Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Nové odvození třetí základní poučky determinantní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 5, 193–199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108796

Nové odvození třetí základní poučky determinantní.

Podal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Jakož známo jest, možná všeobecnou nauku o determinantech zosnovati a uspořádati na základě *tří* hlavních pouček, takže na místě *prvním* objeví se *rozkladní poučka Laplace-ova*, na *druhém* pak místě uvede se odvozená z ní *poučka multiplikační* a na *třetím* konečně místě octne se *poučka o vzájemnosti mezi původním a přidruženým determinantem a jich obapolnými subdeterminanty*, jež zakládá se obyčejně na poučce druhé.

Mnohem lépe však hoví požadavkům soustavnosti pořádek a postup odvozovací ten, kde s hlediska jediného nebo na základě jedné poučky odůvodňují se všechny poučky ostatní, zde tedy na rozkladní poučce jmenované buduje se celá soustava nauky determinantní. A že tak možná učiniti, budiž ukázáno v řádcích následujících.

Značí-li totiž, jak obyčejně se píše,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3 \dots l_n),$$

a označíme-li subdeterminanty jednotlivým prvkům těmto příslušné písmenami velkými, takže obdobně jest

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \dots & L_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & L_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \dots & L_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & C_n & \dots & L_n \end{vmatrix} = (A_1 B_2 C_3 \dots L_n),$$

vyjadřuje se třetí základní poučka dříve připomenutá všeobecným vzorcem *)

(1) $$\Delta_n^{n-k-1}(a_1 b_2 \ldots g_k) = (H_{k+1} J_{k+2} \ldots L_n),$$

z něhož plyne pro $k = 0$ vzorec zvláštní

(2) $$\Delta_n^{n-1} = (A_1 B_2 C_3 \ldots L_n) = \Delta'_n,$$

jelikož se na pravé straně počíná prvkem prvním, kterýmž jest A_1. A podobně vyplyne z relace (1) pro

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

soustava vzorců zvláštních, ukazujících, jak se má subdeterminant libovolného stupně soustavy přidružené Δ'_n k doplňkovému subdeterminantu soustavy hlavní Δ_n.

Abychom pak odvození vzorce (1) založiti mohli na poučce *Laplace-ově*, užiti nutno zvláštního vzorce transformačního, jenž v tomto případě má tvar

(3) $$\Delta_n (a_1 b_2 c_3 \ldots j_{n-2}) = (K_{n-1} L_n),$$

obsažen jsa patrně ve vzorci (1) pro $k = n - 2$.**)

Nejsnadněji se tu přijde k cíli cestou indukce, jelikož od determinantu stupně třetího, čtvrtého a pátého snadno se učiní přechod k determinantu stupně n-tého.

1. Jestli v našem vzorci transformačním (3) $n = 3$, bude tu

(4) $$\Delta_3 a_1 = (B_2 C_3),$$

což souhlasí se vzorcem (1) pro $k = 1$.

Abychom si pak zjednali pro tento případ obdobu vzorce (2), sestavme podlé tohoto vzorce (4) soustavu

$$\begin{aligned} \Delta_3 a_1 &= (B_2 C_3) \\ \Delta_3 b_1 &= (A_2 C_3) \\ \Delta_3 c_1 &= (A_2 B_3), \end{aligned}$$

*) Užijeme-li označení prvků jedinou písmenkou dvěma příponami opatřenou, vezme vzorec (1) na se tvar mnohem průhlednější a sice

$$\Delta_n^{n-k-1} (a_{11} a_{22} \ldots a_{k,k}) = (A_{k+1,\, k+1} \ldots A_{nn}).$$

**) Důležitý vzorec tento uveřejnil jsem poprvé v Sitzungsb. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 1879 „Über eine neue Determinantentransformation."

násobme jednotlivé vzorce tyto, jak po sobě jdou, subdeterminanty soustavy Δ_3, zvané

$$\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{B}_1, \quad \mathrm{C}_1$$

a učiňme pak součet na obou stranách; obdržíme tu, jakož snadno se pochopí,

$$\Delta_3 (a_1 \mathrm{A}_1 + b_1 \mathrm{B}_1 + c_1 \mathrm{C}_1) = (\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{C}_3),$$

a jelikož trinom na levé straně obsažený má hodnotu determinantu Δ_3, konečně

$$(5) \qquad \Delta_3^2 = (\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{C}_3),$$

což se shoduje se vzorcem (2) pro $n = 3$.

2. Jestli ve vzorci (3) $n = 4$, bude

$$(6) \qquad \Delta_4 (a_1 b_2) = (\mathrm{C}_3 \mathrm{D}_4),$$

což se především srovnává se vzorcem (1) pro $k = 2$, $n = 4$. Sestavíme-li pak na základě tohoto vzorce (6) soustavu

$$\begin{aligned} \Delta_4 (a_1 a_2) &= 0, \\ \Delta_4 (a_1 b_2) &= (\mathrm{C}_3 \mathrm{D}_4), \\ \Delta_4 (a_1 c_2) &= (\mathrm{B}_3 \mathrm{D}_4), \\ \Delta_4 (a_1 d_2) &= (\mathrm{B}_3 \mathrm{C}_4) \end{aligned}$$

a znásobíme-li tyto vzorce, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$\mathrm{A}_2, \quad \mathrm{B}_2, \quad \mathrm{C}_2, \quad \mathrm{D}_2,$$

bude součet na levé straně provedený

$$\Delta_4 [(a_1 a_2) \mathrm{A}_2 + (a_1 b_2) \mathrm{B}_2 + (a_1 c_2) \mathrm{C}_2 + (a_1 d_2) \mathrm{D}_2],$$

součet pak na pravé straně dle známé poučky zjednodušený

$$= (\mathrm{B}_2 \mathrm{C}_3 \mathrm{D}_4).$$

Na levé straně možná pak determinanty druhého stupně v závorkách uzavřené rozložiti a tak si zjednati dle známých relací

$$\begin{aligned} &a_1 (a_2 \mathrm{A}_2 + b_2 \mathrm{B}_2 + c_2 \mathrm{C}_2 + d_2 \mathrm{D}_2) \\ &- a_2 (a_1 \mathrm{A}_1 + b_1 \mathrm{B}_2 + c_1 \mathrm{C}_2 + d_1 \mathrm{D}_2) = a_1 \Delta_4, \end{aligned}$$

takže spojíme-li tyto výsledky, konečně obdržíme

$$\Delta_4^2 a_1 = (B_2 C_3 D_4), \tag{7}$$

což se srovnává se vzorcem (1) pro $k = 1$, $n = 4$.

Od tohoto vzorce (7) jest pak přechod ku poslednímu vzorci tvaru (2) velmi snadný; sestavíme-li podlé něho

$$\begin{aligned} \Delta_4^2 a_1 &= (B_2 C_3 D_4), \\ \Delta_4^2 b_1 &= (A_2 C_3 D_4), \\ \Delta_4^2 c_1 &= (A_2 B_3 D_4), \\ \Delta_4^2 d_1 &= (A_2 B_3 C_4) \end{aligned}$$

a znásobíme-li tu jednotlivé relace, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad D_1,$$

obdržíme na levé straně

$$\Delta_4^2 (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1) = \Delta_4^3,$$

na straně pak pravé determinant stupně čtvrtého

$$= (A_1 B_2 C_3 D_4),$$

takže tu tedy platí

$$\Delta_4' = (A_1 B_2 C_3 D_4) = \Delta_4^3. \tag{8}$$

3. Jestli pak $n = 5$, plyne ze vzorce (3) přímo

$$\Delta_5 (a_1 b_2 c_3) = (D_4 E_5), \tag{9}$$

což se srovnává se vzorcem (1) pro $k = 3$, $n = 5$.

Podlé vzorce (9) možná pak si zjednati soustavu

$$\begin{aligned} \Delta_5 (a_1 b_2 a_3) &= 0, \\ \Delta_5 (a_1 b_2 b_3) &= 0, \\ \Delta_5 (a_1 b_2 c_3) &= (D_4 E_5), \\ \Delta_5 (a_1 b_2 d_3) &= (C_4 E_5), \\ \Delta_5 (a_1 b_2 e_3) &= (C_4 D_5). \end{aligned}$$

Násobíme-li tu pak relace, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$A_3, \quad B_3, \quad C_3, \quad D_3, \quad E_3$$

a sečteme-li na obou stranách, vznikne na straně pravé součet

$$= (C_3 D_4 E_5),$$

kdežto na levé straně se obdrží napřed, rozložíme-li tu determinanty stupně třetího v závorkách obsažené,

$$\begin{aligned} &\Delta_5 [(a_1 b_2) a_3 + (a_2 b_3) a_1 + (a_3 b_1) a_2] A_3 \\ + &\Delta_5 [(a_1 b_2) b_3 + (a_2 b_3) b_1 + (a_3 b_1) b_2] B_3 \\ + &\Delta_5 [(a_1 b_2) c_3 + (a_2 b_3) c_1 + (a_3 b_1) c_2] C_3 \\ + &\Delta_5 [(a_1 b_2) d_3 + (a_2 b_3) d_1 + (a_3 b_1) d_2] D_3 \\ + &\Delta_5 [(a_1 b_2) e_3 + (a_2 b_3) e_1 + (a_3 b_1) e_2] E_3 \end{aligned}$$

anebo spořádáme-li tu podlé subdeterminantů stupně druhého v závorkách obsažených,

$$\begin{aligned} &\Delta_5 (a_1 b_2) [a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 + d_3 D_3 + e_3 E_3] \\ + &\Delta_5 (a_2 b_3) [a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 + d_1 D_3 + e_1 E_3] \\ + &\Delta_5 (a_3 b_1) [a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 + d_2 D_3 + e_2 E_3], \end{aligned}$$

což se podlé známých vzorců rozkladných redukuje na

$$\Delta_5 (a_1 b_2) \Delta_5 = \Delta_5^2 (a_1 b_2),$$

takže porovnáním oboustranných výsledků konečně vznikne vzorec

$$(10) \qquad \Delta_5^2 (a_1 b_2) = (C_3 D_4 E_5),$$

což se srovnává se vzorcem (1) pro $k = 2$, $n = 5$.

Podlé tohoto vzorce (10) sestavme si pak řadu relací

$$\begin{aligned} \Delta_5^2 (a_1 a_2) &= o, \\ \Delta_5^2 (a_1 b_2) &= (C_3 D_4 E_5), \\ \Delta_5^2 (a_1 c_2) &= (B_3 D_4 E_5), \\ \Delta_5^2 (a_1 d_2) &= (B_3 C_4 E_5), \\ \Delta_5^2 (a_1 e_2) &= (B_3 C_4 D_5) \end{aligned}$$

a znásobme jednotlivé vzorce, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$A_2, \ B_2, \ C_2, \ D_2, \ E_2,$$

načež poskytne součet na straně pravé determinant stupně čtvrtého

$$= (B_2 C_3 D_4 E_5),$$

kdežto na levé straně obdržíme, rozložíme-li subdeterminanty stupně druhého v závorkách obsažené, patrně

$$\begin{aligned} &\Delta_5^2\, a_1(a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + d_2 D_2 + e_2 E_2) \\ -&\Delta_5^2\, a_2(a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 + d_1 D_2 + e_1 E_2) = \Delta_5^3\, a_1, \end{aligned}$$

takže porovnáním oboustranných výsledků vznikne

$$\Delta_5^3\, a_1 = (B_2 C_3 D_4 E_5), \tag{11}$$

což se srovnává se vzorcem (1) pro $k = 1$, $n = 5$.

A podlé tohoto vzorce (11) možná pak sestaviti

$$\begin{aligned} \Delta_5^3\, a_1 &= (B_2 C_3 D_4 E_5), \\ \Delta_5^3\, b_1 &= (A_2 C_3 D_4 E_5), \\ \Delta_5^3\, c_1 &= (A_2 B_3 D_4 E_5), \\ \Delta_5^3\, d_1 &= (A_2 B_3 C_4 E_5), \\ \Delta_5^3\, e_1 &= (A_2 B_3 C_4 D_5); \end{aligned}$$

znásobíme-li pak tyto relace, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1$$

a sečteme-li konečně na obou stranách, obdržíme

$$\Delta_5^4 = (A_1 B_2 C_3 D_4 E_5) = \Delta_5',\tag{12}$$

což souhlasí se vzorcem (2) pro $n = 5$.

4. Srovnáme-li postup*), jakým tu v odstavci 1., 2. a 3. přišlo se k jednotlivým výsledkům vzorcem (1) zahrnutým, poznáme velmi snadno, jak by se všeobecně vedlo vyšetřování a odvozování obdobné.

Vyšlo by se od transformačního vzorce (3), totiž

$$\Delta_n\,(a_1 b_2 \ldots j_{n-2}) = (K_{n-1}\, L_n),$$

podlé něhož by se ustavila řada n relací, majících na posledním místě levé strany prvky

$$a_{n-2},\ b_{n-2},\ \ldots,\ l_{n-2};$$

*) Jde opačným směrem, porovnáme-li s postupem provedeným v pojednání mém „Nový důkaz poučky . . .“, uveřejněném v Časop. pro pěstov. math. a fys. Roč. I. pag. 6. a reprodukovaném v *Günther* „Lehrbuch der Determinantentheorie“ II. Aufl. 1877, pag. 73.

obě strany vzorců takto zřízené soustavy znásobily by se, jak po sobě jdou, subdeterminanty

$$A_{n-2}.\ B_{n-2},\ \ldots,\ L_{n-2};$$

a pak by se učinil oboustranný součet, z něhož by po příslušné redukci vyplynulo

$$(13) \qquad \Delta_n^2\,(a_1 b_2 \ldots i_{n-3}) = (J_{n-2}\,K_{n-1}\,L_n).$$

Podlé tohoto vzorce (13) sestavila by se pak řada n relací, končících na levé straně prvky

$$a_{n-3},\ b_{n-3},\ \ldots,\ l_{n-3},$$

kteráž by se na obou stranách obdobně znásobila řadou subdeterminantů

$$A_{n-3},\ B_{n-3},\ \ldots,\ L_{n-3},$$

načež by oboustranný součet po náležité redukci podal vzorec

$$(14) \qquad \Delta_n^3\,(a_1 b_2 \ldots h_{n-4}) = (I_{n-3}\ J_{n-2}\ K_{n-1}\ L_n).$$

Podobným spůsobem by se od tohoto vzorce přišlo k relaci

$$(15) \qquad \Delta_n^4\,(a_1 b_2 \ldots g_{n-5}) = (H_{n-4}\ I_{n-3} \ldots L_n),$$

odtud pak dále k relaci

$$(16) \qquad \Delta_n^5\,(a_1 b_2 \ldots f_{n-5}) = (G_{n-5}\ H_{n-4} \ldots L_n),$$

a takto vždy postupně dále, až by na předposledním místě objevila se relace

$$(17) \qquad \Delta_n^{n-2}\,a_1 = (B_2 C_3 \ldots L_n),$$

a na posledním místě

$$\Delta_n^{n-1} = (A_1 B_2 \ldots L_n) = \Delta'_n,$$

což se srovnává zcela se vzorcem (2).*)

*) Odvození toto jsem uveřejnil poprvé ve spisech jiho-slovanské akademie věd a umění v Záhřebě, 1887.