α místo $\frac{\pi}{n}$ a zkrátíme,

$$(3) \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sec\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} \sec\frac{\alpha}{2} + \dots + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{k+1}} \sec\frac{\alpha}{2^k} + \dots$$

kteráž řada zase platí pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Vypočteme-li obdobně úseky, jaké utínají na straně AB *vepsaného* pravidelného n-úhelníku kolmice vedené ze středu kruhu na strany n-úhelníku, $2n$-úhelníku, $4n$-úhelníku ..., tedy délky HE, KH, LK, ... (obr. 1.), obdržíme řadu dosti složitou, totiž

$$(4) \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{4} \sec\frac{3\alpha}{4} \sec\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{8} \sec\frac{7\alpha}{8} \sec\frac{3\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{16} \sec\frac{15\alpha}{16} \sec\frac{7\alpha}{8} + \dots$$

jejíž obecný člen jest

$$\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}} \sec\frac{(2^k - 1)\,\alpha}{2^k} \sec\frac{(2^{k+1} - 1)\alpha}{2^{k+1}},$$

a která též platí pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Sečtením těchto rovnic obdržíme na levé straně řadu (2), na pravé straně pak $\operatorname{tg}\alpha - \lim 2^k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^k}$ čili $\operatorname{tg}\alpha - \alpha \lim \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^k}}{\frac{\alpha}{2^k}}\right)$ čili $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$.

Z řad uvedených lze známými cestami přijíti k jiným. Tak z řady (1) na př. obdržíme differencováním, poněvadž, jak snadno se najde,

$$\frac{d}{d\alpha}\left(2^k \sin\frac{\alpha}{2^k}\sin^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) = \sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{3\alpha}{2^{k+1}}$$

řadu velmi jednoduchou

$$(5)\qquad \sin^2\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{3\alpha}{4} + \dots + \sin\frac{\alpha}{2^k}\sin\frac{3\alpha}{2^k} + \dots,$$

kteráž přejde, zavedeme-li místo $\sin\frac{\alpha}{2^k}$ hodnotu

$$\tfrac{1}{4}\sin\frac{4\alpha}{2^k}\sec\frac{2\alpha}{2^k}\sec\frac{\alpha}{2^k},$$

v řadu poněkud složitější, ale také velmi pravidelnou, totiž

$$(6)\qquad 4\sin^2\alpha = \sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{2\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{4\alpha}{2} + \sec\frac{\alpha}{4}\sec\frac{2\alpha}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{4\alpha}{4} + \dots.$$

Z řady (2) nabýváme differencováním, protože

$$\frac{d}{d\alpha}\left(2^k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^k}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{3\alpha}{2^{k+1}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2^k}\cos^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}} = \frac{16\sin^3\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{3\alpha}{2^{k+1}}}{\sin^2\frac{\alpha}{2^{k-1}}},$$

buď řady

$$(7)\qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha} + \frac{\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{8}\sin\frac{3\alpha}{8}}{\cos^2\frac{\alpha}{8}\cos^2\frac{\alpha}{4}} + \dots$$

nebo řady

$$(8)\qquad \tfrac{1}{16}\,\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin^2 2\alpha} + \frac{\sin^3\frac{\alpha}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^3\frac{\alpha}{8}\sin\frac{3\alpha}{8}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \ldots.$$

Z řady (3) jde zase differencováním, poněvadž

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sec\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{\sec^2\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\left(\sec\frac{\alpha}{2^k} + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2^k}\right),$$

tato velmi jednoduchá řada dvojitá

$$(9)\qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sec\alpha\sec^2\frac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{4}\sec\frac{\alpha}{2}\sec^2\frac{\alpha}{4} + \tfrac{1}{8}\sec\frac{\alpha}{4}\sec^2\frac{\alpha}{8} + \ldots \text{ in inf.} \\ + \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2\alpha\sec^2\frac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sec^2\frac{\alpha}{4} + \tfrac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}\sec^2\frac{\alpha}{8} + \ldots \text{ in inf.} \end{cases}.$$

Z řady (5) obdržíme podobně řadu dvojitou:

$$(10)\qquad \sin 2\alpha = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{4}\sin\alpha + \tfrac{1}{8}\sin\frac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{16}\sin\frac{\alpha}{4} + \ldots \text{ in inf.} \\ + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4} + \tfrac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{3\alpha}{8} + \ldots \text{ in inf.} \end{cases}.$$

Ve Valaš. Meziříčí, v říjnu 1886.