Sluší podotknouti, že ve skutečnosti spoluúčinkování mnohých jiných sil nelze vždy z úvahy vypustiti a proto právě uvedená relace mezi P, Q, R má platnost toliko theoretickou a vztahuje se pouze k těmto silám.

I při ostatních strojích upouští se v theorii od jiných mimotných sil (tření a jiných překážek), vyjma ten případ, že by se tyto mimotné síly zvlášť napřed vyšetřily a s danými silami v patřičné spojení přivedly.

A i za těch okolností dá se identita principu, na kterém podmínky rovnováhy při strojích jednoduchých spočívají, při vší zdánlivé zevnější různosti zřejmě poznati.

Pravděpodobnost a posteriori.

Napsal

Augustin Pánek.

1. Pravděpodobnost jistého zjevu určená pouhým rozumováním, na základě podmínek v samé úloze obsažených, sluje *pravděpodobností a priori* (pravděpodobnost důvodná neb deduktivní).

Ve společenském životě, v politice, a zejmena ve vědách přírodních, kde nejvíce se užívá pravděpodobnosti, v nejmenším počtu případů známy jsou příčiny, které k uskutečnění jakéhosi zjevu působí. Zde nutno *pokusem, experimentem* aneb *pozorováním*, cestou tedy *empirickou*,*) určiti pravděpodobnost, že ten neb onen zjev nastane. Tato pravděpodobnost, odvozená na základě zkušenosti, praxe, jmenuje se *pravděpodobností ze zkušenosti* neb *z pozorování* aneb *pravděpodobností a posteriori* (pravděpodobnost návodná neb induktivní).

Jak povědomo, jest každý zjev účinkem jakési příčiny

---

*) Tak na základě statistiky lze sestrojiti approximativní vzorec

$$y = 59 - \tfrac{3}{4}x,$$

podle kterého možno vypočítati, kolik let bude ještě jakás osoba živa (y), jestliže nynější stáří její jest x. Vzorec tento má platnost pro osoby, které mají 6 až 64 léta.

aneb, jinak řečeno, příčina má za následek zjev z ní plynoucí. Účinky příčin poznáváme vůbec dedukcí i indukcí zároveň.*)

2. Zvolme si případ takový, při němž by příčiny nějakého zjevu měly omezený počet hypothes nebo supposic, tak že by mimo tyto hypothesy každá jiná vyloučena byla.

Dejme tomu, že v $n = p + q$ pokusech neb pozorováních nastane p-krát zjev A a q-krát zjev B, při čemž možno přijmouti, že příčiny, které působí k uskutečnění zjevu A, mají r hypothes různých. Tu možno a priori ustanoviti pravděpodobnost jednotlivých případů, ve kterých zjev A neb B dle těchto r hypothes nastane.

Jsou-li dle 1., 2., ..., r-té hypothesy pro zjev A absolutní pravděpodobnosti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, budou pravděpodobnosti zjevu kontrarního B dle týchže hypothes a v témž pořadí

$$1 - \omega_1 = v_1, \quad 1 - \omega_2 = v_2, \quad \ldots, \quad 1 - \omega_r = v_r.$$

Hledíme-li ke složitému zjevu, že v n pokusech neb pozorováních nastane p-krát zjev A a q-krát zjev opačný B, a označíme-li podle vytknutých hypothes pravděpodobnosti posloupně písmeny $P_1, P_2, \ldots, P_r$, bude, jak známo,

$$P_1 = (n)_p\, \omega_1^p v_1^q, \quad P_2 = (n)_p\, \omega_2^p v_2^q, \quad \ldots, \quad P_r = (n)_p\, \omega_r^p v_r^q.$$

Z toho dedukujeme, že ona hypothesa jest pravdě nejpodobnější, která podává složitého zjevu skutečně pozorovaného pravděpodobnost největší. Můžeme tedy říci: *pravděpodobnosti*

---

*) První pokusy o počtu pravděpodobnosti a posteriori pocházejí od anglických učenců *Bayes-a* (1763) a *Price-a* (1764). Viz: Philosophical Transactions for 1763 and 1764. *Price* jest onen známý odpůrce materialismu a těch zásad *Lockových*, které k učení materialistickému vésti mohou.

První všeobecné vzorce o počtu pravděpodobnosti a posteriori podal však *Laplace*, kteréhož dlužno až dosud pokládati za předního mathematika v oboru počtu pravděpodobnosti. Později zabýval se touto pravděpodobností hlavně *Gauss* (Theoria motus corporum coelestium, 1809), *Lacroix* (Traité élémentaire du Calcul des Probabilités, 1816 neb 1822), *Poisson* (Récherches sur les Probabilités des Jugements..., 1837. Německé vydání s dodatky pořídil *Schnuse* s názvem: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1841), *Cournot* (Exposition de la théorie des Chances et des Probabilités, 1843) a slavný mathematik ruský *Ostrogradskij* (Sur la probabilité des hypothèses. Mélanges math. et astr., 1859).

hypothes mají se k sobě, jako absolutní pravděpodobnosti zjevů z hypothes oněch resultující. Tuto fundamentální větu vyslovil nejprve *Bayes* (Philosophical Transactions 1763).

Nazveme-li pravděpodobnosti oněch hypothes posloupně $H_1, H_2, \ldots, H_r$, platí tedy úměra

$$H_1 : H_2 : \ldots : H_r = P_1 : P_2 : \ldots : P_r$$

aneb

$$\frac{H_1}{P_1} = \frac{H_2}{P_2} = \ldots = \frac{H_r}{P_r} = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} H_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} P_\lambda}.$$

Ale poněvadž jedna ze všech hypothes pravdivou býti musí, jest součet pravděpodobností všech hypothes roven jednotce (symbolu jistoty nebo nutnosti), $\sum\limits_{\lambda=1}^{r} H_\lambda = 1$; tudíž plyne z poslední úměry

$$H_1 = \frac{P_1}{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} P_\lambda}, \quad H_2 = \frac{P_2}{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} P_\lambda}, \quad \ldots, \quad H_r = \frac{P_r}{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} P_\lambda}, \qquad (1)$$

což znamená: *pravděpodobnost jedné z hypothes rovná se zlomku, jehož čitatelem jest pravděpodobnost zjevu pozorovaného z téže hypothesy a priori vypočítaná, a jmenovatelem součet pravděpodobností téhož zjevu vypočtěných obdobně dle všech možných hypothes.*

Toto důležité pravidlo sluje *poučkou Bayes-ovou* a bylo uveřejněno poprvé ve Philosophical Transactions, 1763.

Z poučky této soudíme, že pravděpodobnosti H jsou relativní, vyjadřujíce, že jistá hypothesa spíše se přihodí než některá z ostatních.

3. Vykonáme-li $n = p + q$ pozorování a udá-li se p-krát zjev A a q-krát zjev B, nastává otázka, jaká jest pravděpodobnost, že v dalších $n' = p' + q'$ pokusech přihodí se p'-krát zjev A a q'-krát zjev B.

Vyhoví-li r hypothes n skutečným pozorováním, můžeme každou hypothesu pokládati za zjev. Podle každé z těchto r hypothes máme jakousi pravděpodobnost, že zjev A neb B v $\overline{n+1}$ pokuse nastane. Pravděpodobnost tato jest složitá a rovná se součinu z hypothesy a pravděpodobnosti, že onen zjev dle téže hypothesy skutkem se stane.

Jestliže 1., 2., ..., r-tou domněnku připustíme, musí očekávaný zjev A nastati. Buďtež příslušné pravděpodobnosti, že týž zjev nastane, τ_λ a podobně τ'_λ pravděpodobnosti, že nastoupí zjev opačný B, pak jest

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathrm{H}_1\,\omega_1\,, & \tau'_1 &= \mathrm{H}_1\,v_1\,; \\ \tau_2 &= \mathrm{H}_2\,\omega_2\,, & \tau'_2 &= \mathrm{H}_2\,v_2\,; \\ &\;\vdots & &\;\vdots \\ \tau_r &= \mathrm{H}_r\,\omega_r\,, & \tau'_r &= \mathrm{H}_r\,v_r\,, \end{aligned} \tag{2}$$

při čemž $v_\lambda = 1 - \omega_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, r$.

Nazveme-li pravděpodobnosti s_λ, že v oněch dalších n' pokusech nastane p'-krát zjev A a q'-krát zjev B, bude dle jednotlivých hypothes

$$\begin{aligned} s_1 &= \mathrm{H}_1\,(n')_{p'}\,\omega_1^{p'} v_1^{q'}, \\ s_2 &= \mathrm{H}_2\,(n')_{p'}\,\omega_2^{p'} v_2^{q'}, \\ &\;\vdots \\ s_r &= \mathrm{H}_r\,(n')_{p'}\,\omega_r^{p'} v_r^{q'}. \end{aligned}$$

Ale poněvadž všecky hypothesy stejně možny jsou, jest pravděpodobnost K, že v oněch n' pokusech p'-krát zjev A a q'krát zjev B nastane, karakterisována vzorcem

$$\mathrm{K} = \sum_{\lambda=1}^{r} s_\lambda = (n')_{p'} \sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{H}_\lambda\,\omega_\lambda^{p'} v_\lambda^{q'}. \tag{3}$$

Zvláštní případ vzorce (3) dostaneme, učiníme-li si otázku: jaká jest pravděpodobnost, že v $\overline{n+1}$ pokuse nastane zjev A.

Tu dlužno položiti $n' = 1$, $p' = 1$, $q' = 0$, tedy

$$\mathrm{K} = \sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{H}_\lambda\,\omega_\lambda, \tag{4}$$

kterýž vzorec možno přímo dle (2) napsati, neboť v tomto zvláštním případě veličiny s přejdou v τ.

Vzorec (4) možno uvésti dle (1) na tvar

$$\mathrm{K} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{P}_\lambda\,\omega_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{r} \mathrm{P}_\lambda}.\text{*)} \tag{4'}$$

---

*) Při výkladu o počtu pravděpodobnosti na středních školách mělo by se přihlédnouti též aspoň z části ku pravděpodobnosti a posteriori, třeba nebyla posud do školních knih pojata.

Příklad 1. V osudí jest pět kuliček a sice barvy bílé a černé. Učiňme několik tahů, na př. čtyři, a po každém tahu vložme kuličku zpět do osudí. V těchto pokusech vyňata byla třikráte kulička bílá a jednou černá; kolik jest v osudí kuliček bílých a kolik černých.*)

Zde jsou pouze čtyři hypothesy možny.

Dle I. hypothesy jsou v osudí 4 bílé a 1 černá kulička,
„ II. „ 3 „ 2 černé kuličky,
„ III. „ 2 „ 3 „ a
„ IV. „ 1 bílá a 4 „ .

Každá tato domněnka má určitou absolutní pravděpodobnost, z nichž onu, že vytáhneme kuličku bílou, naznačme ω, a že černou v, tudíž budou dle domněnek těchto posloupně pravděpodobnosti

$$\omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{3}{5}, \quad \omega_3 = \frac{2}{5}, \quad \omega_4 = \frac{1}{5},$$

$$v_1 = \frac{1}{5}, \quad v_2 = \frac{2}{5}, \quad v_3 = \frac{3}{5}, \quad v_4 = \frac{4}{5}.$$

Hledíme-li ke složitému zjevu, že ve čtyřech tazích byla vyňata třikrát bílá a jednou černá kulička, jsou pravděpodobnosti hypothesám těmto posloupně vyhovující

$$P_1 = (4)_3\, \omega_1^3\, v_1 = 4 \,.\left(\frac{4}{5}\right)^3 .\, \frac{1}{5} = \frac{256}{625},$$

$$P_2 = (4)_3\, \omega_2^3\, v_2 = 4 \,.\left(\frac{3}{5}\right)^3 .\, \frac{2}{5} = \frac{216}{625},$$

$$P_3 = (4)_3\, \omega_3^3\, v_3 = 4 \,.\left(\frac{2}{5}\right)^3 .\, \frac{3}{5} = \frac{96}{625},$$

$$P_4 = (4)_3\, \omega_4^3\, v_4 = 4 \,.\left(\frac{1}{5}\right)^3 .\, \frac{4}{5} = \frac{16}{625}.$$

Pravdě nejpodobnější jest tedy hypothesa prvá, že se totiž v osudí nalézají 4 bílé a 1 černá kulička, a pravdě nejméně podobná jest hypothesa poslední, že se totiž v osudí nalézají 1 bílá a 4 černé kuličky. Kdyby se však dále v pokusech pokračovalo, změnily by se tyto pravděpodobnosti.

---

*) Srovnej spis slavného ruského mathematika *Saviče*, který do němčiny přeložil C. G. *Lais* s názvem: „Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen und geodätischen Messungen oder die Methode der kleinsten Quadrate,“ 1863.

Chceme-li nyní srovnati svrchu řečené čtyři hypothesy, nutno si položiti otázku: jaká jest pravděpodobnost, že první hypothesa spíše nastane než jedna z ostatních tří.

Zde se vyskytuje relativní pravděpodobnost a tudíž dle 1., 2., 3., a 4. hypothesy jest

$$H_1 = \frac{\frac{256}{625}}{\frac{256}{625} + \frac{216}{625} + \frac{96}{625} + \frac{16}{625}} = \frac{256}{584},$$

dále $$H_2 = \frac{216}{584}, \; H_3 = \frac{96}{584}, \; H_4 = \frac{16}{584},$$

z čehož opět poznáváme, že prvá hypothesa jest pravdě nejpodobnější a poslední nejméně pravdě podobná.

Jaká jest nyní pravděpodobnost, že i na př. v dalších čtyřech pokusech vyňata bude třikrát kulička bílá a jednou černá? Poněvadž

$$s_1 = (n')_{p'} H_1 \omega_1^{p'} v_1^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{256}{584} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{256}{584} \cdot \frac{256}{625},$$

$$s_2 = (n')_{p'} H_2 \omega_2^{p'} v_2^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{216}{584} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{216}{584} \cdot \frac{216}{625},$$

$$s_3 = (n')_{p'} H_3 \omega_3^{p'} v_3^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{96}{584} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{96}{584} \cdot \frac{96}{625},$$

$$s_4 = (n')_{p'} H_4 \omega_4^{p'} v_4^{q'} = (4)_3 \cdot \frac{16}{584} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{584} \cdot \frac{16}{625},$$

obdržíme dle vzorce (3)

$$K = \frac{1}{584 \,.\, 625} (256^2 + 216^2 + 96^2 + 16^2) = \frac{15208}{45625}$$

aneb přibližně $K = \frac{1}{3}$. (Dokončení.)

Základové arithmetiky.

Dle výkladů professora K. Weierstrassa

napsal

Ludvík Kraus.

Oddělení I.

(Pokračování.)

§. 12.

O řadách obsahujících kladné i záporné členy.

Na položených základech můžeme nyní snadno vytknouti význam řad všeobecných, t. j. takových, jež obsahují kladné