Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O přibližných hodnotách řetězce se stálým jmenovatelem

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 5, 200–204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108800

O přibližných hodnotách řetězce se stálým jmenovatelem.

Pro žáky středních škol napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Sestavíme-li dle známého pravidla přibližné hodnoty řetězce stálého jmenovatele majícího

$$(1)\qquad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}}$$

poznáme především, že tu platí, značí-li p_n čitatele a q_n jmenovatele n-té hodnoty takové,

$$(2)\qquad p_n = q_{n-1},$$

a obdržíme pro první po sobě jdoucí hodnoty jmenovatele soustavu vzorců

$$\begin{aligned}
q_1 &= a,\\
q_2 &= a^2 + 1,\\
q_3 &= a^3 + 2a,\\
q_4 &= a^4 + 3a^2 + 1,\\
q_5 &= a^5 + 4a^3 + 3a,\\
q_6 &= a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1,\\
q_7 &= a^7 + 6a^5 + 10a^3 + 4a,\\
q_8 &= a^8 + 7a^6 + 15a^4 + 10a^2 + 1,
\end{aligned}$$

z níž indukce vede nás k sestavení pravidla, dle něhož se řídí výraz obecný pro q_n.

Především tu patrno, že platí

$$(3)\qquad q_n = a^n + A_2 a^{n-2} + A_4 a^{n-4} + A_6 a^{n-6} + \ldots,$$

kdež jen třeba určiti vzorec pro A_{2k}, aby se vypočítaly hodnoty součinitelů pro $k = 1, 2, 3, \ldots$.

A tu poznáváme z předcházející soustavy vzorců, že A_2 jest $(n-1)$ní číslo *přímkové* čili *linearní**) a tedy

*) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních.“ V Praze, 1877. pag. 46. vzorec (19), (20) a (21).

(4) $$A_2 = (n-1)_1.$$

Sestavíme-li součinitele třetího sloupce této soustavy do řady, obdržíme

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots,$$

z čehož plyne, že A_4 představuje číslo *trojúhelníkové* čili *triangulární*, jež obecně vyjadřuje se vzorcem

$$u_n = (n+1)_2;$$

a poněvadž řada těchto čísel začíná teprva čtvrtým vzorcem, nutno tu místo n psáti $n-3$, aby se první tři vzorce vypustily, takže bude

(5) $$A_4 = (n-2)_2.$$

Podobně činí součinitelé čtvrtého sloupce této soustavy vzorců řadu

$$1, 4, 10, 20, \ldots,$$

kteráž obsahuje čísla *čtyrstěnná* čili *tetraëdrická*,*) jež obecně vyjadřují se vzorcem

$$u_n = (n+2)_3;$$

avšak první číslo této řady vyskytuje se teprva u šestého vzorce naší soustavy, takže tu $n-5$ klásti nutno za n, načež se obdrží

(6) $$A_6 = (n-3)_3.$$

A již z těchto prvních vzorců (4), (5) a (6) vysvítá, že všeobecně platí o součinitelích řady (3)

(7) $$A_{2k} = (n-k)_k.$$

Abychom úsudek tento indukcí poskytnutý přesně odůvodnili, užijme známého Bernoulliova obratu od n k $n+1$ postupujícího, a zjednejme si ze vzorce takto odvozeného

---

**) S jiného hlediska *jehlancová* a sice *trojboká*.

$$(8)\quad q_n = a^n + (n-1)_1 a^{n-2} + (n-2)_2 a^{n-4} + (n-3)_3 a^{n-6} + \ldots$$

dvojím spůsobem hodnotu pro q_{n+1} a sice

a) tím, že do vzorce (8) zavedeme $n+1$ místo n, čímž povstane

$$q_{n+1} = a^{n+1} + n_1 a^{n-1} + (n-1)_2\, a^{n-3} + (n-2)_3\, a^{n-5} + \ldots,$$

b) tím, že podlé známého vzorce rekurrentního

$$(9)\qquad q_n = a q_{n-1} + q_{n-2}$$

sestavíme pomocí hodnoty q_n a q_{n-1} hodnotu q_{n+1}, totiž

$$q_{n+1} = \left.\begin{array}{l} a^{n+1} + (n-1)_1 a^{n-1} + (n-2)_2 a^{n-3} + (n-3)_3 a^{n-5} + \ldots \\ + \qquad\quad a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + \ldots \end{array}\right\},$$

kdež na pravé straně možná stejné mocniny veličiny a spojiti, užije-li se známé vlastnosti binomických koëfficientů, vyjádřené vzorcem

$$n_{k-1} + n_k = (n+1)_k,$$

čímž i v tomto druhém případě se obdrží

$$q_{n+1} = a^{n+1} + n_1 a^{n-1} + (n-1)_2\, a^{n-3} + (n-2)_3\, a^{n-5} + \ldots,$$

týž tedy výsledek co v příkladě prvém, takže vzorec (8) se jeví býti obecně platným.

Majíce zřetel ke vzorci (2), můžeme tedy n-tou příbližnou hodnotu řetězce (1) vyjádřiti neodvisle čili independentně vzorcem*)

$$(10)\quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + (n-2)_1 a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + (n-4)_3 a^{n-7} + \ldots}{a^n + (n-1)_1 a^{n-2} + (n-2)_2\, a^{n-4} + (n-3)_3\, a^{n-6} + \ldots}.$$

Jak se k tomuto vzorci přijde deduktivně, vyložil jsem již v tomto časopise, roč. III. na str. 61. a pak na str. 72. svého *Alg. tvarosloví.* Zde jen poznamenávám, že touto cestou zároveň odůvodněn jest tamní vzorec

$$\Sigma K_{n-2k} = (n-k)_k\, a^{n-2k}.$$

---

*) Tím zároveň podáno jest vyčíslení druhého tvaru independentního. totiž determinantního.

Poznámka.

Vlastnosť přibližných hodnot řetězce (1), vyjádřená vzorcem (2), vede ještě k dalším zajímavým několika výsledkům, o nichž tuto budiž taktéž zmínka učiněna.

Užijeme-li jí při známém fundamentálním vzorci

$$p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n,$$

obdržíme napřed

$$q_{n-2} q_n - q_{n-1}^2 = (-1)^n;$$

dosadíme-li pak za q_n hodnotu ze vzorce (9) plynoucí, zjednáme si napřed

$$aq_{n-2} q_{n-1} + q_{n-2}^2 - q_{n-1}^2 = (-1)^n$$

anebo se zřetelem ke vzorci (2)

$$ap_n q_n + p_n^2 - q_n^2 + (-1)^n = 0. \tag{11}$$

A tento vzorec ukazuje, jak možná řešiti neurčitou rovnici kvadratickou

$$axy + x^2 - y^2 = \pm 1. \tag{12}$$

Třebať jen sestaviti řadu přibližných hodnot řetězce (1) a vybrati z ní členy na *lichém* místě stojící, platí-li na pravé straně rovnice $+1$, a členy na *sudém* místě stojící, obsahuje-li -1, načež platí řešení vzorcem (8) obecně vyjádřené, totiž

$$\left.\begin{array}{l} x = p_n \\ y = q_n \end{array}\left\{\begin{array}{lr} n = 1, 3, 5, \ldots \text{ pro } & +1 \\ n = 2, 4, 6, \ldots \quad " & -1 \end{array}\right.\right\}. \tag{13}$$

Chceme-li na př. řešiti rovnici

$$3xy + x^2 - y^2 = 1,$$

zjednejme si řadu přibližných hodnot řetězec

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}$$

buď postupně nebo dle vzorce (8), totiž

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}, \ldots$$

načež obdržíme dle vzorce (13) soustavu hodnot rovnici vyhovujících

$$x = 1, 10, 109, 360, \ldots$$
$$y = 3, 33, 360, 1113, \ldots$$

Čtyry věty arithmetické.

Podává

A. Strnad, professor v Hradci Králové.

V zasedání král. české společnosti nauk dne 9. listopadu r. 1887 předložil p. *M. Lerch* důkaz dvou zajímavých theoremů arithmetických; tyto jednají o funkci ψ (α, β) vyjádřující počet všech dělitelů čísla α, které jsou větší než β. Budiž dovoleno, abychom tuto dokázali věty ony způsobem novým, zcela elementárným, jímž nabudeme zároveň prostředku k stanovení dvou určitých součtů, k funkci ψ se vztahujících.

1. Nechať značí Ψ (α, β) všechny dělitele čísla α, které jsou větší než β; jich počet jest ψ (α, β). Znakem

$$(a) \qquad \overset{n}{\underset{\varrho=0}{\Psi}}(n+\varrho, \varrho)$$

zahrňme veškeré dělitele obsažené ve výrazech

$$\Psi(n, o), \quad \Psi(n+1, 1), \quad \Psi(n+2, 2), \ldots, \quad \Psi(2n, n);$$

k hodnotám dalším netřeba zvláště přihlížeti, jelikož při $\varrho > n$ bylo by

$$\Psi(n+\varrho, \varrho) = n+\varrho, \qquad \psi(n+\varrho, \varrho) = 1.$$

Skupina dělitelů (a) počíná členem 1 a končí $2n$; neboť z čísel daných tvarem $\Psi(n, 0)$ jest patrně nejmenší rovno 1, kdežto výraz $\Psi(2n, n)$ značí jediné toliko číslo $2n$. Snadnou úvahou můžeme se přesvědčiti, *že ve skupině* (a) *neschází žádné*