Ludvík Kraus
Základové arithmetiky. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 4, 232--264

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108813`

Chceme-li nyní srovnati svrchu řečené čtyři hypothesy, nutno si položiti otázku: jaká jest pravděpodobnost, že první hypothesa spíše nastane než jedna z ostatních tří.

Zde se vyskytuje relativní pravděpodobnost a tudíž dle 1., 2., 3., a 4. hypothesy jest

$$H_1 = \frac{\frac{256}{625}}{\frac{256}{625} + \frac{216}{625} + \frac{96}{625} + \frac{16}{625}} = \frac{256}{584},$$

dále $$H_2 = \frac{216}{584},\ H_3 = \frac{96}{584},\ H_4 = \frac{16}{584},$$

z čehož opět poznáváme, že prvá hypothesa jest pravdě nejpodobnější a poslední nejméně pravdě podobná.

Jaká jest nyní pravděpodobnost, že i na př. v dalších čtyřech pokusech vyňata bude třikrát kulička bílá a jednou černá?

Poněvadž

$$s_1 = (n')_{p'}\, H_1\, \omega_1^{p'} v_1^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{256}{584} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{256}{584} \cdot \frac{256}{625},$$

$$s_2 = (n')_{p'}\, H_2\, \omega_2^{p'} v_2^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{216}{584} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{216}{584} \cdot \frac{216}{625},$$

$$s_3 = (n')_{p'}\, H_3\, \omega_3^{p'} v_3^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{96}{584} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{96}{584} \cdot \frac{96}{625},$$

$$s_4 = (n')_{p'}\, H_4\, \omega_4^{p'} v_4^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{16}{584} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{584} \cdot \frac{16}{625},$$

obdržíme dle vzorce (3)

$$K = \frac{1}{584 \cdot 625}(256^2 + 216^2 + 96^2 + 16^2) = \frac{15208}{45625}$$

aneb přibližně $$K = \tfrac{1}{3}.$$ (Dokončení.)

Základové arithmetiky.

Dle výkladů professora K. Weierstrassa

napsal

Ludvík Kraus.

Oddělení I.

(Pokračování.)

§. 12.

O řadách obsahujících kladné i záporné členy.

Na položených základech můžeme nyní snadno vytknouti význam řad všeobecných, t. j. takových, jež obsahují kladné i záporné členy v pořádku libovolném. Vyjmeme-li z takové řady všechny kladné členy a tvoří-li tyto konvergentní řadu A, *klademe*, jestli i záporné členy o sobě tvoří konvergentní řadu B′, *danou řadu za stejnou s veličinou*

$$A + B'.$$

Nyní vytkneme: *Řady všeobecné naší soustavy mají míti tu vlastnost, že souhrn všech kladných členů je řadou konvergentní a podobně i souhrn všech záporných členů je řadou konvergentní.*

Tu je pak jasné, že v každé řadě všeobecné, vyhovující vytknuté podmínce, je dovoleno změniti pořádek členů libovolně a místo souhrnu *určitého* počtu členů psáti číslo s tímto souhrnem stejné. Dále plyne:

Máme-li řadu všeobecnou, stejnou s jistou veličinou A + B′ a rozložíme-li každý člen libovolně na určitý součet kladných i záporných zlomků, nahlédneme, že tu pak souhrn kladných členů v nové řadě nemusí býti řadou konvergentní. *Jestli ale ono rozložení se stalo tím spůsobem, že i nová řada vyhovuje shora vytknuté podmínce*, tedy je stejnou s veličinou C + D′, *tak platí*

$$A + B' = C + D'.$$

Vznikne-li totiž při tomto rozložení z A řada E + F′, plyne tu bezprostředně rovnost

$$F + A = E,$$

a z toho správnost rovnice

$$A = E + F'.$$

Podobně, vznikne-li z B′ řada G + H′, tak je

$$B' = G + H'.$$

Nyní platí

$$C = E + G, \quad D' = F' + H',$$

tedy platí skutečně

$$A + B' = C + D'.$$

Jmenujeme-li i nyní každý souhrn *určitého* počtu členů vyjmutý z řady všeobecné *její částkou*, platí patrně tato věta:

Absolutní hodnota každé částky všeobecné řady naší soustavy je menší než jisté určité číslo α.

Rovná-li se totiž daná řada veličině $A + B'$, skládá se pak každá její částka ze dvou dílů, kde první je částkou řady A, druhý pak částkou řady B'. Protože jsou A i B' řady konvergentní, jest absolutní hodnota každého dílu patrně menší než jisté číslo určité α.

Naopak platí: Má-li všeobecná řada tu vlastnost, že absolutní hodnota každé její částky je menší než jisté, určité číslo α, je řada tato řadou naší soustavy (rovnou jisté veličině $A + B'$). Neboť je tu pak i každá částka souhrnu kladných členů dané řady menší než α, tedy souhrn kladných členů řadou konvergentní atd.

Přirozeným způsobem rozšíříme nyní pojem řad tím, že klademe za jich členy zavedené řady. Ptáme se tedy, jakého významu má řada

$$(A_1 + B_1') + (A_2 + B_2') + \ldots$$

Nazveme i zde každý součet *určitého* počtu členů částkou této řady. Zde arciť předpokládáme již pojem součtu řad všeobecných. Tento pojem jest ale tak srozumitelný, že netřeba tu více šířiti slov. Dále i netřeba vykládati, že v každém součtu řad všeobecných naší soustavy je volno klásti stejné za stejné. Nyní dokážeme:

Uvedená řada má významu, jestliže absolutní hodnota každé její částky je menší než jisté určité, kladné číslo α.

Každá částka řady je veličina $A + B'$; jestli tu $A > B$, znamená

$$| A + B' | < \alpha,$$

že

$$\alpha + B > A.$$

Jestli tu $A < B$, znamená

$$| A + B' | < \alpha,$$

že

$$\alpha + A > B.$$

Větu uvedenou dokážeme pomocí následující věty:

Rovná-li se jistá řada všeobecná (vytknutá na začátku tohoto §.) veličině $A + B' = A + (- B)$, kde $A > B$, lze proměniti řadu v jinou s ní stejnou, ve které souhrn záporných členů je co do absolutní hodnoty menší nežli jistá, napřed určená veličina δ. Toto proměnění se provede jednoduše tím, že se nahradí souhrn *jistých určitých členů* dané řady *jediným* jen členem, jehož hodnota se rovná hodnotě onoho souhrnu. Správnost této věty spočívá v tom, že lze vyjmouti z B částku β tak, že

$$B - \beta = B_1 < \delta.$$

Protože A je větší než B, je β i částkou veličiny A, tedy

$$A = \beta + A_1.$$

Podle definice stejnosti je ale

$$A + B' = A_1 + \beta + (-\beta - B_1) = A_1 + B'_1$$

a tím je věta dokázána.

Dejme nyní tomu, že o každém členu řady

$$(A_1 + B'_1) + (A_2 + B'_2) + (A_3 + B'_3) + \dots$$

platí

$$A_\nu > B_\nu.$$

Vytkneme-li libovolnou řadu konvergentní

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$$

skládající se z kladných zlomků, lze každý člen $A_\nu + B'_\nu$ proměniti na veličinu

$$\bar{A}_\nu + (-\bar{B}_\nu),$$

kde

$$\bar{B}_\nu < \gamma_\nu.$$

Je-li každý součet určitého počtu čísel γ_ν menší než γ, bude i každý součet určitého počtu řad $\bar{B}_\nu$ řadou menší než γ.

V každé částce dané řady jest ale volno nahraditi každý člen $A_\nu + B'_\nu$ členem $\bar{A}_\nu + (-\bar{B}_\nu)$; nyní jsme předpokládali, že každá částka je menší než α; tedy jest každý součet určitého počtu členů

$$\bar{A}_\nu + (-\bar{B}_\nu).$$

menší než α, a tedy i každý součet určitého počtu řad $\bar{A}_\nu$ menší než $\alpha + \gamma$. Můžeme tedy říci:

Každá částka řad

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \dots$$
$$\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 + \dots$$

je menší než jisté určité číslo. Řady této vlastnosti a tohoto tvaru jsou ale obyčejné řady, veličiny A, B. *Klademe tedy řadu*

$$[\bar{A}_1 + (-\bar{B}_1)] + [\bar{A}_2 + (-\bar{B}_2)] + \dots$$

za stejnou s veličinou $(A + B')$ a tedy i původní řadu za stejnou s touto veličinou.

Jak se věc ve všeobecném případě má, netřeba dále vykládati.

§. 13.

O úkonech základních s řadami naší soustavy.

Vzhledem k úkonu sčítání a odčítání je vše jasné.

1. *O úkonu násobení.* V té příčině klademe

$$(A + B')(C + D') = AC + BD + (-AD - BC).$$

Stejné za stejné volno klásti. Je-li

$$C + D' = E + F',$$

tedy

$$C + F = E + D,$$

bude:

$$(A + B')(E + F') = AE + BF + (-AF - BE),$$

stejné s dřívějším významem, neboť jsou výrazy

$$AC + BD + AF + BE = A(C + F) + B(D + E)$$

a $$AD + BC + AE + BF = A(D + E) + B(C + F)$$

stejné, jak toho definice stejnosti také vyžaduje.

Naopak lze z rovnice

$$(A + B')(C + D') = (A + B')(E + F')$$

souditi, když $A + B'$ není nullou, že tu platí rovnost

$$C + D' = E + F',$$

čehož důkaz čtenáři přenecháváme.

Z předcházejícího plyne věta: Součin dvou všeobecných řad naší soustavy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots,$$

kde tedy α_λ, β_λ jsou buď kladné, buď záporné zlomky, rovná se řadě všeobecné, ve které se každý člen $\alpha_\lambda \beta_\mu$ jednou a jen jednou vyskytuje. Tato řada je zase řadou, jak ji naše soustava vyžaduje.

2. *O úkonu dělení.* Co tu bude $\frac{1}{A}$, když A je řadou skládající se pouze z kladných zlomků? Ukážeme, že lze najíti

řadu, jejíž součin z A rovná se 1. Za tím účelem budiž α částkou z A té vlastnosti, že

$$A = \alpha + A_1$$

a
$$A_1 < \delta.$$

Za δ budiž volena tak malá veličina, že α je větší než δ; je-li pak α zlomek $\frac{g}{h}$, kde g, h jsou celistvá čísla nesoudělná, bude

$$\frac{g}{h} > A_1,$$

anebo, označíme-li řadu $h\,A_1$ známkou A_2

$$g > A_2.$$

Tu pak platí dále rovnosti, jež lze snadno na základě daných definic odůvodniti.

$$\frac{1}{A} = \frac{h}{hA} = \frac{h}{g + A_2} = \frac{h}{g} + \left\{\frac{h}{g + A_2} - \frac{h}{g}\right\} =$$
$$= \frac{h}{g} - \frac{h\,A_2}{g\,(g + A_2)} = \frac{h}{g} - \frac{hA_2}{g^2} + \frac{h\,A_2^2}{g^2\,(g + A_2)} =$$
$$= \frac{h}{g} - \frac{hA_2}{g} + \frac{hA_2^2}{g^3} - \frac{h\,A_2^3}{g^3\,(g + A_2)}.$$

Pokračujíce tímto způsobem, obdržíme formálně řadu

$$(1) \qquad \frac{h}{g} - \frac{h}{g}\left(\frac{A_2}{g}\right) + \frac{h}{g}\left(\frac{A_2}{g}\right)^2 - \frac{h}{g}\left(\frac{A_2}{g}\right)^3 + \dots$$

kde $(n + 1)^{ní}$ člen má tvar

$$(-1)^n \frac{h}{g}\left(\frac{A_2}{g}\right)^n.$$

O této řadě ukážeme nyní za prvé, že má významu, a za druhé, že má tu vlastnost, že, byvši násobena veličinou A rovná se jedné.

V předešlém §. jsme vytknuli podmínku nutnou a postačující, aby řada, jejíž členy zase jsou řadami, měla významu v soustavě veličin zavedených. Dokážeme nyní, že řada (1) oné podmínce vyhovuje. Neboť jest tu řada $\frac{A_2}{g}$ menší než 1.

Volíme-li β, číslo racionalné kladné tak, že

$$\beta > \frac{A_2}{g}, \text{ ale zároveň } \beta < 1,$$

bude tu každá částka řady (1) patrně menší, nežli příslušná částka řady

$$\frac{h}{g}(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots).$$

Součet prvních členů této řady je ale

$$\frac{h}{g}\frac{1-\beta^n}{1-\beta}, \text{ tedy menší než } \frac{h}{g}\frac{1}{1-\beta}.$$

Nyní, když již víme, že řada (1) má významu, soudíme dále, že i její součin se řadou

$$A=\frac{g+A_2}{h}$$

bude míti významu. A sice je správné, jak snadno z daných vět se odvodí, součin vydobýti tím spůsobem, že násobíme každý člen vždy (1) za prvé s $\frac{g}{h}$, pak s $\frac{A_2}{h}$ a obdržené dvě řady sečteme. První řada je tu

$$1-\left(\frac{A_2}{g}\right)+\left(\frac{A_2}{g}\right)^2-\left(\frac{A_2}{g}\right)^3+\ldots,$$

druhá pak:

$$\frac{A_2}{g}-\left(\frac{A_2}{g}\right)^2+\left(\frac{A_2}{g}\right)^3+\ldots,$$

tedy součet skutečně 1.

Není nikterak obtížné dojíti i ve všeobecném případě tímto spůsobem k cíli. Při důkazu o významu řady (1) bylo lhostejné, je-li A_2 řadou skládající se pouze z kladných zlomků anebo řadou všeobecnou; jen podmínka

$$\frac{A_2}{g}<1$$

byla nutná.

Této podmínce lze i u všeobecné řady vyhověti. Rovná-li se všeobecná řada veličině $A+B'$, kde $A>B$, lze patrně kladnou částku α z této řady vyjmouti tak, že zbytek je menší než δ. Kdyby bylo $A<B$, třeba tu jen zápornou veličinu klásti.

Že požadavku, nalézti veličinu naší soustavy, jejíž součin s danou všeobecnou řadou rovná se 1, jediným jen spůsobem lze vyhověti, je vůči tomu, co jsme o násobení veličin pravili, jasné. V tom případě, kdy daná veličina by byla nullou, nemá požadavek ten smyslu.

Oddělení II.

§. 14.

O soustavách číselných o dvou základních jednotkách.

Žádná veličina naší soustavy nemá tu vlastnost, by druhá její mocnina byla veličinou zápornou. Chceme-li tedy, aby soustava arithmetická i veličiny této vlastnosti obsahovala — a to musíme požadovati, mají-li tak jednoduché rovnice, jako

$$x^2 = -4$$

býti řešitelny — musíme soustavu naši rozšířiti. To učiníme tím spůsobem, že zavedeme dvé různých jednotek j_1 a j_2. Opustíme úplně dosavadní soustavu a podržíme z ní jen pojmy veličin tam vyvinuté a sice takto: Dříve bylo číslo racionální α vzhledem k základní jednotce 1 přesně definováno; nyní nechť značí

$$\alpha j_1$$

tutéž veličinu vzhledem k jednotce j_1, jako prvé α vůči 1. Tedy na př. veličina

$$\tfrac{1}{3} j_1$$

značí takovou veličinu, že

$$\tfrac{1}{3} j_1 + \tfrac{1}{3} j_1 + \tfrac{1}{3} j_1 = j_1,$$

a veličina

$$-\tfrac{1}{3} j.$$

takovou, že

$$\tfrac{1}{3} j_1 + (-\tfrac{1}{3} j_1) = 0.$$

Zavádíme zde kladné i záporné veličiny zároveň, aby úkon odčítání i v nové soustavě byl vždy možným. Co jsme pravili o veličinách tvaru αj_1, má podobně i platiti o veličinách tvaru αj_2. α jest zde nepojmenované číslo lomené. Nyní nazveme obdobně jako v §. 5. každý souhrn libovolného, ale *konečného* množství veličin

$$\alpha j_1, \beta j_2, \gamma j_2, \delta j_1, \ldots$$

veličinou naší nové soustavy a píšeme ji

$$\alpha j_1 + \beta j_2 + \gamma j_2 + \delta j_1 + \ldots$$

kde ale z počátku nutno dbáti na pořádek, v jakém veličiny (členy) po sobě jdou.

To bude teprve tehdy zbytečné, kdy zase obdobně definujeme:

Dvě veličiny naší soustavy jsou stejné, pakliže každý z jich členů v stejném počtu v obou veličinách se nalézá.

V každé veličině naší soustavy jest dovoleno, pořádek členů libovolně změniti.

Definovali jsme dříve přesně veličinu

$$\alpha j_1.$$

Rozumí se samo sebou, že klademe tuto veličinu za stejnou s každou jinou, která téže definici vyhovuje. Je-li tedy α stejné s α_1 podlé definic v §. 6., bude i

$$\alpha j_1 = \alpha_1 j_1 ,$$
$$\alpha j_2 = \alpha_1 j_2 .$$

Ale i naopak, jestliže platí

$$\alpha j_1 = \alpha_1 j_1$$

musíme souditi, že platí

$$\alpha = \alpha_1$$

podlé definice stejnosti v §. 6., neboť $\alpha_1 j_1$ musí pak téže definici, jako αj_1 vyhovovati.

Z toho plyne: jsou-li m, n celistvá čísla

$$(m+n) j_1 = m j_1 + n j_1,$$
$$(m+n) j_2 = m j_2 + n j_2,$$

a všeobecně

$$(\alpha + \beta) j_1 = \alpha j_1 + \beta j_1,$$
$$(\alpha + \beta) j_2 = \alpha j_2 + \beta j_2.$$

Tytéž definice a úvahy platí i když α, β, atd. jsou řadami A, A + B′ a pod.

Označíme tedy v dalším výkladu *každou* veličinu dřívější soustavy, nechť jest ona číslem racionálním, nebo řadou, vždy *malým písmenem řeckým.*

Pravili jsme, že j_1 a j_2 jsou dvě různé jednotky; co to znamená, vysvětlíme nyní. Podle definice rovnosti soudíme, že platí

$$\alpha j_1 + \beta j_2 = \beta j_2 + \alpha j_1 .$$

Nyní klademe

$$\alpha j_1 = \alpha_1 j_1 ,$$
$$\beta j_2 = \beta_1 j_2 ,$$

jestliže

$$\alpha = \alpha_1\,, \quad \beta = \beta_1\,,$$

klademe tedy i veličinu

$$\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2 = \beta_1 j_2 + \alpha_1 j_1\,,$$

za stejnou s hořejší veličinou. Nyní ale i naopak definujeme:

Dvě veličiny $(\alpha j_1 + \beta j_2)$, $(\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2)$ jsou stejné a jen tenkráte, když platí

$$\alpha = \alpha_1\,, \quad \beta = \beta_1$$

Touto definicí jest pojem *různých* jednotek přesně určen. Neboť definujeme-li obdobně nullu, co veličinu, která na součtu nic nemění, bude tu veličina

$$\mu j_1 + \nu j_2$$

jen tenkráte nullou, když se rovná

$$\mu = \nu = 0.$$

To plyne přímo z rovnice

$$\alpha j_1 + \beta j_2 = \alpha j_1 + \beta j_2 + \mu j_1 + \nu j_2 = (\alpha + \mu) j_1 + (\beta + \nu) j_2\,,$$

tedy

$$\alpha = \alpha + \mu, \quad \beta = \beta + \nu$$

a konečně

$$\mu = \nu = 0.$$

Značí-li a libovolnou veličinu naší soustavy, definujeme známkou

$$\alpha\,(a)$$

takovou veličinu naší soustavy, která vzhledem k a týmž spůsobem je definována jako α vzhledem k jednotce 1. Platí tedy stejnosti

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}\,j_1\right) = \frac{1}{m\,.\,n}\,j_1$$

a podobně pro j_2, jsou-li m, n celistvá čísla. Všeobecně pak máme

$$\alpha\,(\beta j_1 + \gamma j_2) = \alpha\beta j_1 + \alpha\gamma j_2.$$

Po zavedení těchto pojmů lze snadno dokázati, že jest možné *všechny* veličiny naší soustavy vyjádřiti jakožto veličiny nové soustavy, v které základní jednotky J_1 a J_2 jsou různými veličinami dřívějšího oboru. Klademe-li totiž

$$J_1 = \lambda_1 j_1 + \lambda_2 j_2\,,$$
$$J_2 = \mu_1 j_1 + \mu_2 j_2\,,$$

a jest tu

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \nu$$

veličina s nullou různá, plyne z těchto rovnic podle daných definic

$$j_1 = \frac{\mu_2}{\nu} J_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\nu}\right) J_2 = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2,$$

$$j_2 = \left(-\frac{\mu_1}{\nu}\right) J_1 + \frac{\lambda_1}{a} J_2 = \beta_1 J_1 + \beta_2 J_2.$$

Tedy dovoleno libovolnou veličinu

$$\alpha j_1 + \beta j_2$$

naší soustavy také psáti tímto spůsobem

$$\alpha(\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2) + \beta(\beta_1 J_1 + \beta_2 J_2) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) J_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2) J_2,$$

tedy psáti co veličinu v nové soustavě, jejíž základní jednotky jsou J_1 a J_2. Podmínka, že ν nemá býti nullou, vyjádřuje, že J_1 a J_2 mají býti *různými* jednotkami.

Dosavadními úvahami jest povaha soustavy naší úplně určena. Přenesli jsme zde pojmy základní, dříve nabyté téměř bezprostředně. Jedná se nyní o to, také pojmy úkonů s novými veličinami stanoviti. Ukáže se, že zde nebudeme moci již *úplnou* analogii zachovati. V jaké míře pojmy tyty obdobně s dřívějšími stanoviti lze, ukážeme v příštím §.

Jest prospěšné, objasniti si dosavadní výklad příkladem geometrickým. Volme za tím účelem v rovině libovolně dva různé body A, B. Spojivou přímku AB, jejíž délku označíme známkou $\overline{AB}$, nazveme j_1. *Pak definujeme*: každá přímka CD je stejná s j_1, když 1. délka $\overline{CD}$ se rovná $\overline{AB}$; 2. když přímka CD je rovnoběžná s AB; 3. když směr od A k B je totožný se směrem od C k D. Ony tři vlastnosti, jež jsme již z počátku u čísel celistvých při pojmu rovnosti dvou veličin vytkli. jsou i v této definici zachovány. Protože jednak o libovolné délce v rovině víme, že každá její část existuje, jednak ku každému směru v rovině směr jemu opáčný přináleží, bude tu zřejmé, jakého geometrického významu veličina

$$\alpha j_1$$

má, když α je číslo lomené, buď kladné, neb záporné. Tuto veličinu znázorňuje každá přímka EF rovnoběžná s AB, kde o délce $\overline{EF}$ platí

$$\overline{EF} = \alpha \, . \, \overline{AB}$$

a směr od E k F je buď totožný neb opáčný směru od A k B, podle toho, jestli α je kladné neb záporné číslo.

Všeobecně *každou* s AB rovnoběžnou přímku GH co veličinu

$$\alpha j_1$$

psáti můžeme, kde α je buď číslem racionálním, buď řadou, tedy vůbec veličinou číselnou nepojmenovanou dřívější soustavy.

Není-li BC souběžnou přímkou s AB, nazveme souhrnem

$$AB + BC$$

přímku AC; bude tu patrně platiti

$$AB + BC = AD + DC,$$

kde D je libovolný bod.

Jestliže platí:

$$AD = BC, \quad DC = AB,$$

t. j. jestliže tedy A, B, C, D jsou vrcholy rovnoběžníku, plyne

$$AB + BC = BC + AB.$$

Nazveme-li BC veličinou j_2, je jasné, že každá přímka roviny se dá vyjádřiti co

$$\alpha j_1 + \beta j_2$$

a jen jediným spůsobem; neboť každá přímka jest diagonalou rovnoběžníku, jehož strany jsou rovnoběžné s AB, resp. BC.

Tímto obdržíme patrně v souhrnu všech přímek v rovině věrný obraz soustavy, jejíž základní jednotky jsou j_1 a j_2.

§. 15.

O základních úkonech s novými veličinami.

1. *Úkon sečítání a odčítání.* O těchto úkonech netřeba šířiti slov. Z toho, co jsme v předešlém §. pravili, vysvítá, co souhrnem t. j. součtem dvou veličin máme rozuměti, a za jakých podmínek smíme dva součty co stejné považovati.

2. *Úkon násobení.* Podobně jako v §. 5. žádáme: Definice součinu veličin naší soustavy má býti tak vytknuta, aby zákony (III.), (IV.), (V.) platily, a za druhé má býti součin dvou veličin naší soustavy zase veličinou naší soustavy t. j. veličinou tvaru

$$\alpha j_1 + \beta j_2.$$

Speciálně tedy bude

$$j_1 \cdot j_1 = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2,$$
$$j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1 = \beta_1 j_1 + \beta_2 j_2,$$
$$j_2 \cdot j_2 = \gamma_1 j_1 + \gamma_2 j_2.$$

Veličiny α_1, α_2, β_1, ... atd. mají tu jisté určité hodnoty. Zde tedy supponujeme, že lze výše vytknutým dvěma požadavkům alespoň jedním spůsobem vyhověti. Dále pak podle zákona IV. platí

$$j_1 \cdot j_1 \cdot j_2 = j_1 \cdot j_2 \cdot j_1,$$
$$j_2 \cdot j_2 \cdot j_1 = j_2 \cdot j_1 \cdot j_2.$$

Z toho obdržíme

$$(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2) j_2 = (\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2) j_1,$$
$$(\gamma_1 j_1 + \gamma_2 j_2) j_1 = (\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2) j_2,$$

a konečně podle zákona V.

$$\alpha_1 j_1 \cdot j_2 + \alpha_2 j_2 \cdot j_2 = \beta_1 j_1 \cdot j_1 + \beta_2 j_2 \cdot j_1, \tag{1}$$
$$\gamma_1 j_1 \cdot j_1 + \gamma_2 j_2 \cdot j_1 = \beta_1 j_1 \cdot j_2 + \beta_2 j_2 \cdot j_2. \tag{2}$$

V těchto výrazech se vyskytují veličiny, jež všeobecně mají tento tvar

$$\alpha a \, . \, \beta b,$$

kde a, b jsou veličiny nové soustavy, α, β čísla nepojmenovaná dřívější soustavy. Dokážeme, že takovou veličinu *musíme* považovati za stejnou s veličinou

$$\alpha\beta \, . \, (ab)$$

a sice na základě daných definic a supposice, že oněm dvěma požadavkům lze vyhověti. Třeba jen patrně tuto rovnost dokázati pro ten speciálný případ, kdy

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{1}{n},$$

(m, n jsou celistvá čísla), aby platila všeobecně. Důkaz ten je úplně obdobný důkazu v §. 6. sub. 2. Totiž: Součet $m \, . \, n$ summandů, z nichž každý jest $\frac{1}{m} a \, . \, \frac{1}{n} b$ dá se proměnit pomocí zákona V. ve veličinu $a \, . \, b$. Tutéž vlastnost má ale i součet $m \, . \, n$ summandů, z nichž každý jest $\frac{1}{m \, . \, n} \, . \, ab$; tedy platí rovnost

$$\alpha a \, . \, \beta b = \alpha\beta \, . \, ab.$$

Použijeme-li této rovnosti ve výrazech (1), (2) obdržíme dosazením

$$(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\gamma_1)j_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\gamma_2)j_2=(\beta_1\alpha_1+\beta_2\beta_1)j_1+(\beta_1\alpha_2+\beta_2\beta_2)j_2,$$
$$(\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\beta_1)j_1+(\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\beta_2)j_2=(\beta_1\beta_1+\beta_2\gamma_1)j_1+(\beta_1\beta_2+\beta_2\gamma_2)j_2,$$

a konečně tyto tři rovnice:

$$\begin{aligned}\alpha_2\gamma_1-\beta_1\beta_2&=0,\\ \beta_2(\alpha_1-\beta_2)+\alpha_2(\gamma_2-\beta_1)&=0,\\ \gamma_1(\alpha_1-\beta_2)+\beta_1(\gamma_2-\beta_1)&=0,\end{aligned}$$

v nichž se pouze šest veličin

$$\begin{vmatrix}\gamma_1, & \gamma_2-\beta_1, & \beta_2\\ \beta_1, & \beta_2-\alpha_1, & \alpha_2\end{vmatrix}$$

objevuje. Nezmizí-li všechny tyto veličiny, můžeme ji psáti v tomto tvaru

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\varkappa_1\lambda, & \gamma_2-\beta_1&=-\varkappa_1\mu, & \beta_2&=\varkappa_1\nu,\\ \beta_1&=\varkappa_2\lambda, & \beta_2-\alpha_1&=-\varkappa_2\mu, & \alpha_2&=\varkappa_2\nu,\end{aligned}$$

kde $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ nejsou zároveň nullou. Z toho plyne, že lze oněm dvěma požadavkům vyhověti, klademe-li

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}j_1\cdot j_1&=(\varkappa_1\nu+\varkappa_2\mu)j_1+\varkappa_2\nu j_2,\\ j_2\cdot j_1=j_1\cdot j_2&=\varkappa_2\lambda j_1+\varkappa_1\nu j_2,\\ j_2\cdot j_2&=\varkappa_1\lambda j_1+(\varkappa_2\lambda-\varkappa_1\mu)j_2,\end{aligned}\right.$$

kde $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ, μ, ν mají libovolné určité hodnoty pouze té podmínce vyhovující, že ani $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ani λ, μ, ν nejsou zároveň nullami. Naopak je patrné, že oněm dvěma požadavkům, jen tímto spůsobem lze vyhověti.

3. *Úkon dělení.* Máme-li

$$(\xi_1 j_1+\xi_2 j_2)(\eta_1 j_1+\eta_2 j_2)=\zeta_1 j_1+\zeta_2 j_2,$$

bude tu vzhledem k rovnicím (3) platiti

$$\eta_1(\xi_1\varkappa_1\nu+\xi_1\varkappa_2\mu+\xi_2\varkappa_2\lambda)+\eta_2(\xi_1\varkappa_2\lambda+\xi_2\varkappa_2\lambda)=\zeta_1,$$
$$\eta_1(\xi_1\varkappa_2\nu+\xi_2\varkappa_1\nu)+\eta_2(\xi_1\varkappa_1\nu+\xi_2\varkappa_2\lambda-\xi_2\varkappa_1\mu)=\zeta_2.$$

Mají-li ζ_1, ζ_2, ξ_1, ξ_2 určité hodnoty, obdržíme z těchto dvou rovnic pro η_1, η_2 jen tenkráte *určité hodnoty a sice jen jedny*, jestliže determinant

$$\varrho=\begin{vmatrix}\xi_1\varkappa_1\nu+\xi_1\varkappa_2\mu+\xi_2\varkappa_2\lambda, & \xi_1\varkappa_2\lambda+\xi_2\varkappa_1\lambda\\ \xi_1\varkappa_2\nu+\xi_2\varkappa_1\nu, & \xi_1\varkappa_1\nu+\xi_2\varkappa_2\lambda-\xi_2\varkappa_1\mu\end{vmatrix}$$

nezmizí. Můžeme se také takto vyjádřiti:

Nutná a postačující podmínka, aby podíl

$$\frac{\zeta_1 j_1 + \zeta_2 j_2}{\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2}$$

se rovnal jedné a jen jedné určité veličině naší soustavy jest ta, aby ϱ nebylo nullou.

Veličina ϱ jest ale stejná jak snadno početně se dokáže, s výrazem

$$(\varkappa_1^2\nu + \varkappa_1\varkappa_2\mu - \varkappa_2^2\lambda)\,(\xi_1^2\nu - \mu\xi_1\xi_2 - \lambda\xi_2^2).$$

Protože λ, μ, ν nejsou zároveň nullou, nezmizí tento výraz jistě pro libovolné hodnoty ξ_1, ξ_2 jestliže

$$(4) \qquad \varkappa_1^2\nu + \varkappa_1\varkappa_2\mu - \varkappa_2^2\lambda \gtrless 0.$$

Pak zmizí ϱ jen tenkráte, když platí

$$(5) \qquad \xi_1^2\nu - \mu\xi_1\xi_2 - \lambda\xi_2^2 = 0.$$

Této rovnici na každý způsob hodnoty $\xi_1 = \xi_2 = 0$ vyhovují. Tedy i v nové soustavě budeme míti pravidla: Nullou nesmí se děliti. Neboť požadavek, udati takovou veličinu, jež násobena nullou dá určitou veličinu

$$\zeta_1 j_1 + \zeta_2 j_2,$$

nemá vůči zákonům naší soustavy žádného smyslu.

Žádáme-li nyní, aby v každém jiném případě, kde dělitel není nullou, úkon dělení byl vždy jednoznačně možným, musíme patrně voliti

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

tak, aby žádné jiné hodnoty mimo $\xi_1 = \xi_2 = 0$ rovnici (5) nevyhovovaly. Toho docílíme patrně, když za prvé ani ν ani λ není nullou; neboť jinak by vždy jak snadno viděti, hodnoty ξ_1, ξ_2 rovnici (5) vyhovující, existovaly, z nich alespoň jedna by byla od nully různá. Násobíme-li nyní rovnici (5) veličinou ν, obdržíme na levé straně

$$\xi_1^2\nu^2 - \mu\nu\xi_1\xi_2 - \lambda\nu\xi_2^2,$$

anebo

$$(\xi_1\nu - \frac{\mu}{2}\xi_2)^2 - (\frac{\mu^2}{4} + \lambda\nu)\xi_2^2.$$

Protože druhá mocnina libovolné veličiny dřívější soustavy, není nikdy veličinou zápornou, dosáhneme jistě žádaného cíle, jestliže hodnotám λ, μ, ν uložíme podmínku

$$\frac{\mu^2}{4} + \lambda\nu,$$

má se rovnati $-\delta^2$, kde δ není nullou. Za tou podmínkou ale výraz

$$\varkappa_1^2\nu + \varkappa_1\varkappa_2\mu - \varkappa_2^2\lambda,$$

o sobě *není nullou*, pamatujeme-li na to, že $\varkappa_1, \varkappa_2$ nezmizí zároveň. To plyne bezprostředně z té okolnosti, že tento výraz se stane identickým s výrazem na levé straně rovnice (5), klademe-li

$$\varkappa_1 = -\xi_1 \;, \; \varkappa_2 = \xi_2.$$

Máme tedy konečný výsledek:

Nutná a postačující podmínka, aby úkon dělení byl vždy možným a sice jednoznačně (s jedinou jen výminkou, že nullou se nesmí děliti) jest ta, aby $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zároveň nezmizely a za druhé aby platila rovnost

$$\frac{\mu^2}{4} + \lambda\nu = -\delta^2,$$

kde δ není nullou.

Volíme-li za těchto podmínek hodnoty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ, μ, ν jinak libovolně, budou tedy všecky základní úkony v nové soustavě míti obdobné hlavní vlastnosti s úkony v soustavě dřívější. Tedy je i dovoleno klásti stejné za stejné atd.

§. 16.

O veličinách komplexních.

Spůsobů, jakými lze voliti hodnoty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ, μ, ν tak, aby podmínkám ku konci předešlého § vytknutým vyhovovaly, jest nekonečně mnoho. Jedná se nyní o to, zvoliti tyto tak, aby praktický počet byl co možná nejjednodušší.

Za tím účelem dejme veličinám $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ, μ, ν libovolné, oněm podmínkám vyhovující hodnoty. Pak lze dokázati, že najdeme dvě veličiny

$$\alpha j_1 + \beta j_2 = J_1,$$

a

$$\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2 = J_2,$$

následujících vlastností. 1. Je-li $\gamma j_1 + \delta j_2 = a$ libovolnou veličinou, platí

$$J_1 a = a.$$

2. Mezi sebou mají udané veličiny jednoduchý vztah

$$J_1^2 + J_2^2 = 0.$$

Co se tkne první věty, je tu zřejmé, že podíl

$$\frac{a}{a},$$

musí býti určitou veličinou J_1, když a není nullou. Nyní třeba jen dokázati, že J_1 zůstane totéž, ať a má jakoukoli hodnotu; tedy pro b různé s a, že platí

$$\frac{b}{b} = J_1.$$

Je-li

$$a = bc,$$

plyne z

$$aJ_1 = a,$$
$$bcJ_1 = bc.$$

Protože c není nullou, dovoleno veličinou c krátiti; atd.

Co se tkne druhé věty, použijeme všeobecného vztahu, jež lze z rovnic (3) předešlého § tím spůsobem obdržeti, že první rovnici, násobíme λ, druhou $-\mu$, třetí $-\nu$; sečtou-li se pak takto změněné rovnice, obdržíme na pravé straně identicky nullu, tedy

$$\lambda j_1^2 - \mu j_1 j_2 - \nu j_2^2 = 0.$$

Protože λ není nullou, můžeme λ násobiti

$$\lambda^2 j_1^2 - \mu\lambda j_1 j_2 - \nu\lambda j_2^2 = 0.$$

Označíme-li nyní podíl

$$\frac{\lambda j_1}{j_2},$$

zámkou j', kde j' je tedy určitou, od nully různou veličinou naší soustavy, promění se levá strana oné rovnice dosazením ve

$$j_2^2 \cdot j'^2 - \mu j' \cdot j_2^2 - \nu\lambda j_2^2,$$

anebo vzhledem k vlastnosti J_1

$$j_2^2 \cdot j'^2 - \mu j' \cdot J_1 \cdot j_2^2 - \nu\lambda J_1^2 j_2^2$$
$$= j_2^2 (j'^2 - \mu j' J_1 - \nu\lambda J_1^2) = 0.$$

Jsme ale oprávněni souditi: když součin je nullou, musí býti jeden ze součinitelů nullou, j_2 je různé s nullou, tedy platí

$$j'^2 - \mu j' J_1 - \nu\lambda J_1^2 = 0,$$

aneb

$$(j' - \frac{\mu}{2} J_1)^2 - (\frac{\mu^2}{4} + \nu\lambda) J_1^2 = 0,$$

$$(j' - \frac{\mu}{2} J_1)^2 + \delta^2 J_1^2 = [J_1^2 + (\frac{j'}{\delta} - \frac{\mu}{2\delta} J_1)^2] \delta^2 = 0.$$

Klademe-li

$$\frac{j'}{\delta} - \frac{\mu}{2\delta} J_1 = J_2,$$

platí tedy rovnost

$$J_2^2 + J_1^2 = 0,$$

čím i druhá věta je dokázána.

Tyto veličiny

$$J_1 = \alpha j_1 + \beta j_2,$$
$$J_2 = \alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2,$$

jsou mezi sebou různé; neboť kdyby byla hodnota

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$$

nullou, pak by rovnice

$$J_2^2 + J_1^2 = 0$$

platila jen tehdá, kdyby J_1 i J_2 zároveň zmizely. J_1 ale jistě není nullou, jak z rovnice

$$J_1 a = a$$

bezprostředně plyne.

Z toho, co jsme v §. 15. pravili, můžeme tedy soustavu v základních jednotkách j_1, j_2 převésti na jinou, kde základními jednotkami jsou

$$J_1, J_2.$$

Vlastnosti úkonů zůstanou patrně tím nezměněny.

Veličina této soustavy bude míti tvar

$$\xi_1 J_1 + \xi_2 J_2,$$

nebo vzhledem k vlastnosti jednotky J_1

$$\xi_1 J_1 + (\xi_2 J_1) J_2.$$

Protože J_1 na součinu nic nemění, nechybíme, klademe-li

$$J_1 = 1.$$

Pak bude řeckým písmenem označená veličina ξ značiti veličiny z této jednotky J_1 t. j. 1 a její částí se skládající.

Označíme-li konečně J_2 známkou i, bude tvar všeobecné veličiny

$$\xi_1 + \xi_2 i,$$

jež se nazývá veličinou komplexní, a kde platí

$$i^2 = -1.$$

Označíme tyto veličiny příště malými písmeny latinskými. Získali jsme tímto pro počet praktický jednoduchou soustavu té vlastnosti, že zákony (III), (IV), (V) platí, že úkon násobení i dělení vede vždy jednoznačným, určitým způsobem k veličinám této soustavy, s jedinou jen výminkou, že nullou se nesmí děliti. Platí dále, pro

$$b = c,$$
$$a \,.\, b = a \,.\, c$$

a naopak z této rovnice, jestli a různé s nullou, lze souditi

$$b = c \text{ atd.}$$

Zároveň tu vidíme, že původní úkol, jenž nás k těmto úvahám vedl, t. j. nalézti takovou soustavu, aby druhý kořen z libovolné veličiny této soustavy zase byl veličinou této soustavy, jest tímto řešen. Má-li se totiž rovnati

$$\sqrt{\xi_1 + \xi_2 i} = \mu + \nu i,$$

bude

$$\xi_1 + \xi_2 i = \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu i,$$

tedy

$$\xi_1 = \mu^2 - \nu^2,$$
$$\xi_2 = 2\mu\nu.$$

Klademe-li

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \xi'^2,$$

kde ξ' kladná veličina, o které platí

$$\xi' \geqq | \xi_1 |$$

obdržíme

$$2\nu^2 = -\xi_1 + \xi', \quad 2\mu^2 = +\xi_1 + \xi',$$

tedy pro ν^2, μ^2 *kladné* hodnoty, čím věta je dokázána.

Co závěrek budiž ještě podotknuto, že příště budeme nazývati ve veličině komplexní

$$a = \xi + \eta i$$

ξ reálnou částí, a ηi imaginární částí veličiny a.

§. 17.

O řadách, z veličin komplexních se skládajících.

Zcela obdobně jako dříve zavedeme v oboru veličin komplexních výrazy tvaru

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

v kterých se neobmezeně mnoho členů vyskytuje, z nichž každý má tvar

$$a_\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda i$$

a ξ_λ, η_λ buď jsou čísly racionalnými, buď veličinami A, aneb $A + B'$.

Nyní vytkneme: *Pouze takové řady tvaru (1) zavedeme do naší soustavy, jež mají tu vlastnost, že řady*

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots$$

a

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

mají významu, t. j. všeobecně řečeno, jsou veličinami tvaru $A + B'$.

Nazveme pak řadu (1) řadou konvergentní.

Za jakých podmínek poslední dvě řady mají významu, o tom jsme v oddělení prvním obšírně pojednali.

Nyní podáme kriteria pro počet spůsobilejší, kterými lze přímo určiti, jestli daná řada tvaru (1) je konvergentní čili nic.

Za tím účelem zavedeme širší pojem absolutní hodnoty. *Nazveme absolutní hodnotou veličiny*

$$a = \xi + \eta i$$

onu kladnou hodnotu α, jejíž druhá mocnina se rovná hodnotě $(\xi^2 + \eta^2)$, *tedy*

$$\alpha + \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

kde na pravé straně kořen s kladným znaménkem se musí vzíti. (V tomto smyslu známku kořenu budeme příště užívati). Označíme α známkou

$$|a|.$$

Pojem i známka se shodují v případě, kde a je číslem racionálným s dřívější definicí (§. 11.).

Definice zavedeného pojmu absolutní hodnoty vyžaduje bližšího vysvětlení.

Dejme tomu, že ξ, η jsou čísly racionálnými; pak je známa methoda, jakou se

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

dá vyvinouti formálně v řadu A, akládající se z kladných zlomků. Podle kriterií stejnosti (§. 11.) je snadno dokázati, že skutečně platí

$$A^2=\xi^2+\eta^2.$$

Pro všeobecné ξ, η bude tu $\xi^2+\eta^2$ buď veličinou A nebo veličinou $C+B'$, kde ale patrně

$$C>B.$$

Jak známo, můžeme pro sebe menší dané δ (kladné) převésti tyto veličiny na tvar

$$A=\alpha+A_1,$$
$$C+B'=\beta+C_1+D_1',$$

kde α, β jsou čísla kladná racionalná a

$$A_1<\alpha\delta,\quad C_1<\beta\frac{\delta}{2},\quad D_1<\beta\frac{\delta}{2}.$$

Nyní platí pro $\delta<1$ známý vzorec

$$\sqrt{1+\delta}=1+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta^2}{8}+\ldots,$$

kde na pravé straně $(n+1)^{ní}$ člen zní

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots\ 2n}\delta^n,$$

který je co do absolutní hodnoty menší než δ^n. Správnost onoho vzorce lze ostatně snadno dokázati. Jest tu za prvé druhá mocnina řady na pravé straně formálně $1+\delta$; za druhé pak řada tato je konvergentní, protože každý člen je menší co do absolutní hodnoty, než příslušný člen řady

$$1+\delta+\delta^2+\delta^3+\ldots$$

Vložíme-li do řady

$$1+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta^2}{8}+\ldots$$

za δ veličinu $\frac{A_1}{\alpha}$, resp. $\frac{C_1+D_1'}{\beta}$, vznikne tu řada řad, jež, podle podmínek v §. 13. vytknutých a zde patrně platících má významu, jest tedy veličinou

$$M+N' \text{ resp. } P+Q'.$$

Platí-li dále

$$\alpha = E^2, \quad \beta = F^2,$$

bude tu druhá mocnina veličiny

$$E(M + N') \text{ resp. } F(P + Q')$$

skutečně se rovnati veličině $\xi^2 + \eta^2$. Můžeme tedy říci:

Pro libovolné ξ, η existuje vždy veličina $A + B'$ té vlastnosti, že

$$(A + B')^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Dejme tomu, že by veličina $C + D'$ měla tutéž vlastnost, pak by platila rovnice

$$(A + B')^2 - (C + D')^2 = 0 = (A + B' + C + D')(A + B' + C' + D).$$

Jeden z těchto dvou součinitelů musí zmizeti, tedy bude buď

$$A + C = B + D$$

anebo

$$A + D = B + C;$$

t. j. buď platí

$$A + B' = -(C + D')$$

anebo

$$A + B' = (C + D').$$

Tedy nalezneme pouze dvě veličiny, jichž druhá mocnina se rovná $\xi^2 + \eta^2$.

Nazveme-li

$$A + B'$$

když

$$A > B$$

kladnou veličinu, nalezneme tedy jednu a jen jednu kladnou veličinu, jejíž druhá mocnina jest $\xi^2 + \eta^2$.

Tímto jest správnost definice absolutní hodnoty dokázána.

Je-li $A_1 + B_1'$ kladnou veličinou, vyjádřeme nerovností

$$A_1 + B_1' < A + B',$$

že platí

$$A_1 + B < A + B_1.$$

Je-li tedy

$$A + B' < \alpha,$$

t. j. §. 12.)

$$\alpha + B > A$$

bude i

$$A_1 + B_1' < \alpha,$$

t. j.

$$\alpha + B_1 > A_1.$$

Neboť platí

$$\alpha + B + B_1 > A + B_1,$$

tedy tím spíše

$$\alpha + B + B_1 > A_1 + B,$$

anebo

$$\alpha + B_1 > A_1.$$

Má-li na př. řada

$$(A_1 + B'_1) + (A_2 + B'_2) + \dots$$

význam, kde

$$A_n > B_n$$

pro každé n, bude tedy míti i řada

$$(C_1 + D'_1) + (C_2 + D'_2) + \dots$$

významu, jest-li

$$C_n > D_n$$

pro každé n a

$$C_n + D'_n < A_n + B'_n.$$

Uvedli jsme zde tento příklad, abychom ukázali, že u kladných veličin tvaru $A + B'$ platí obdobné soudy, jako u veličin kladných A. (U těchto se rozumí samo sebou, že konverguje řada

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots,$$

když konverguje

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

a platí

$$A_n > C_n$$

pro každé n).

Z tohoto důvodu nebude na ujmu všeobecnosti, když odvodíme v tomto a příštím §. výsledky pro ten případ, že všecky se vyskytující veličiny jsou buď racionálné, aneb tvaru A resp. A′.

Pro absolutní hodnoty platí tyto vzorce:

$$\text{(I)} \qquad |a| \, . \, |b| = |a \, . \, b| \, .$$

Nebo platí-li

$$a = \xi + \eta i, \quad b = \xi_1 + \eta_1 i,$$

bude tu

$$|a|^2 \, . \, |b|^2 = (\xi^2 + \eta^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2),$$

a také

$$|a\,.\,b|^2 = (\xi\xi_1 - \eta\eta_1)^2 + (\xi\eta_1 + \xi_1\eta)^2 = (\xi^2 + \eta^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2).$$

Dělíme-li v rovnici (I) veličinou $|b|$, (když není nullou), obdržíme vzorec

$$|a| = \frac{|a\,.\,b|}{|b|} = \left|\frac{a\,.\,b}{b}\right|,$$

tedy pro

$$a\,.\,b = c$$

$$\frac{|c|}{|b|} = \left|\frac{c}{b}\right|. \tag{II}$$

Dále tu bude

$$|1 + a|^2 = (1 + \xi)^2 + \eta^2 = 1 + 2\xi + |a|^2 =$$
$$= 1 + 2|a| + |a|^2 + 2(\xi - |a|).$$

Veličina

$$\xi - |a| = \xi - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

je jen pro

$$\eta = 0, \text{ a kladné } \xi$$

nullou, v každém jiném případě ale *veličinou zápornou*; tedy plyne všeobecně

$$|1 + a|^2 \leqq 1 + 2|a| + |a|^2$$

anebo

$$|1 + a| \leqq 1 + |a|:$$

Klademe-li sem místo a veličinu $\frac{a}{b}$, obdržíme

$$\left|\frac{a + b}{b}\right| \leqq 1 + \left|\frac{a}{b}\right|,$$

anebo vzhledem k vzorci (II)

$$|a + b| \leqq |a| + |b|. \tag{III}$$

Protože veličina

$$\xi + |a|$$

je buď uullou, aneb *hodnotou kladnou*, obdržíme podobnou cestou vzorec

$$|a - b| \geqq |\{|a| - |b|\}| \tag{IV}$$

Pomocí těchto vzorců dokážeme snadno správnost následujících theoremů.

Theorem I. *Je-li řada*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

konvergentní, je také řada absolutních hodnot t. j. řada

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

řadou konvergentní.

Je-li zase

$$a_\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda i,$$

jsou podle supposice řady

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n + \ldots$$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

konvergentními. V každé z těchto řad musí, jak známo, souhrn všech kladných členů zvlášť tvořiti řadu konvergentní a podobně i souhrn všech záporných členů. Tedy budou i řady

$$|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n| + \ldots$$
$$|\eta_1| + |\eta_2| + \ldots + |\eta_n| + \ldots$$

řadami konvergentními. Každá částka první z těchto dvou řad budiž menší než α, každá částka z druhé řady menší než β. Protože

$$|a_\lambda| = \sqrt{\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2} \leqq |\xi_\lambda| + |\eta_\lambda|$$

bude tedy i souhrn libovolného, konečného množství veličin $|a_\lambda|$ menší, než $\alpha + \beta$, čím věta je dokázána.

Theorem II. *Je-li řada*

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

konvergentní, je také řada

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

řadou konvergentní.

Ze vzorce

$$|a_\lambda| = \sqrt{\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2} \geqq |\xi_\lambda|$$

plyne, vzhledem k supposici, že každá částka řady

$$|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n| + \ldots$$

je menší nežli jistá, určitá hodnota α. Tedy je řada

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots$$

řadou konvergentní atd.

Theorem III. *Řada*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

konverguje, jestliže absolutní hodnota každé částky této řady je menší než jistá určitá hodnota α.

Částkou této řady nazýváme obdobně každý součet libovolného konečného množství členů a_n. Taková částka má tedy tvar

$$\sigma + \tau i,$$

kde σ je součet jistých hodnot ξ_λ, τ součet jistých η_λ. Protože podle supposice platí

$$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} < \alpha,$$

bude i

$$|\sigma| < \alpha, \quad |\tau| < \alpha.$$

Tedy je absolutní hodnota každé částky řady

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots$$

menší než α, t. j. tato řada konverguje atd.

Theorem IV. *U konvergentní řady*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

lze při sebe menší dané kladné veličině δ určiti n tak velké, že platí

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| < \delta.$$

Na levé straně stojící zde řada, jest to, co jsme dříve nazvali zbytkem dané řady. Jak známo, můžeme u řady

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

udati n tak velké, že o příslušném zbytku této řady platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots < \delta.$$

Nyní jest

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots$$

tedy platí uvedený theorem.

Řadu

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + .$$

příště kratčeji budeme označovati

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Tato známka má původ v tom, že se jistá veličina a považovala za mez, které se součet

$$\sum_{n=1}^{m} a_n.$$

při rostoucím m blíží; psalo se pak

$$a = \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Zde bylo ale nutné dbáti na pořádek (známkou právě naznačený), v jakém členy a_n se sčítaly.

Netřeba podotýkati, že u řad zavedené soustavy pořádek členů je lhostejným, že dále dovoleno shrnouti libovolně mnoho členů do skupin a sečísti tyto atd.

§. 18.

O součinech s neobmezeným množstvím činitelů.

Je-li

$$a_1 = 1 + b_1,\ a_2 = 1 + b_2, \ldots a_n = 1 + b_n, \ldots$$

utvořme řadu nových výrazů g_0, g_1, g_2, .. tímto spůsobem.

Budiž

$$g_0 = 1,$$
$$g_1 = b_1,$$
$$g_2 = b_2 + b_1 b_2. \qquad \text{atd.}$$

Všeobecně se dá g_m vyjádřiti co součin

$$b_m(g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{m-1}).$$

Obdržíme pak toto schema

$$\begin{array}{c|l}
g_0 & 1 \\
g_1 & b_1 \\
g_2 & b_2,\ b_1 b_2, \\
g_3 & b_3,\ b_1 b_3,\ b_2 b_3,\ b_1 b_2 b_3, \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots \\
g_n & b_n,\ b_1 b_n, \ldots, b_1 b_2 \ldots b_n, \\
\cdot & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Na pravé straně jsou všecky členy každého řádku přesně definovány. Protože máme neobmezeně mnoho veličin a_n, obdržíme na pravé straně neobmezeně mnoho řádků, a tedy veličin z hodnot b se skládajících. Patrně se tu bude součet všech veličin v prvních $(n + 1)$ řádcích rovnati součinu

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Nyní definujeme: Jest-li řada ze všech veličin pravé strany konverguje, nazveme i nekonečný součin

$$a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

součinem konvergentním a klademe pak hodnotu jeho za stejnou s hodnotou oné řady.

Protože tato řada obsahuje co část také řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

musí tato býti konvergentní, anebo platí-li

$$| b_k | = \beta_k,$$

je u konvergentního součinu

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \,.\,.\, (1 + b_n) \,.\,.\,. \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k,$$

konvergentní.

Podaná definice jest oprávněna, neboť se shoduje v případě konečného množství činitelů s dřívější definicí.

Z definice plyne: Hodnota konvergentního součinu nezávisí na pořádku, v jakém činitelé po sobě jdou.

Nyní dokážeme: *Jest:li řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k, \tag{2}$$

konverguje, je také součin (1) konvergentní.

Bude tedy konvergence udané řady (2) *nutnou* a *postačující* podmínkou pro konvergenci součinu (1).

Důkaz: Použijeme zde dvé pomocných vět. První věta zní takto: Jsou-li

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$$

kladné hodnoty a součet jejich menší než 1, platí

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \,.\,.\, (1 - \gamma_m) > 1 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \,.\,.\, + \gamma_m). \tag{3}$$

Neboť platí

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) = 1 - (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_1\gamma_2,$$

tedy

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) > 1 - (\gamma_1 + \gamma_2),$$

a z toho

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3) > (1 - [\gamma_1 + \gamma_2])(1 - \gamma_3).$$

Nyní platí

$$(1 - [\gamma_1 + \gamma_2])(1 - \gamma_3) = 1 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + (\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_3,$$

tedy

$$(1 - [\gamma_1 + \gamma_2])(1 - \gamma_3) > 1 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3),$$

a tedy i

$$(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3) > 1 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad \text{atd.}$$

Druhá pomocná věta jest evidentní nerovnost

$$1 + \gamma_k < \frac{1}{1 - \gamma_k}. \tag{4}$$

Nyní lze patrně udati v řadě (2) m tak velké, že o zbytku platí

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \beta_k < \alpha.$$

a α menší než 1. α jest tu kladné, racionálné číslo. Označíme-li

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\,..\,(1 + \beta_r),$$

známkou P_r, bude tu při $n > m$

$$P_n = P_m (1 + \beta_{m+1})(1 + \beta_{m+2})\,..\,(1 + \beta_n),$$

anebo vzhledem k vzorci (4)

$$P_n < P_m \frac{1}{(1 - \beta_{m+1})(1 - \beta_{m+2})\,..\,(1 - \beta_n)},$$

a vzhledem k vzorci (3)

$$P_n < \frac{P_m}{1 - (\beta_{m+1} + \beta_{m+2} + \ldots + \beta_n)} < \frac{P_m}{1 - \alpha}.$$

Nahradíme-li v dříve udaném schematu každé b_k hodnotou β_k, t. j. nahradíme-li každý člen jeho absolutní hodnotou, bude tu řada těchto absolutních hodnot patrně konvergentní; neboť každá její částka jest tu menší než

$$\frac{P_m}{1 - \alpha}.$$

Tedy je skutečně součin (1) konvergentní.

Budeme užívati pro nekonečný součin

$$a_1 a_2\,..\,a_n\,....$$

označení

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

O konvergentních součinech platí tyto věty: *Hodnota konvergentního součinu se nezmění, shrnou-li se i neobmezeně mnoho činitelů do skupin a vynásobí-ly se tyto, byť i těchto bylo neobmezeně mnoho.*

To plyne bezprostředně z toho, že součin konvergentní se rovná řadě, v které takové shrnutí členů je dovoleno.

Konvergentní součin zmizí jen tenkráte, když jeden z činitelů vymizí. Neboť, je-li zase

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\beta_k < \alpha,$$

a α menší než 1, bude absolutní hodnota součinu

$$\prod_{n=m+1}^{\infty}(1+b_n)$$

vzhledem k vzorci

$$|1+b_n| \geqq 1-\beta_n,$$

a k vzorci (3) větší než

$$1-\sum_{n=m+1}^{\infty}\beta_n,$$

tedy větší nežli kladná hodnota $1-\alpha$.

Zmizí-li tedy

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n,$$

musí konečný součin

$$a_1 a_2 \,.\,.\, a_m,$$

zmizeti, t. j. alespoň jeden z prvních m činitelů býti nullou. Této vlastnosti u součinů, jež definici konvergentních součinů nevyhovují, více není; tak na př. u součinu

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

je hodnota prvních n činitelů

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

blíží se tedy s rostoucím n nulle, kdežto činitel $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ se s rostoucím n blíží jedné.

Dále tu platí věty: Jsou-li

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n\,,\quad \prod_{n=1}^{\infty}c_n,$$

konvergentní součiny, bude

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n\,.\,\prod_{n=1}^{\infty}c_n=\prod_{n=1}^{\infty}(a_n c_n).$$

Z tohoto vzorce, jehož správnost netřeba blíže dokazovati, by plynula všeobecnější ještě věta, kdybychom přihlédli k tomu, že v každém z oněch dvou součinů lze libovolně pořádek činitelů změniti.

Není-li žádné c nullou, platí také

$$\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} c_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{c_n}\right).$$

Převedeme-li součinitele na pravé straně rovnice na tvar

$$1+\left(\frac{a_n}{c_n}-1\right),$$

třeba tu jen dokázati, že rada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{c_n}-1\right|,$$

konverguje. Platí-li

$$a_n = 1 + b_n\,, \quad c_n = 1 + d_n,$$

bude

$$\frac{a_n}{c_n}-1=\frac{b_n-d_n}{1+d_n}.$$

Klademe-li

$$|\,1+d_n\,| = \varepsilon_n,$$

nebude tu podle supposice žádná z kladných těchto hodnot ε_n nullou. Určíme-li nyní kladnou hodnotu ε tak, že pro každé n platí

$$\varepsilon_n > \varepsilon,$$

bude tedy platiti

$$\left|\frac{a_n}{c_n}-1\,\right| < \frac{1}{\varepsilon}\left|\,b_n-d_n\right|,$$

Takové ε různé s nullou lze vždy určiti; neboť součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n$$

je konvergentním, tedy pro každé n, jež je větší než jisté číslo m platí

$$|\,d_n\,| < \alpha,$$

a α menší než 1, tedy bude vzhledem k vzorci

$$|\,1+d_n\,| \geqq 1 - |\,d_n\,|,$$

každé ε_n pro $n > m$ větší než kladná hodnota $1-\alpha$; třeba tedy ε jen zvoliti tak, aby bylo různé s nullou, kladné a menší než $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ a $(1-\alpha)$.

Označíme-li

$$|\,b_k\,| = \beta_k, \quad |\,d_k\,| = \delta_k,$$

platí

$$| b_k - d_k | < \beta_k + \delta_k,$$

tedy i

$$\left| \frac{a_n}{c_n} - 1 \right| < \frac{1}{\varepsilon} (\beta_n + \delta_n).$$

Z toho plyne, že každý člen řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{c_n} - 1 \right|,$$

je menší než příslušný člen *konvergentní řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + \delta_n) \frac{1}{\varepsilon},$$

čímž správnost udaného vzorce je dokázána.

§. 19.

O geometrickém znázornění komplexních veličin.

Volme v rovině libovolnou přímku OA za základní jednotku 1, přímku OB na OA kolmou, za základní jednotku i, když platí

$$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}.$$

Z toho, co jsme o znázornění veličin o dvou jednotkách pravili, plyne, že tu každé přímce OC bude odpovídati jedna a jen jedna veličina komplexní

$$c = \alpha + \beta i$$

a naopak. Anebo jinak řečeno, bude tímto spůsobem i každému bodu C odpovídati jedna a jen jedna komplexní veličina c a naopak.

Považujeme-li přímky procházející body O, A a O, B za osy souřadnic, bude tu míti bod C za první souřadnici α, za druhou β. Zde klademe směr od O k A a od O k B za positivní a v každé ose za jednotku délek délku $\overline{\mathrm{OA}}$.

Jest zřejmé, že platí

$$\overline{\mathrm{OC}} = | c |.$$

Všechny vzorce o absolutních hodnotách platící, lze z vět o trojúhelníku odvoditi.

Toto znázornění komplexních veličin má mimo svoji jednoduchost také tu výhodu, že lze součin dvou veličin cd jednoduše a obdobně pojmu součinu geometricky definovati a sice tímto spůsobem.

Budiž

$$c' = \alpha i - \beta.$$

O příslušném bodu C′ platí

$$\overline{OC} = \overline{OC'},$$

a OC′ je kolmá na OC. Obdržíme zde novou soustavu souřadnou, jejíž osy procházejí body O, C a O, C′; směr od O k C a od O k C′ je kladný a za základní jednotku délek v každé ose platí délka $\overline{OC}$.

Nyní definujeme:

Součin $c \,.\, d$ je zase veličina komplexní a sice odpovídá této veličině onen bod E, jenž má v soustavě souřadné OC, OC′ tytéž souřadnice, jako bod D (příslušný veličině d) v soustavě OA, OB.

Platí-li tedy

$$d = \gamma + \delta i$$

bude E míti v soustavě OC, OC′ souřadnice

$$\gamma \,.\, \overline{OC}, \quad \delta \,.\, \overline{OC}.$$

Odpovídá-li bodu E veličina $e = \mu + \nu i$, snadno se přesvědčíme, že tu skutečně platí

$$e = c \,.\, d.$$

Jest důležité zde podotknouti, že *Gauss* v arithmetickém pojednání o bikvadratických zbytcích (über biquadratische Reste, 2 sv.) velmi jasně a obšírně o tomto předmětu pojednal.

Tímto jsme základy arithmetiky ukončili.

Zbývá ještě zde jen k té otázce odpověděti, zda-li by nebylo prospěšné, soustavy o více než dvou jednotkách do arithmetiky zavésti. Aniž bychom blíže o této otázce pojednali, budiž zde jen podotknuto, že *takové soustavy v podstatě nic nového obsahovati nemohou a že nelze více u takových soustav jednoduchost základních úkonů v plné míře tak zachovati, jako se to dělo u soustavy komplexních veličin.*