

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Čeněk Strouhal

Stanovení relativné hmoty země a slunce na základě fyzikálním

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 1, 1--10

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108804>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1901

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Stanovení relativní hmoty země a slunce na základě fyzikálních.

Napsal prof. Dr. V. Strouhal v Praze.

Stanoviti poměr hmoty země ke hmotě slunce jest úkolem nikoli snadným, kterýž řeší astronomie methodami, založenými na studiu pohybu těles nebeských. Takovým základem jest pohyb měsíce, pokud se jeví býti rušen sluncem (Hansen). Jiným základem jsou perturbace, jež způsobuje země v pohybech planet, zejména Venuše a Marse (Leverrier, Harkness, Tisserand, Newcomb, Backlund). Že úkol jest nesnadným, viděti nejlépe z výsledků, jež od různých zde uvedených badatelů byly vypočítány a jež se rozeznávají vespolek měrou větší než při methodách astronomických bývá pravidlem.

Vzhledem k tomu jest zajímavo upozorniti, že také fysika k řešení úkolu toho přispívá. Veličinou zde jakoby sprostředkující jest *konstanta gravitační*. Astronomie i fysika určuje tuto konstantu číselně, dle vlastních method, tam velmi jednoduchých, zde dosti obtížných a pracných, při čemž se číselné hodnoty vztahují na určité základní jednotky délky, hmoty a času. Poněvadž pak tyto jednotky základní jsou zcela jiné v astronomii a zcela jiné ve fysice, rozeznávají se číselné hodnoty pro konstantu gravitační v astronomii a ve fysice nalezené, jsouce rozdílné svým základem. Proto vede srovnávání obou hodnot k *výsledku novému*, kterým se k řešení úkolu výše naznačeného přispívá.

1. Vizme především, jak astronomie konstantu gravitační zavádí a číselně určuje. Kolem slunce, hmoty M , obíhá v době T oběžnice, hmoty m , v elliptické dráze, jejíž poloosa hlavní budiž a , vedlejší b , numerická excentricita e , parametr p . Za dobu T opíše tedy průvodič r plochu πab , tudíž za jednotku času plochu s , která jest určena vzorcem

$$s = \frac{\pi ab}{T}.$$

Dle třetího zákona Keplerova platí relace

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{1 + \frac{m}{M}} : \frac{a'^3}{1 + \frac{m'}{M}},$$

tak že lze na místě doby oběhu T zavést do hořejšího vzorce pro s výraz *úměrný*, totiž

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}$$

a nahradíme-li pak ještě poloosu b výrazem

$$a\sqrt{1 - e^2},$$

obdržíme

$$s = C\sqrt{a(1 - e^2)} \cdot \sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

kdež znamená C konstantu úměrnosti.

Vzhledem k vzorci

$$p = a(1 - e^2),$$

lze formálně jednodušeji psáti

$$s = C\sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

a s velkou přibližností

$$s = C\sqrt{p},$$

poněvadž jest hmota oběžnice proti hmotě slunce velmi malou.

Obě rovnice poslední obsahují ve formě nejjednodušší všechny tři zákony Keplerovy spojené. Plocha průvodičem za každou jednotku časovou opsaná jest (velmi přibližně) úměrná kořenu z parametru dráhy. Věta platí ostatně netoliko pro dráhy elliptické, nýbrž pro dráhy v kuželosečkách vůbec.

Konstantu úměrnosti C určíme číselně použíce rovnic
hořejších na konkrétní případ *naší země* a volíce určité jednotky.
Obdržíme tak vztah

$$\frac{\pi ab}{T} = C \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

čili

$$\frac{\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{T} = C \sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

ve kterémž toliko třeba, veličiny zde přicházející v jistých
jednotkách číselně vyjádřiti a pak konstantu C počítati. Jednotkou
délky jest v astronomii právě poloosa dráhy zemské; tudíž jest

$$a = 1.$$

Jednotkou času jest střední den sluneční; v této jednotce
jest

$$T = 365 \cdot 2563835.$$

Jednotkou hmoty jest hmota slunce; tudíž jest

$$M = 1.$$

Zbývá tedy ještě m . Pro tuto hmotu přijal Gauss hodnotu

$$m = \frac{1}{354710}.$$

Z těchto dat vypočítáme

$$\lg 2C = 8 \cdot 2355814 - 10$$

$$2C = 0 \cdot 01720210.$$

Počítá se konstanta $2C$ a nikoli C , poněvadž má jednoduchý
význam. Kdyžby se totiž přibližně kladla hmota $m = 0$, vyšlo by

$$2C = \frac{2\pi}{T},$$

což jest průměrná úhlová rychlost, s jakou průvodič postupuje,
vyjádřena v jednotce radiant a vztahovaná na střední den sluneční.
Dle toho vzorce vyšlo by

$$\begin{aligned}\lg 2C &= 8.2355821 \\ 2C &= 0.01720213.\end{aligned}$$

Rozdíl mezi touto hodnotou přibližnou a onou správnou zde sice jest, avšak, jak čísla ukazují, jest velice nepatrný. V logaritmu činí rozdíl jen 6.7 jednotek sedmého místa decimalního.*)

2. Význam konstanty $2C$ vzhledem k úkolu napřed uvedenému vynikne zvlášť, když se ukáže, v jakém vztahu jest ke konstantě gravitační κ . Vyjádříme-li vzájemné urychlení mezi sluncem M a oběžnicí m jednak dle zákonů pohybu centrálního, jednak dle zákona gravitačního, obdržíme rovnici

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = \kappa \frac{M + m}{a^2}.$$

Připojíme-li k ní rovnici hořejší, kterou se konstanta C zavedla, totiž

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = C \sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

obdržíme výslednou relaci

$$\kappa M = (2C)^2.$$

Čtverec konstanty $2C$ a konstanta gravitační κ jsou tedy veličiny úměrné; faktorem úměrnosti jest hmota slunce M . Když však přijmeme základní jednotky astronomické, pro které jsme nahoře číselnou hodnotu $2C$ počítali, pak jest

$$M = 1,$$

tudíž jednoduše

$$\kappa = (2C)^2.$$

Z hořejší číselné hodnoty $2C$ obdržíme tudíž ihned číselnou hodnotu κ , totiž

$$\kappa = 2.959 \cdot 10^{-4}.$$

3. Také fysika snaží se číselnou hodnotu konstanty gra-

*) Srovnej G. Gruss, Základové theoretické astronomie, 1897, pag. 13.

vítační stanoviti, methodami různými, o nichž minulého roku přehledně bylo referováno*). Hojný číselný material, zjednaný pracemi celého století, jest po ruce; referent sestavil výsledky, jichž došli různí pozorovatelé v různých dobách, ne pro konstantu gravitační samu, nýbrž pro veličinu jinou, s ní určitou relací spojenou, totiž pro střední hustotu země, kteráž jest přehlednější a má jednodušší význam. Výsledky tyto i v dobách nejnovějších zjednané liší se od sebe dosti značně. Tak udává**) *Wilsing* 5·594 a 5·577, a vedle toho *Richarz* a *Krigar Menzel* 5·505, což jest rozdíl jedno procento přesahující. Bylo by žádoucí, aby práce celého století byla zakončena kritickým rozbořem všech výsledků, tak aby podobně, jako se děje v astronomii (na př. pro parallaxu slunce), mohla jistá hodnota jakožto pravdě nejpodobnější byti všeobecně uznána a do počtů jiných přijímána. Kdyby se prostě ze všech výsledků, jak je tam referent sestavil, vzal arithmetický průměr, vyšlo by číslo 5·44. K první orientaci výsledek tento stačí; při další úvaze nutno však přihlédnouti k tomu, že váha různých výsledků není stejnou, přes to, že každý z pozorovatelů se snažil co nejvíce přesný výsledek si zabezpečiti; ale zkušenosti doby, o něž se opíral, a prostředky jemné mechaniky, jimiž vládl, byly různé. Vzhledem k tomu dlužno novějším pozorováním, a tu zvláště některým z nich, přičísti větší váhu, čímž se výsledek spíše těmto přizpůsobí. Za pravdě nejpodobnější pokládá „Bureau des longitudes“ hodnotu

$$S = 5.50 \frac{g}{cm^3},$$

kteráž je v souhlasu, v mezích chyby pravděpodobné tam udané, s výsledkem, jehož prací 14letou došli *Richarz* a *Krigar Menzel*.

Se střední hmotou specifickou S jest konstanta gravitační κ spojena relací

$$\kappa \cdot S = \frac{G}{\frac{4}{3} \pi R}.$$

*) Dr. Vlad. Novák, Časopis pro pěst. mathem. a fys. roč. XXIX. pag. 10.

**) l. c. pag. 28.

Zde znamená R střední poloměr země, G střední urychlení ryze gravitační (bez centrifugálního) pro zemi naši při hladině moře. Číselně jest

$$R = 6371 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$G = 982 \cdot 3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

z čehož plyne

$$\kappa \cdot S = 3 \cdot 6808 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Jsou tudíž hodnoty k sobě náležející

$$S = 5 \cdot 50 \frac{g}{\text{cm}^3}$$

$$\kappa = 6 \cdot 69 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{g \cdot \text{sec}^2}.$$

4. Jak viděti, jest číselná hodnota konstanty gravitační určená fysikálně zcela jinou než určená astronomicky. Důvodem toho jest, že výpočet obou založen na základních jednotkách zcela různých; v astronomii jsou jednotkami těmito poloosa a dráhy zemské, hmota \odot slunce a den d středního času slunečního; ve fysice jsou to cm , g , sec . Zde pak ukazuje se na příkladu klassickém důležitost rozměrů. Chceme-li obě číselné hodnoty κ , jež ovšem vyjadřují totéž, do rovnice zavést, dlužno psáti

$$6 \cdot 69 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{g \cdot \text{sec}^2} = 2 \cdot 959 \cdot 10^{-4} \frac{a^3}{\odot \cdot d^2}.$$

Odvodivše rovnici tuto, vraťme se k úkolu napřed vytčenému. Z rovnice té plyne

$$\frac{6 \cdot 69 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 959 \cdot 10^{-4}} = \left(\frac{a}{\text{cm}} \right)^3 : \frac{\odot}{g} \cdot \left(\frac{d}{\text{sec}} \right)^2.$$

Zde jest především

$$\frac{d}{\text{sec}} = 86400.$$

Poměr $\frac{a}{cm}$ lze určit z rozměrů země, na nichž definice metru založena, a z parallaxy slunce. Pro tuto přijala „Conférence internationale des étoiles fixes“ v Paříži 1896 hodnotu

$$8 \cdot 80."$$

Přijme-li se pak pro aequatoreální poloměr země R_0 hodnota (A. Clarke)

$$R_0 = 6378 \cdot 3 \text{ km},$$

vychází

$$\frac{a}{cm} = 149501 \cdot 10^8.$$

Tím zbývá v rovnici hořejší, jakožto jediná neznámá, poměr

$$\frac{\odot}{g}$$

a tento lze počítati, t. j. vyjádřiti hmotu slunce v grammech. Aby se dostala čísla přehlednější, zavedme hmotu naší země \oplus do počtu, píšíce

$$\frac{\odot}{g} = \frac{\odot}{\oplus} \cdot \frac{\oplus}{g}.$$

Z hodnot nahoře uvedených, pro R a S, vypočíta se

$$\frac{\oplus}{g} = 5 \cdot 9579 \cdot 10^{27};$$

země naše má tedy hmotu téměř 6 tisíc trillionů tun. Zbývá pak již jen poměr $\frac{\odot}{\oplus}$, kterýž lze počítati. Výsledkem počtu jest hodnota

$$\frac{\odot}{\oplus} = 332310$$

anebo, jak se v astronomii obyčejně psává, kde se hmota slunce bere za jednotku,

$$\frac{\oplus}{\odot} = \frac{1}{332310}.$$

5. Mohlo by se zdáti — na první pohled — že metoda výpočtu zde uvedená jest zásadně pochybenou proto, poněvadž konstanta $2C$, na níž výpočet poměru $\frac{m}{M}$ hmoty země a slunce byl založen, již známost tohoto poměru předpokládá. Avšak bližší úvaha ukazuje, že v konstantě $2C$ onen poměr jen jako člen *korrekční*, malého významu, jest obsažen, tak že koriguje jen poslední sedmé místo decimalní v jejím logaritmu. *Gauss* počítal konstantu $2C$ z hodnoty

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{354710}.$$

Leverrier (1872) našel pro týž poměr na základě saekularních nerovností v pohybech planet Venuše a Marse působených přitažlivostí země, hodnotu

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{324439},$$

kteou přijímají též *Annaly* observatoře v Paříži.

Obě hodnoty differují velmi značně. Avšak na konstantu $2C$ má difference ta vliv velmi nepatrný; neboť jest

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{354710}} = 0\cdot00000067$$

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{324439}} = 0\cdot00000061,$$

rozdíl sahá tedy až do osmého decimalního místa v logaritmu konstanty $2C$. Z toho důvodu podržuje se i nyní ještě ta hodnota $2C$, jak ji vypočítal *Gauss*, jakožto konstanta absolutní, ač jsou nyní k dispozici data velmi přesná a provádí se při výpočtech jen malá kompensace*) v astronomické jednotce délkové, t. j. v odlehlosti a .

6. Ke konci přihledněmež, jak výsledek, jehož jsme došli z měření fysikalních, souhlasí s těmi, jež byly odvozeny metodami astronomickými. Přestaáme na hodnotách, pracemi nejno-

*) *Gruss*, l. c. pag. 16.

věššími zjednaných, jež se v astronomii pokládají dle nynějšího stavu věci za nejlepší.

„*Berliner astronomisches Jahrbuch*“ pro rok 1902 uvádí dle *Newcomba* pro úhrnnou hmotu země a měsíce dohromady hodnotu

$$\frac{\textcircled{C} + \textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{329390}.$$

Harkness dochází jakožto hodnoty pravdě nejpodobnější

$$\frac{\textcircled{C} + \textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{327214}.$$

„*Nautical Almanac*“ pro rok 1902 přijímá dle *Backlunda* hodnotu

$$\frac{\textcircled{C} + \textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{328129}.$$

Uznáme-li pro hmotu měsíce za pravdě nejpodobnější hodnotu

$$\frac{\textcircled{C}}{\textcircled{\ddot{O}}} = \frac{1}{79\cdot667}$$

dle *Hansena*, jenž jest v tomto oboru (měsíce) autoritou všeobecně uznanou, vypočítáme z dat nahoře uvedených pro poměr hmoty země a slunce hodnoty následující:

$$\frac{\textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{333650} \dots \text{Newcomb}$$

$$\frac{\textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{331410} \dots \text{Harkness}$$

$$\frac{\textcircled{\ddot{O}}}{\textcircled{O}} = \frac{1}{332360} \dots \text{Backlund.}$$

Tato čísla změnila by se jen velmi málo, kdybychom chtěli pro hmotu měsíce přijmouti hodnotu novější

$$\frac{\textcircled{C}}{\textcircled{\ddot{O}}} = \frac{1}{81\cdot068},$$

kteřouž vypočítal *Harkness* z pozorování přílivu a odlivu.

Arithmetický průměr hodnot vypočtených dává

$$\frac{\bar{\delta}}{\odot} = \frac{1}{332473}.$$

Srovnávajíc s tímto výsledkem hodnotu nahoře vypočtenou

$$\frac{\bar{\delta}}{\odot} = \frac{1}{332310},$$

uznáme, že souhlas jest velmi dobrý.

Z tohoto souhlasu lze usouditi zase zpět, že hodnota konstanty gravitační, kterou jsme za základ výpočtu položili, jest i z důvodů astronomických pravdě velice podobnou.

Jednoduchý přístroj k objektivnímu demonstrování proudů proměnných.

Sestavil

B. Navrátil,

ředitel vyšší reálné školy v Prostějově.

V kruhové a přesně rovné desce D (obr. 1.) o průměru asi 35 cm vyřízne se soustředně kruhový otvor asi 10 cm v průměru. Desku tu postavíme na nohách N na podstavu P, již třemi šrouby s lze postavit vodorovně, po případě dle potřeby nakloniti. Na jedné straně desky D (v obr. 1. na zadní, v obr. 2. na pravé) umístěny jsou na koncích svislého a vodorovného průměru 4 třmínky a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , jimiž procházejí čtverhranné tyčky, jež šroubovými maticemi podél obou průměrů pošinouati lze, aniž samy se otáčejí. Na háčcích, jimiž vnitřní konce tyček jsou opatřeny, visí na stejně dlouhých nitích (žádá-li se větší pružnosti v kroucení, vezmeme přiměřeně tlusté struny) uprostřed vnitřního kruhového otvoru částka přístroje, označená i, již nazveme indikátorem.

Jest to korek vypilovaný asi v té podobě, jak obr. 2. ukazuje, do jehož čelné široké části zasazeno jest malé čtver-