Vladimír Knichal

Čísla Gaussova. [II.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 62 (1933), No. 7, R101--R105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108817

ROZHLEDY
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

ROČNÍK 12 (1932/33). ČÍSLO 4.

# Čísla Gaussova.

*Vl. Knichal.*

(Dokončení.)

**Věta 2.** Každé číslo Gaussovo $\alpha$, pro něž $N(\alpha) > 1$, dá se rozložiti v součin Gaussových prvočísel, t. j. platí $\alpha = \pi_1 . \pi_2 \ldots \pi_n$, kde $\pi_i$ je Gaussovo prvočíslo ($i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 1$, celé).

**Důkaz** provedeme úplnou indukcí vzhledem k $N(\alpha)$. Uvědomme si napřed: je-li $\alpha$ Gaussovo prvočíslo, naše věta je správná, není-li $\alpha$ Gaussovo prvočíslo, existují dvě Gaussova čísla $\alpha_1, \alpha_2$ taková, že platí

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2, \; N(\alpha_1) > 1, \; N(\alpha_2) > 1;$$

tedy

$$1 < N(\alpha_1) < N(\alpha), \; 1 < N(\alpha_2) < N(\alpha).$$

1. Buď $N(\alpha) = 2$. Pak je $\alpha$ Gaussovo prvočíslo; jinak by bylo $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2$ by byla Gaussova čísla, pro něž $1 < N(\alpha_1) < N(\alpha) = 2$, což je vyloučeno.

2. Buď $n \geqq 2$, celé. Předpokládejme, že máme naši větu již dokázánu pro všechna uvažovaná $\alpha$, pro něž $N(\alpha) \leqq n$. Pak platí také, jestliže $N(\alpha) = n + 1$.

Buďto je totiž $\alpha$ Gaussovo prvočíslo, anebo platí $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2$ jsou Gaussova čísla, pro něž $1 < N(\alpha_1) < N(\alpha) = n + 1$, $1 < N(\alpha_2) < N(\alpha) = n + 1$. Tedy můžeme psáti ($r \geqq 1$, celé, $s \geqq 1$, celé)

$$\alpha_1 = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_r, \; \alpha_2 = \pi'_1\pi'_2 \ldots \pi'_s,$$

kde $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$, $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$ jsou Gaussova prvočísla. Pak

$$\alpha = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_r\pi'_1\pi'_2 \ldots \pi'_s.$$

**Věta 3.** Buďte $r \geqq 1$, $s \geqq 1$, celá čísla. Nechť $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$, $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$ jsou Gaussova prvočísla a nechť platí

$$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_r = \pi'_1\pi'_2 \ldots \pi'_s.$$

Pak $r = s$ a systém čísel $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ je totožný až na pořadí a na jednotkové faktory (t. zn. Gaussovy jednotky) se systémem

$\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$. (T. zn. při vhodném označení dolních indexů lze psáti $\pi_i = \varepsilon_i \pi'_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ jsou Gaussovy jednotky.)

**Důkaz** provedeme úplnou indukcí vzhledem k $r$.*)

1. Buď $r = 1$. Nechť

$$\pi_1 = \pi'_1 \pi'_2 \ldots \pi'_s.$$

Kdyby $s \geqq 2$, dalo by se $\pi_1$ rozložiti v součin Gaussových čísel o normách větších než 1, což je vyloučeno. Tedy je $s = 1$ a $\pi_1 = \pi'_1$.

2. Buď $n \geqq 1$, celé. Předpokládejme, že naše věta platí pro všechna uvažovaná $r \leqq n$. Dokážeme si, že platí i pro $r = n + 1$. Nechť tedy

$$\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_{n+1} = \pi'_1 \pi'_2 \ldots \pi'_s. \tag{6}$$

Postupným užitím věty 1. (součin $\pi'_1 \pi'_2 \ldots \pi'_s$ je dělitelný $\pi_{n+1}$) se přesvědčíme, že jedno z čísel $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_s$ je dělitelno $\pi_{n+1}$. Vhodným označením indexů docílíme toho, že je to právě $\pi'_s$. Tedy $\pi'_s = \varepsilon \pi_{n+1}$, kde $\varepsilon$ je Gaussova jednotka. Po vykrácení obdržíme tudíž z (6)

$$\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n = (\varepsilon \pi'_1) \cdot \pi'_2 \ldots \pi'_{s-1}.$$

Poněvadž naše věta je správná (podle předpokladu) pro $r = n$, je[5]) $s = n + 1$ a vhodným označením indexů lze docíliti toho, že

$$\pi_1 = \varepsilon'_1 (\varepsilon \pi'_1) = \varepsilon_1 \pi'_1, \quad \pi_2 = \varepsilon_2 \pi'_2, \ldots, \pi_n = \varepsilon_n \pi_n,$$

při čemž $\varepsilon'_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou Gaussovy jednotky.[6])

**Důsledek.** Z věty 2. a 3. plyne ihned důsledek, že každé číslo Gaussovo $\alpha$, pro něž $N(\alpha) > 1$, dá se až na jednotkové faktory (Gaussovy jednotky) jediným způsobem rozložiti v součin Gaussových prvočísel.

Dalším naším úkolem bude rozhodnouti, zda dané Gaussovo číslo $\alpha$ je Gaussovým prvočíslem, nebo ne. Nežli však odvodíme hledané kriterium, dokážeme si dvě pomocné věty.

**Věta 4.** Buď $p$ liché prvočíslo. V této a následující větě bude $S$ značiti systém čísel $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, \frac{1}{2}(p-1), -\frac{1}{2}(p-1)$.

Ke každému číslu $a$ z $S$ lze nalézti jediné číslo $a'$ rovněž z $S$ takové, že[7]) $aa' \equiv 1 \pmod{p}$.

**Důkaz.** Nejdříve je patrno, že každé celé číslo $b$ nesoudělné s $p$ je kongruentní s nějakým číslem $z$ ze systému $S$ podle modulu $p$.

[5]) $\varepsilon \pi'_1$ je rovněž Gaussovo prvočíslo.

[6]) $\pi_{n+1} = \varepsilon_{n+1} \pi'_s$, kde $\varepsilon_{n+1} = 1/\varepsilon$ platí již podle hořejšího.

[7]) Jsou-li $a, b, p$ ($p \neq 0$) celá čísla, znamená $a \equiv b \pmod{p}$ (čti $a$ je kongruentní s $b$ podle modulu $p$) totéž, co $p/(a-b)$. Snadno se přesvědčíme, že $a \equiv a$, je-li $a \equiv b$, je $b \equiv a$, je-li $a \equiv b$ a $b \equiv c$, je $a \equiv c$ a konečně je-li $a \equiv b$ a $c \equiv d$, je $a + c \equiv b + d$, $a - c \equiv b - d$, $ac \equiv bd$, vše podle téhož modulu $p$.

*) Bez újmy obecnosti lze předpokládati, že $r \leqq s$.

Určeme totiž celé číslo $c$ tak, aby $|b - cp|$ bylo nejmenší. Klaďme $z = b - cp$. Pak je předně $z \equiv b \pmod p$, $z \neq 0$ (neboť jinak by $p/b$). Poněvadž $|b - cp|$ je minimální, je $|z| \leqq |z \pm p|$, tedy $z^2 \leqq (z \pm p)^2 = z^2 \pm 2zp + p^2$. Tudíž je $\mp 2zp \leqq p^2$ čili $|z| \leqq \frac{1}{2}p$ a $z$ patří tedy do $S$.

Každé číslo ze systému $R$: $a, a^2, a^3, \ldots, a^p$ je kongruentní s jedním číslem ze systému $S$. Tento systém obsahuje však pouze $p - 1$ čísel. Tudíž existují dvě čísla $a^r$, $a^s$ ($1 \leqq r < s \leqq p$; $r, s$ celé) ze systému $R$ taková, že

$$a^r \equiv a^s \pmod p,$$

t. zn., že $p/a^r(1 - a^{s-r})$. Poněvadž $(a, p) = 1$, je $p/(1 - a^{s-r})$, t. zn. $a^{s-r} \equiv 1 \pmod p$ $(s - r \geqq 1)$. Buď $a'$ ze systému $S$ takové, že $a^{s-r-1} \equiv a' \pmod p$. Je tudíž $aa' \equiv 1 \pmod p$.

Kdyby kromě $a'$ existovalo v $S$ ještě číslo $a''$ takové, že $aa'' \equiv 1 \pmod p$, bylo by $a(a' - a'') \equiv 0 \pmod p$ čili [ježto $(a, p) = 1$] $p/(a' - a'')$. Je však $|a'| < \frac{1}{2}p$, $|a''| < \frac{1}{2}p$ a tedy

$$|a' - a''| < \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}p = p.$$

Tudíž $$a' = a''.$$

**Věta 5.** Buď $p$ liché prvočíslo. Pak platí

$$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1)]^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod p.$$

**Důkaz.** Předpokládejme $p > 3$ (pro $p = 3$ věta je zřejmě správná). Buď $a$ číslo z $S$, $|a| \neq 1$. Určeme $a'$ z $S$ tak, aby $aa' \equiv 1 \pmod p$ (viz větu 4.). Pak $|a'| \neq 1$ (jinak by $|a| = 1$). Dále je $a \neq a'$, neboť jinak by $a^2 - 1$ bylo dělitelno $p$, čili buďto by bylo $a \equiv 1$, anebo $a \equiv -1 \pmod p$, t. j. bylo by $a = \pm 1$.

Do systému $A$ zařaďme právě všechna čísla $a$ z $S$, pro něž $|a| \neq 1$ a pro něž $a < a'$, kde $a'$ je číslo svrchu určené. Nechť $A$ sestává z těchto čísel (mezi sebou různých):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r.$$

Buď $a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ takové číslo z $S$, pro něž $a_i a'_i \equiv 1 \pmod p$. Jsou tedy podle věty 4. čísla $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_r$ vesměs mezi sebou různá. Označme tento systém $A'$. Žádné číslo $a_i$ ze systému $A$ není rovné žádnému číslu $a'_j$ ze systému $A'$. Kdyby $a_i = a'_j$, bylo by $1 \equiv a_j a'_j \equiv a_j a_i \pmod p$, tedy $a_j = a'_i$. Podle definice systému $A$ je $a_i < a'_i = a_j < a'_j$, tedy by bylo $a_i < a'_j$ proti předpokladu.

Žádná dvě čísla ze systému $S'$:

$$+1, -1, a_1, a_2, \ldots, a_r, a'_1, a'_2, \ldots, a'_r$$

nejsou si tedy rovna. Každé číslo $a$ z $S$ je však v $S'$ obsaženo: Můžeme předpokládati, že $|a| \neq 1$. Najděme $a'$ z $S$ tak, aby

$aa' \equiv 1 \pmod p$. Buď je nyní $a < a'$ a pak je $a$ v $A$, anebo je $a > a'$ a pak je $a'$ v $A$ a tedy $a$ v $A'$. Systémy $S$ a $S'$ se tedy až na pořadí shodují a je $2r + 2 = p - 1$ čili $r = \frac{1}{2}(p - 1) - 1$.

Tedy

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1) \cdot (-1)(-2) \ldots [-\tfrac{1}{2}(p-1)] \equiv$$
$$\equiv -(a_1 a'_1)(a_2 a'_2) \ldots (a_r a'_r) \equiv -1 \pmod p,$$

tedy $$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \tfrac{1}{2}(p-1)]^2 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \pmod p.$$

**Důsledek z věty 5.** Buď $p$ liché prvočíslo a nechť $\frac{1}{2}(p-1)$ je sudé (t. j. $p$ je tvaru $4n + 1$, kde $n$ je celé). Pak existuje celé číslo $z$ takové, že $z^2 \equiv -1 \pmod p$ [stačí klásti $z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{1}{2}(p-1)$].

**Věta 6.** Buď $p$ prvočíslo tvaru $4n + 1$ ($n$ celé). Pak $p$ není Gaussovo prvočíslo.

**Důkaz.** Podle důsledku z věty 5. existuje celé číslo $z$ takové, že $z^2 + 1$ je dělitelno $p$, tedy součin $(z + i)(z - i)$ je dělitelný $p$. Kdyby $p$ bylo Gaussovo prvočíslo, pak by podle věty 1. jeden z činitelů $z + i$, $z - i$ musel býti dělitelný $p$, t. j. muselo by existovati Gaussovo číslo $a + bi$ takové, že

$$ap + bpi = z \pm i$$

(platí buďto znaménko + anebo −). Tedy by muselo býti $bp = \pm 1$ pro nějaké celé $b$, což je vyloučeno.

**Věta 7.** 2 není Gaussovo prvočíslo a platí $2 = (1 + i)(1 - i)$. (Zřejmé.)

**Věta 8.** Buď $\alpha = a + bi$ Gaussovo číslo. $\alpha$ je Gaussovým prvočíslem tenkráte a jenom tenkráte, jestliže

1. buďto $\alpha$ je asociované číslo ku prvočíslu tvaru $4n + 3$ ($n$ celé),
2. anebo $\mathrm{N}(\alpha)$ je buďto prvočíslo tvaru $4n + 1$ neb $\mathrm{N}(\alpha) = 2$.

**Důkaz.** I. Buď $\alpha$ Gaussovo prvočíslo. Klaďme $\bar{\alpha} = a - bi$. (Vždy je $\mathrm{N}(\alpha) \geqq 2$.)

1. $\mathrm{N}(\alpha)$ je prvočíslo; je-li to sudé prvočíslo, je $\mathrm{N}(\alpha) = 2$, je-li to liché prvočíslo je $\mathrm{N}(\alpha)$ tvaru $4n + 1$, neboť součet celých kvadrátů $\mathrm{N}(\alpha) = a^2 + b^2$ nemůže nikdy býti tvaru $4n + 3$ (čtverec celého čísla je vždy buď tvaru $4n$ anebo tvaru $4n + 1$).

2. $\mathrm{N}(\alpha)$ není prvočíslo, tedy nechť $\mathrm{N}(\alpha) = r \cdot s$, kde $r \geqq 2$, $s \geqq 2$ jsou celá čísla. $\mathrm{N}(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha}$ je dělitelno $\alpha$ a tudíž podle věty 1. je buď $r$ anebo $s$ dělitelno $\alpha$. Nechť je to $r$, t. j. nechť platí $r = \alpha\beta$, kde $\beta$ je Gaussovo číslo. Z rovnice $\alpha\bar{\alpha} = rs$ plyne pak $\bar{\alpha} = \beta s$ čili[8]) $\alpha = \bar{\beta} s$. Poněvadž $\alpha$ je Gaussovo prvočíslo, musí (ježto $s \geqq 2$) $\bar{\beta} = \varepsilon$ býti Gaussova jednotka a $s$ musí býti prvo-

[8]) $\bar{\beta}$ je číslo konjugované ku $\beta$.

číslo. Poněvadž podle věty 6. a 7. nemůže $s$ býti ani tvaru $4n + 1$, ani nemůže $s = 2$, musí $s$ býti tvaru $4n + 3$.

II. 1. Nechť $\alpha$ je asociované ku prvočíslu $p$ tvaru $4n + 3$ ($n$ celé), t. j. nechť $\alpha = \varepsilon p$, kde $\varepsilon$ je Gaussova jednotka. Kdyby $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2$ jsou Gaussova čísla, pro něž $N(\alpha_1) > 1$, $N(\alpha_2) > 1$, bylo by $N(\alpha_1) . N(\alpha_2) = N(p) = p^2$. Tedy by bylo $N(\alpha_1) = p$, což je vyloučeno, neboť součet dvou celých kvadrátů $[N(\alpha_1)]$ nemůže býti tvaru $4n + 3$.

2. Nechť $N(\alpha) = p$ je prvočíslo. Kdyby $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2$ jsou Gaussova čísla, pro něž $N(\alpha_1) > 1$, $N(\alpha_2) > 1$, bylo by $p = N(\alpha_1) . N(\alpha_2)$, což je vyloučeno.

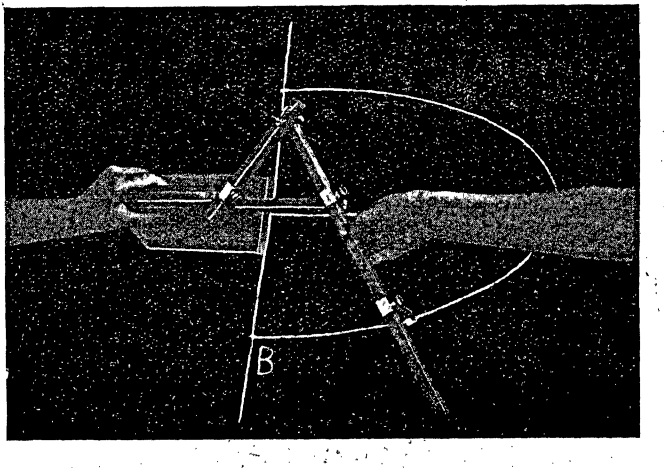
---

## Pomůcky k rýsování kuželoseček.

Dr. *Al. Wangler.*

(Dokončení.)

Přístroj je sestrojen takto: Na základním prkénku spočívá podstavec, kterým prochází uprostřed posuvné rameno a který nahoře nese otáčivou objímku. Stejná objímka je i na konci ramene posuvného. Každou touto objímkou prochází jedno ze dvou




Obr. 8.

otáčivě spojených ramen, jež mají nahoře stupnici (jeden dílek = 5 cm). Osa je spojující jest podél provrtána a prochází jí drát.