Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

HOMOMORPHISMEN VON PROJEKTIVEN RÄUMEN UND VERALLGEMEINERTE SEMILINEARE ABBILDUNGEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 21. Dezember 1973)

In der Arbeit [6] definierte F. RADÓ nichtinjektive Kollineationen projektiver Räume und verallgemeinerte semilineare Abbildungen der Vektorräume. Er bewies den Fundamentalsatz für nichtinjektive Kollineationen: *Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung von Vektorräumen induziert eine nichtinjektive Kollineation der entsprechenden projektiven Räume und jede nichtinjektive Kollineation ist durch irgendeine verallgemeinerte semilineare Abbildung induziert.* Zum Beweis wurde das Prinzip des Beweises vom Fundamentalsatz der projektiven Geometrie von [4] benutzt. Die Ergebnisse von [6] sind eine Verallgemeinerung einiger Ergebnisse von [2], [3].

Die vorliegende Arbeit knüpft an [6] an. In der Definition 3 wird der Begriff einer nichtinjektiven Kollineation von [6] so verallgemeinert, dass einige einschränkende Bedingungen der Definition 3,1 von [6] beseitigt werden. Die Abbildung von der Definition 3 wird Homomorphismus projektiver Räume genannt. Mittels der Definition 2 wird der Begriff einer verallgemeinerten semilinearen Abbildung von Vektorräumen in einem allgemeinerem Sinne als in der Definition 2,1 von [6] eingeführt. Ferner wird dann bewiesen, dass jede verallgemeinerte semilineare Abbildung von Vektorräumen einen Homomorphismus der entsprechenden projektiven Räume induziert und dass jeder Homomorphismus projektiver Räume durch eine verallgemeinerte semilineare Abbildung induziert wird. Zum Beweis dieser Behauptung wird das Beweisschema des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie von [1] benutzt.

Definition 1. Ein Unterring R des (nicht notwendig komutativen) Körpers F wird total in F genannt, falls $t \in F \setminus R \Rightarrow t^{-1} \in R$ gilt.

Satz 1. *Es sei R ein totaler Unterring in F. Dann ist*

$$R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0,\ t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$$

ein beiderseitiges Maximalideal in R und R/R_0 ist ein Körper.

Satz 2. *Sei R ein totaler Unterring in F und sei $R^* = R \setminus R_0$. Sei $t_i \in F$, $t_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann existiert ein Element $f \in F$ derart, dass $ft_i \in R$ für alle $i \in \in \{1, \ldots, n\}$ und $ft_j \in R^*$ für zumindest ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist.*

Die Beweise der Sätze 1, 2 sind in [5] durchgeführt.

Es sei ein Vektorraum A beliebiger Dimension über dem (nicht notwendig kommutativen) Körper F gegeben. Den, durch das Element $x \in A$, $x \neq 0$ generierten Unterraum in A, bezeichnen wir mit Fx.

Satz 3. *Für beliebige linear unabhängige Elemente x, y, z des Vektorraumes A gilt*

(a) $F(y - z) = (Fy + Fz) \cap [F(x - y) + F(x - z)]$,

(b) $F(x - y - z) = [F(x - y) + Fz] \cap [F(x - z) + Fy]$,

(c) $F(y + z) = [Fy + Fz] \cap [F(x - y - z) + Fx]$.

Der Beweis ist in [1] angeführt.

Definition 2. Es seien A, B Vektorräume über den Körpern F, G; sei R ein totaler Unterring im Körper F, $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0, t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$ und W ein Modul über dem Ring R, $W \subseteq A$.

Das Abbildungspaar (φ, σ), $\varphi : R \to G$, $\sigma : W \to B$ wird eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W genannt, wenn folgendes gilt:

1. $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, $\forall x, y \in W$.

2. $(tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall x \in W$.

3. $t^\varphi = 0 \Leftrightarrow t \in R_0$.

4. In jedem Unterraum $Fx \subseteq A$, $x \neq 0$ existiert ein Element y derart, dass $y^\sigma \neq 0$ ist.

5. In jedem Unterraum $V \subseteq A$, $\dim V = 2$ existieren Elemente $u, v \in W$ für welche u^σ und v^σ in B linear unabhängig sind.

6. Es existieren $x, y, z \in W$ so, dass $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma$ in B linear unabhängig sind.

Satz 4. *Die Abbildung φ von der Definition 2 ist ein Homomorphismus des Ringes R.*

Beweis. Es existiert ein Element $x \in W$, $x^\sigma \neq 0$. Nach den Eigenschaften 1,2 von der Definition 2 ergeben sich für beliebige $t_1, t_2 \in R$ die Beziehungen:
$[(t_1 + t_2)x]^\sigma = (t_1 + t_2)^\varphi x^\sigma = (t_1 x + t_2 x)^\sigma = (t_1 x)^\sigma + (t_2 x)^\sigma = t_1^\varphi x^\sigma + t_2^\varphi x^\sigma = (t_1^\varphi + t_2^\varphi) x^\sigma$. Daher ist $(t_1 + t_2)^\varphi = t_1^\varphi + t_2^\varphi$. Ferner ist $[(t_1 t_2) x]^\sigma = (t_1 t_2)^\varphi x^\sigma = [t_1(t_2 x)]^\sigma = t_1^\varphi (t_2 x)^\sigma = t_1^\varphi t_2^\varphi x^\sigma$ und deswegen auch $(t_1 t_2)^\varphi = t_1^\varphi t_2^\varphi$.

Bezeichnen wir $W_0 = \{u \in W \mid u^\sigma = 0\}$, $W^* = \{u \in W \mid u^\sigma \neq 0\}$. Es gilt $tu \in W_0$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W_0$. W_0 ist dann ein Untermodul in W. Ferner ist $tu \in W_0$, $\forall t \in R_0$, $\forall u \in W$ und $tu \in W^*$, $\forall t \in R^*$, $\forall u \in W^*$. Es sei $u \in W^*$, $t \in F \setminus R$ und setze man voraus, dass $tu \in W$ ist. Dann ist $t^{-1} \in R_0$ und $(t^{-1}tu)^\sigma = u^\sigma = (t^{-1})^\varphi (tx)^\sigma = 0$, dieses liefert aber einen Widerspruch, nachdem $u^\sigma \neq 0$ ist.

Bemerkung 1. Der Definition 2 nach ist $\operatorname{Ker}(\varphi) = R_0$ und deswegen ist R^φ mit R/R_0 isomorph und nach dem Satz 1 ist R^φ ein Körper. W^σ ist dann ein Vektorraum über dem Körper R^φ.

Bezeichnen wir $P(A)$, $P(B)$ die projektiven Räume, welche als die Verbände der Unterräume der Vektorräume A, B definiert sind. Die Unterräume der Dimension 1 in A, B werden Punkte und die Unterräume der Dimension 2 werden Geraden der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ genannt. Die Mengen der Punkte in $P(A)$, $P(B)$ bezeichnen wir der Reihe nach $\mathscr{B}(A)$, $\mathscr{B}(B)$.

Definition 3. Die Abbildung $\varkappa : \mathscr{B}(A) \to \mathscr{B}(B)$ wird Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ genannt, wenn diese den folgenden Bedingungen genügt:

1. Wenn die Punkte $P, Q, R \in \mathscr{B}(A)$ an irgendeiner Geraden in $P(A)$ liegen, dann liegen die Punkte $P^\varkappa$, $Q^\varkappa$, $R^\varkappa$ auf der Geraden in $P(B)$.

2. Auf jeder Geraden in $P(A)$ liegen Punkte P, Q, R, für welche $P^\varkappa \neq Q^\varkappa \neq R^\varkappa \neq P^\varkappa$ gilt.

3. Es existieren Punkte $X, Y, Z \in \mathscr{B}(A)$ so dass $X^\varkappa$, $Y^\varkappa$, $Z^\varkappa$ nicht auf einer Geraden in $P(B)$ liegen.

Satz 5. *Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W induziert einen Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ mittels der Vorschrift $(Fx)^\varkappa = Gx^\sigma$, $\forall x \in W^*$.*

Beweis. 1. $\varkappa$ ist eine Abbildung von $\mathscr{B}(A)$ in $\mathscr{B}(B)$: Sei $X \in \mathscr{B}(A)$ ein beliebiger Punkt. Nach 4 von der Definition 2 existiert $x \in W^*$, $X = Fx$. Setzen wir voraus, dass $Fx = Fy$, $y \in W^*$ gilt. Dann ist $y = tx$, $t \in F$ und daher folgt $t \in R^*$. Nach 2 von der Definition 2 ist $y^\sigma = (tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, wo $t^\varphi \in G$, $t^\varphi \neq 0$ und demzufolge gilt $Gx^\sigma = (Fx)^\varkappa = Gy^\sigma = (Fy)^\varkappa$.

2. Die Abbildung $\varkappa$ hat die Eigenschaft 1 von der Definition 3: Gegeben seien drei Punkte Fu, Fx, Fy, welche auf einer Geraden in $P(A)$ liegen. Wenn z. B. $(Fx)^\varkappa = (Fy)^\varkappa$ ist, dann ist die Bedingung 1 offenbar erfüllt. Setzen wir also voraus, dass $(Fx)^\varkappa \neq (Fy)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Die Elemente x, y wählen wir so dass $x, y \in W^*$ ist. Nachdem $Fu \subseteqq Fx + Fy$ ist, gibt es Elemente $t_1, t_2 \in F$ so dass $u = t_1x + t_2y$. Voraussetzungsgemäss ist $Fu \neq Fx, Fy$ und daher $t_1, t_2 \neq 0$. Nach dem Satz 2 existiert ein $t \in F$ so dass $tt_1 \in R$, $tt_2 \in R$ und z. B. $tt_1 \in R^*$. Dann ist $tu = tt_1x + tt_2y$, $tu \in W$ und $(tu)^\sigma = (tt_1)^\varphi x^\sigma + (tt_2)^\varphi y^\sigma$. Nachdem $(tt_1)^\varphi \neq 0$ und $Gx^\sigma \neq Gy^\sigma$

ist, gilt $(tu)^\sigma \neq 0$ und $G(tu)^\sigma \subseteqq Gx^\sigma + Gy^\sigma$. Dieses bedeutet, dass $(Fu)^\varkappa = (Ftu)^\varkappa \subseteqq$ $\subseteqq (Fx)^\varkappa + (Fy)^\varkappa$ gilt.

3. Die Abbildung $\varkappa$ hat die Eigenschaft 2 von der Definition 3: Es sei eine beliebige Gerade p in $P(A)$, d. h. ein Unterraum der Dimension 2 in A, gegeben. Nach 5 von der Definition 2 existieren $u, v \in W^* \cap p$ so dass $Gu^\sigma \neq Gv^\sigma$, d. h. auch $(Fu)^\varkappa \neq (Fv)^\varkappa$ ist. Es gilt ebenfalls $Fu \neq Fv$ und demzufolge ist $u - v \neq 0$. Dann ist $[F(u - v)]^\varkappa =$ $= G(u - v)^\sigma = G(u^\sigma - v^\sigma)$. Nachdem $G(u^\sigma - v^\sigma) \neq Gu^\sigma$, Gv^σ ist, gilt $(Fu)^\varkappa \neq$ $\neq (Fv)^\varkappa \neq [F(u - v)]^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$.

4. Die Eigenschaft 3 von der Definition 3 folgt sofort von der Voraussetzung 6 in der Definition 2 und von der Definition der Abbildung $\varkappa$.

Theorem. *Jeder Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ ist durch eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf einen gewissen Modul W induziert.*

Bemerkung 2. Der Beweis des Theorems ist ziemlich unfangreich, deswegen beweisen wir zuerst die Gültigkeit einiger Sätze, von denen dann die Behauptung des Theorems folgen wird. Weiterhin werden wir voraussetzen, dass $\varkappa$ ein Homomorphismus der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$ ist.

Satz 6. *Es seien Punkte $Fx, Fu \in \mathscr{B}(A)$ so gegeben, dass $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa \neq$ $\neq [F(x - u)]^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Setze man $(Fx)^\varkappa = Gx'$. Es existiert ein einziges Element $u' = h(x, x', u) \in B$, $u' \neq 0$ so dass $(Fu)^\varkappa = Gu'$, $[F(x - u)]^\varkappa = G(x' - u')$ gilt.*

Beweis. Nachdem $F(x - u) \subseteqq Fx + Fu$ gilt, ist nach 1 von der Definition 3 $[F(x - u)]^\varkappa \subseteqq (Fx)^\varkappa + (Fu)^\varkappa$. Wir setzen $[F(x - u)]^\varkappa = Ga$. Dann existieren $t \in G$, $b \in (Fu)^\varkappa$ so dass $a = tx' - b$ ist. Nachdem $Ga \neq Gx'$, $(Fu)^\varkappa$ ist, gilt $t \neq 0$, $b \neq 0$. Setzen wir $u' = t^{-1}b$. Dann ist $u' \neq 0$ und $(Fu)^\varkappa = Gu'$. Ausserdem gilt $[F(x - u)]^\varkappa = Ga = Gt^{-1}a = G(x' - u')$.

Es existiere in B ein Element u'' so dass $(Fu)^\varkappa = Gu''$, $[F(x - u)]^\varkappa = G(x' - u'')$ ist. Dann ist $Gu'' = Gu'$, $G(x' - u') = G(x' - u'')$ und es existieren $t_1, t_2 \in G$, $t_1, t_2 \neq 0$ so dass $u' = t_1u''$, $x' - u' = t_2(x' - u'') = x' - t_1u''$ ist. Daher ergibt sich $(t_2 - 1)\, x' = (t_2 - t_1)\, u''$. Nachdem $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$ ist, gilt $Gx' \neq Gu''$ und $t_1 = t_2 = 1$. Deswegen ist $u' = u''$.

Bemerkung 3. Wenn $(Fx)^\varkappa \neq (Fu)^\varkappa$ und $[F(x - u)]^\varkappa = (Fx)^\varkappa$ ist, dann setzen wir $h(x, x', u) = 0$. Für $u = 0$ setzen wir ebenfalls $h(x, x', 0) = 0$.

Satz 7. *Für die Punkte Fx, Fu seien die Forderungen des Satzes 6 erfüllt. Dann gilt $u' = h(x, x', u)$ genau dann, wenn $x' = h(u, u', x)$ ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar vom Satz 6.

Satz 8. *Es seien die Punkte* $Fa, Fb, Fc \in \mathscr{B}(A)$ *mit den folgenden Eigenschaften gegeben:* $(Fa)^\times = Ga'$, $(Fa)^\times, (Fb)^\times, (Fc)^\times$ *liegen auf keiner Geraden in* $P(B)$, $[F(a - b)]^\times \neq (Fa)^\times, (Fb)^\times$ *und* $[F(a - c)]^\times \neq (Fc)^\times$. *Setzen wir* $b' = h(a, a', b)$. *Dann existieren die Werte* $h(a, a', c)$, $h(b, b', c)$ *und es gilt* $h(a, a', c) = h(b, b', c)$.

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass $[F(a - c)]^\times \neq (Fa)^\times$ ist. Dann ist $(Fa)^\times \neq (Fc)^\times \neq [F(a - c)]^\times \neq (Fa)^\times$. Nach dem Satz 6 gibt es ein einziges Element $c' = h(a, a', c) \in B$, $c' \neq 0$. Dabei gilt $(Fa)^\times = Ga'$, $(Fb)^\times = Gb'$, $(Fc)^\times = Gc'$, $[F(a - b)]^\times = G(a' - b')$, $[F(a - c)]^\times = G(a' - c')$. Die Elemente a, b, c sind in A linear unabhängig und demzufolge gilt nach dem Satz 3 (a) $F(b - c) = (Fb + Fc) \cap [F(a - b) + F(a - c)]$. Nach 1 von der Definition 3 gilt dann $[F(b - c)]^\times \subseteq (Fb)^\times + (Fc)^\times$, $[F(b - c)]^\times \subseteq [F(a - b)]^\times + [F(a - c)]^\times$. Nachdem $(Fc)^\times \nsubseteq [F(a - b)]^\times + [F(a - c)]^\times$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times = [(Fb)^\times + (Fc)^\times] \cap [(F(a - b))^\times + (F(a - c))^\times] = (Gb' + Gc') \cap [G(a' - b') + G(a' - c')]$. Die Elemente a', b', c' sind in B linear unabhängig und nach dem Satz 3 (a) gilt: $(Gb' + Gc') \cap [G(a' - b') + G(a' - c')] = G(b' - c')$ und daher $[F(b - c)]^\times = G(b' - c')$. Nachdem $G(b' - c') \neq Gb', Gc'$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times \neq (Fb)^\times, (Fc)^\times$ und nach dem Satz 6 ist es möglich den Wert $h(b, b', c)$ eindeutig zu bestimmen. Dabei gilt $(Fb)^\times = Gb'$, $(Fc)^\times = Gc'$, $[F(b - c)]^\times = G(b' - c')$ und nach dem Satz 6 ist $c' = h(b, b', c)$.

2. Setzen wir voraus, dass $[F(a - c)]^\times = (Fa)^\times$ ist. Nach der Bemerkung 3 ist $h(a, a', c) = 0$. Nach dem Satz 3 (a) gilt $[F(b - c)]^\times \subseteq [F(a - c)]^\times + [F(a - b)]^\times = (Fa)^\times + (Fb)^\times$, $[F(b - c)]^\times \subseteq (Fc)^\times + (Fb)^\times$. Nachdem $(Fc)^\times + (Fb)^\times \neq (Fa)^\times + (Fb)^\times$ ist, gilt $[F(b - c)]^\times = (Fb)^\times$ und $h(b, b', c) = 0$.

Nach 3 von der Definition 3 existieren Punkte $X, Y, Z \in \mathscr{B}(A)$ derart, dass $X^\times, Y^\times, Z^\times$ nicht auf einer Geraden in $P(B)$ liegen. Setzen wir $X = Fx$, $X^\times = Gx'$. Auf der Geraden $X + Y$ existiert nach 2 von der Definition 3 soein Punkt R, dass $X^\times \neq Y^\times \neq R^\times \neq X^\times$ ist. Dann existiert ein Element $y \in A$ so dass $Y = Fy$, $R = F(x - y)$ ist. Nach dem Satz 6 existiert ferner ein einziges Element $y' = h(x, x', y) \in B$, $y' \neq 0$ so dass $(Fy)^\times = Gy'$, $[F(x - y)]^\times = G(x' - y')$ ist. Ähnlicherweise gibt es auf der Geraden $X + Z$ einen Punkt Q derart, dass $X^\times \neq Z^\times \neq Q^\times \neq X^\times$ ist und es existiert ein Element $z \in A$, für welches $Z = Fz$, $Q = F(x - z)$. Nach dem Satz 6 existiert wieder ein Element $z' = h(x, x', z) \in B$, $z' \neq 0$ so dass $(Fz)^\times = Gz'$, $[F(x - z)]^\times = G(x' - z')$ ist. Nach dem Satz 8 existiert dann $h(y, y', z)$ und es gilt $h(x, x', z) = h(y, y', z) = z'$. Unter der Anwendung des Satzes 7 ergibt sich ferner $x' = h(y, y', x) = h(z, z', x)$, $y' = h(x, x', y) = h(z, z', y)$. Weiterhin werden wir voraussetzen, dass die Punkte X, Y, Z, die Elemente x, x' und y, y', z, z' festgewählt sind.

Mit Hilfe der Punkte Fx, Fy definieren wir die Mengen W, W^*, W_0 durch die folgende Konstruktion:

Es sei $u \in A$, $u \neq 0$.

1. Wenn $(Fu)^{\times} \neq (Fx)^{\times}$ ist, dann ist

$$u \in W \Leftrightarrow [F(x - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times},$$

$$u \in W^* \Leftrightarrow [F(x - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times}, (Fx)^{\times},$$

$$u \in W_0 \Leftrightarrow [F(x - u)]^{\times} = (Fx)^{\times}.$$

2. Wenn $(Fu)^{\times} = (Fx)^{\times}$ ist, dann ist

$$u \in W \Leftrightarrow [F(y - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times},$$

$$u \in W^* \Leftrightarrow [F(y - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times}, (Fy)^{\times},$$

$$u \in W_0 \Leftrightarrow [F(y - u)]^{\times} = (Fy)^{\times}.$$

Im Falle $u = 0$ setzen wir $u \in W_0$.

Bemerkung 4. Offenbar gilt $W = W^* \cup W_0$, $W^* \cap W_0 = \emptyset$. Nach dem Satz 6 und der Bemerkung 3 existiert für jedes Element $u \in W$ ein Element $h(x, x', u) \in B$ bzw. $h(y, y', u) \in B$. Wenn z. B. $(Fu)^{\times} \neq (Fx)^{\times}$ ist, dann ist $h(x, x', u) \neq 0$ im Fall $u \in W^*$ und im Fall $u \in W_0$ ist $h(x, x', u) = 0$.

Satz 9. *Für jeden Punkt $U \in \mathscr{B}(A)$ existiert ein Element $u \in W^*$ so dass $U = Fu$ ist.*

Beweis. Es gilt entweder $X^{\times} \neq U^{\times}$ oder $Y^{\times} \neq U^{\times}$. Setzen wir voraus, dass $X^{\times} \neq U^{\times}$ ist. Auf der Geraden $X + U$ existiert ein Punkt R so dass $X^{\times} \neq U^{\times} \neq R^{\times} \neq X^{\times}$ ist. Dann existiert ein Eelement $u \in A$, für welches $U = Fu$, $R = F(x - u)$ gilt. Nachdem $[F(x - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times}, (Fx)^{\times}$ ist, gilt $u \in W^*$.

Satz 10. *Es sei $u \in W$, $u \neq 0$ gegeben. Wenn $(Fu)^{\times} \neq (Fx)^{\times}, (Fy)^{\times}$ ist, dann existieren Werte $u' = h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$ und es gilt $h(x, x', u) = h(y, y', u)$.*

Beweis. Da $(Fu)^{\times} \neq (Fx)^{\times}$, $u \in W$ ist, existiert nach der Bemerkung 4 ein Element $u' = h(x, x', u)$.

Setzen wir voraus, dass $(Fu)^{\times} \nsubseteq (Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$ ist. Nach dem Satz 8 existiert ein Element $h(y, y', u)$ und es gilt $u' = h(x, x', u) = h(y, y', u)$. Setzen wir voraus, dass $(Fu)^{\times} \subseteq (Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$ ist. Dann ist $(Fu)^{\times} \nsubseteq (Fx)^{\times} + (Fz)^{\times}$. Es gilt $[F(x - z)]^{\times} \neq (Fx)^{\times}, (Fz)^{\times}$ und da $u \in W$, $(Fu)^{\times} \neq (Fx)^{\times}$ ist, ist auch $[F(x - u)]^{\times} \neq (Fu)^{\times}$. Nach dem Satz 8 ist dann $h(x, x', u) = h(z, z', u)$. Daher folgt $[F(z - u)]^{\times} \neq (Fz)^{\times}$, wobei $[F(y - z)]^{\times} \neq (Fy)^{\times}, (Fz)^{\times}$ ist. Nachdem $h(x, x', z) = h(y, y', z) = z'$ ist, ist nach dem Satz 8 dann $h(z, z', u) = h(y, y', u)$ und wir bekommen schliesslich $h(x, x', u) = h(y, y', u)$.

Bemerkung 5. Nach einer Umtauschung der Punkte Fx, Fy, Fz im Satz 10 ergibt sich: Falls $(Fu)^* \neq (Fx)^*, (Fz)^*$ bzw. $(Fu)^* \neq (Fy)^*, (Fz)^*$ ist, dann ist $h(x, x', u) = h(z, z', u)$ bzw. $h(y, y', u) = h(z, z', u)$. Wenn $u \in W$, $u \neq 0$ ist, dann existieren zumindest zwei von den Werten $h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$, $h(z, z', u)$ die dann einander gleich sind. Im Falle $u \in W^*$ ist dieser geimeinsame Wert von Null verschieden und für $u \in W_0$ ist gleich Null. Im Falle $u = 0$ ist $h(x, x', u) = h(y, y', u) = h(z, z', u) = 0$.

Satz 11. *W ist eine Untergruppe der additiven Gruppe A und W_0 ist eine Untergruppe in W.*

Beweis. I. Wir beweisen, dass W eine Untergruppe in A ist.

1. Es sei $a \in W$, $a \neq 0$. Der Punkt $(Fa)^*$ gehört zumindest einer der Geraden $(Fx)^* + (Fy)^*$, $(Fx)^* + (Fz)^*$, $(Fy)^* + (Fz)^*$ nicht an; setzen wir z. B. voraus, dass $(Fa)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Da $a \in W$ ist, gilt $[F(x - a)]^* \neq (Fa)^*$ und nach dem Satz 8 ist auch $[F(y - a)]^* \neq (Fa)^*$. Setzen wir $q = y - x - a$. Vom Satz 3 ergibt sich

$$Fq = [F(y - x) + Fa] \cap [F(y - a) + Fx]\,, \tag{1}$$

$$F(x + a) = (Fx + Fa) \cap (Fq + Fy)\,. \tag{2}$$

Setzen wir voraus, dass $[F(x + a)]^* = (Fa)^*$ gilt. Nachdem $F(x + a) \subseteqq Fx + Fa$ ist, gilt $[F(x + a)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fa)^*$ und demzufolge ist $[F(x + a)]^* \neq (Fy)^*$. Von (2) bekommen wir $(Fq)^* \subseteqq (Fy)^* + [F(x + a)]^* = (Fy)^* + (Fa)^*$. Nachdem $[F(y - a)]^* \neq (Fa)^*$ ist, ist $(Fy)^* + (Fa)^* = [F(y - a)]^* + (Fa)^*$ und $(Fq)^* \subseteqq (Fa)^* + [F(y - a)]^*$. Nach (1) ist $(Fq)^* \subseteqq (Fx)^* + [F(y - a)]^*$. Da $(Fa)^* + [F(y - a)]^* \neq (Fx)^* + [F(y - a)]^*$ ist, gilt $(Fq)^* = [F(y - a)]^*$. Nach (1) ist ferner $(Fq)^* \subseteqq [F(y - x)]^* + (Fa)^*$, d. h. $[F(y - a)]^* \subseteqq [F(y - x)]^* + (Fa)^*$. Daher ist $[F(y - x)]^* \subseteqq (Fa)^* + [F(y - a)]^* = (Fa)^* + (Fy)^*$. Zugleich gilt $[F(y - x)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fy)^*$. Nachdem $(Fx)^* + (Fy)^* \neq (Fa)^* + (Fy)^*$ ist, gilt $[F(y - x)]^* = (Fy)^*$. Dieses ist aber ein Widerspruch. Es gilt also $[F(x + a)]^* \neq (Fa)^*$ und daher ist $-a \in W$.

2. Es sei $a, b \in W$, $a, b \neq 0$.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* \neq (Fb)^*$ ist. Von den Punkten $(Fx)^*, (Fy)^*, (Fz)^*$ liegt zumindest einer, z. B. $(Fx)^*$, nicht auf der Geraden $(Fa)^* + (Fb)^*$. Ferner gilt entweder $[F(a + b)]^* \neq (Fa)^*$ oder $[F(a + b)]^* \neq (Fb)^*$. Es sei $[F(a + b)]^* \neq (Fa)^*$. Setzen wir $q = x - (a + b)$ und setzen voraus, dass $(Fq)^* = [F(a + b)]^*$ ist. Dann ist $(Fa)^* + [F(a + b)]^* = (Fa)^* + (Fb)^* = (Fa)^* + (Fq)^*$. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq \subseteqq F(x - b) + Fa$ und deswegen ist $(Fq)^* \subseteqq [F(x - b)]^* + (Fa)^*$. Daher ergibt sich $[F(x - b)]^* \subseteqq (Fa)^* + (Fq)^* = (Fa)^* + (Fb)^*$. Zugleich ist $[F(x - b)]^* \subseteqq (Fx)^* + (Fb)^*$. Nachdem $(Fa)^* + (Fb)^* \neq (Fx)^* + (Fb)^*$ ist, ist $[F(x - b)]^* = (Fb)^*$. Dieses widerspricht aber der Voraussetzung $b \in W$. Es gilt also $[F(a + b)]^* \neq [F(x - (a + b))]^*$ und daher ist $a + b \in W$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fa)^{\times} = (Fb)^{\times}$ ist und sei $(Fx)^{\times} \neq (Fa)^{\times}$. Nachdem $a \in W$ ist, gilt $[F(x-a)]^{\times} \neq (Fa)^{\times}$ und deswegen ist auch $[F(x-a)]^{\times} \neq (Fb)^{\times}$. Nach den Fällen 1, 2a) ist $x - a \in W$ und auch $(x-a) - b \in W$. Wenn $[F(x - (a+b))]^{\times} = (Fx)^{\times}$ gilt, dann ist $a + b \in W_0$. Es sei $[F(x-(a+b))]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Nach 1,2a) ist $x - (x + a + b) = a + b \in W$.

II. Wir beweisen, dass W_0 eine Untergruppe in W ist.

1. Es sei $a \in W_0$, $a \neq 0$. $(Fa)^{\times}$ gehört zumindest einer der Geraden $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$, $(Fx)^{\times} + (Fz)^{\times}$, $(Fy)^{\times} + (Fz)^{\times}$ nicht an; setzen wir voraus, dass $(Fa)^{\times}$ nicht auf $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times}$ liegt. Dann ist $[F(x-a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$ und nach dem Satz 8 auch $[F(y-a)]^{\times} = (Fy)^{\times}$. Setzen wir $q = y - x - a$. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq = [F(y-x) + Fa] \cap [F(y-a) + Fx]$. Nachdem $[F(y-x)]^{\times} + (Fa)^{\times} \neq (Fy)^{\times} + (Fx)^{\times}$ und $(Fx)^{\times} + (Fy)^{\times} = (Fx)^{\times} + [F(y-a)]^{\times} = (Fx)^{\times} + [F(y-x)]^{\times}$ ist, gilt $(Fq)^{\times} = [(F(y-x))^{\times} + (Fa)^{\times}] \cap [(F(y-a))^{\times} + (Fx)^{\times}] = [F(y-x)]^{\times}$. Nach dem Satz 3(c) ist $F(x+a) = (Fx + Fa) \cap (Fq + Fy)$ und demzufolge ist $[F(x+a)]^{\times} = [(Fx)^{\times} + (Fa)^{\times}] \cap [(F(y-x))^{\times} + (Fy)^{\times}] = F(x)^{\times}$. Daher folgt $-a \in W_0$.

2a) Es sei $a \in W^*$, $b \in W$, $b \neq 0$ und sei $(Fa)^{\times} \neq (Fb)^{\times}$. Dann ist $a + b \in W^*$: Einer der Punkte $(Fx)^{\times}, (Fy)^{\times}, (Fz)^{\times}$ liegt nicht auf der Geraden $(Fa)^{\times} + (Fb)^{\times}$; setzen wir voraus, dass dieser der Punkt $(Fx)^{\times}$ ist. Nach der Voraussetzung ist $[F(x-a)]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Setzen wir $q = x - a - b$ und setzen voraus, dass $(Fq)^{\times} = (Fx)^{\times}$ ist. Nach dem Satz 3(b) ist $Fq \subseteq Fb + F(x-a)$ und daher ist $(Fq)^{\times} \subseteq (Fb)^{\times} + [F(x-a)]^{\times}$. Es gilt aber $(Fb)^{\times} + (Fx)^{\times} = (Fb)^{\times} + (Fq)^{\times}$ und nachdem $[F(x-a)]^{\times} \subseteq (Fb)^{\times} + (Fq)^{\times}$ ist, gilt $[F(x-a)]^{\times} \subseteq (Fb)^{\times} + (Fx)^{\times}$. Zugleich aber ist $[F(x-a)]^{\times} \subseteq (Fa)^{\times} + (Fx)^{\times}$ und deswegen ist $[F(x-a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$ und daher ein Widerspruch. Es gilt $[F(x-(a+b))]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$ und also ist $a + b \in W^*$.

b) Es sei $a \in W_0$, $a \neq 0$, $b \in W^*$ beliebig vorgegeben. Dann ist $a + b \in W^*$: Es sei z. B. $(Fx)^{\times} \neq (Fa)^{\times}, (Fb)^{\times}$. Es gilt $[F(x-a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$, $[F(x-b)]^{\times} \neq (Fx)^{\times}$. Ferner ist $[F(x+a)]^{\times} = (Fx)^{\times}$, nachdem $-a \in W_0$ ist. Nach dem Fall a) ist $x + a \in W^*$. Da $-x \in W$ ist, ist auch $b - x \in W$. Es gilt $[F(x+a)]^{\times} = (Fx)^{\times} \neq [F(b-x)]^{\times}$ und nach a) ist $(x+a) + (b-x) \in W^*$. Daher ist $a + b \in W^*$.

c) Sei $a, b \in W_0$ beliebig und wir setzen $c = a + b$. Falls $c \in W^*$ ist, dann ist $a = c - b$, wo $-b \in W_0$ ist. Nach dem Fall b) ist $a \in W^*$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $a + b \in W_0$.

Bezeichnen wir $R = \{t \in F \mid ty \in W\}$, $R_0 = \{t \in F \mid ty \in W_0\}$ und $R^* = R \setminus R_0$.

Satz 12. *Es gilt*: 1. $tu \in W$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W$. 2. $tu \in W_0$, $\forall t \in R_0$, $\forall u \in W$. 3. $tu \in W_0$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W_0$.

Beweis. Für $u = 0$ bzw. $t = 0$ gilt die Behauptung. Setzen wir voraus, dass $t \neq 0$, $u \neq 0$ ist.

1. Es sei $t \in R$, $u \in W$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Nachdem $u \in W$ ist, gilt $[F(x - u)]^* \neq (Fu)^*$ und auch

$$[F(y - u)]^* \neq (Fu)^* . \tag{1}$$

Da $ty \in W$ ist, gilt

$$[F(x - ty)]^* \neq (Fty)^* = (Fy)^* . \tag{2}$$

Wir setzen voraus, dass

$$[F(x + tu)]^* = (Fu)^* \tag{3}$$

gilt. Die Elemente $t^{-1}x$, y, u sind linear unabhängig, darum ist nach dem Satz 3

$$F(y - t^{-1}x - u) = [F(y - t^{-1}x) + Fu] \cap [F(y - u) + Ft^{-1}x] , \tag{4}$$

$$F(t^{-1}x + u) = (Ft^{-1}x + Fu) \cap [F(y - t^{-1}x - u) + Fy] . \tag{5}$$

Setzen wir $q = y - t^{-1}x - u$. Nachdem $[F(t^{-1}x + u)]^* = [F(x + tu)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt nach (5) $(Fq)^* \subseteq (Fy)^* + [F(x + tu)]^*$. Nach (3) ist dann $(Fq)^* \subseteq \subseteq (Fy)^* + (Fu)^*$ und nach (1) ist $(Fq)^* \subseteq (Fu)^* + [F(y - u)]^*$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteq [F(y - u)]^* + (Fx)^*$. Demzufolge ist $(Fq)^* = [(Fu)^* + (F(y - u))^*] \cap \cap [(F(y - u))^* + (Fx)^*] = [F(y - u)]^*$. Nach (1) ist also $(Fq)^* \neq (Fu)^*$. Nach (4) ergibt sich $[F(y - t^{-1}x)]^* = [F(x - ty)]^* \subseteq (Fq)^* + (Fu)^* = [F(y - u)]^* + + (Fu)^* = (Fy)^* + (Fu)^*$. Nachdem $[F(x - ty)]^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist, gilt $[F(x - ty)]^* = [(Fx)^* + (Fy)^*] \cap [(Fy)^* + (Fu)^*] = (Fy)^*$. Dieses ist aber mit (2) im Widerspruch und deswegen (3) gilt nicht. Von der Beziehung $[F(x + tu)]^* \neq \neq (Fu)^* = (Ftu)^*$ folgt $-tu \in W$ und nach dem Satz 11 ist $tu \in W$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Es sei $(Fu)^* \neq (Fy)^*$. Dann ist $(Fu)^* \nsubseteq (Fy)^* + (Fz)^*$. Den Beweis führen wir analog wie im Teil a) durch, eben der Punkt Fx wird durch den Punkt Fz ersetzt. Falls $(Fu)^* = (Fy)^*$ gilt, dann ist $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fz)^*$. Da nach dem Teil a) $tz \in W$ ist, kann der Beweis soeben wie in a) durchgeführt werden, nur der Punkt Fy wird durch den Punkt Fz ersetzt.

2. Es sei $t \in R_0$, $u \in W$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Nachdem $t \in R_0$ ist, ist $ty \in W_0$ und deswegen ist $[F(x - ty)]^* = (Fx)^*$. Setzen wir $q = y - t^{-1}x - u$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteq [F(x - ty)]^* + (Fu)^* = (Fx)^* + (Fu)^*$ und $(Fq)^* \subseteq [F(y - - u)]^* + (Fx)^*$. Nachdem $u \in W$ ist, gilt $[F(y - u)]^* \neq (Fu)^*$ und demzufolge ist $(Fx)^* + (Fu)^* \neq [F(y - u)]^* + (Fx)^*$. Daher ist dann $(Fq)^* = [(Fx)^* + (Fu)^*] \cap \cap [(F(y - u))^* + (Fx)^*] = (Fx)^*$. Nach (5) ist $(Fq)^* \subseteq (Fy)^* + [F(x + tu)]^*$ und also ist $[F(x + tu)]^* \subseteq (Fy)^* + (Fx)^*$. Zugleich ist $[F(x + tu)]^* \subseteq (Fx)^* + (Fu)^*$

und also ist $[F(x + tu)]^* = [(Fy)^* + (Fx)^*] \cap [(Fx)^* + (Fu)^*] = (Fx)^*$. Dieses bedeutet aber, dass $-tu \in W_0$ ist und nach dem Satz 11 ist $tu \in W_0$.

b) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Den Beweis führen wir bei der Benutzung des Ergebnisses von a) analog wie im Falle 1b) durch.

3. Es sei $t \in R$, $u \in W_0$ gegeben.

a) Setzen wir voraus, dass $(Fu)^* \nsubseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist. Dann ist $[F(x - ty)]^* \neq (Fy)^*$, $[F(x - u)]^* = (Fx)^*$ und auch $(Fy)^* = [F(y - u)]^*$. Setzen wir wieder $q = y - t^{-1}x - u$. Nach (4) ist $(Fq)^* \subseteq [F(x - ty)]^* + (Fu)^*$. Nachdem $[F(x - ty)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt $[F(x - ty)]^* + (Fu)^* \neq (Fu)^* + (Fy)^*$ und daher ist dann $(Fq)^* \neq (Fy)^*$, $[F(y - u)]^*$. Nach (4), (5) gilt $(Fx)^* = [(Fq)^* + (F(y - u))^*] \cap [(Fx)^* + (Fu)^*] = [(Fq)^* + (Fy)^*] \cap [(Fx)^* + (Fy)^*] = [F(x + tu)]^*$. Deswegen ist $-tu \in W_0$ und nach dem Satz 11 ist $tu \in W_0$.

b) Wenn $(Fu)^* \subseteq (Fx)^* + (Fy)^*$ ist, dann führen wir den Beweis ähnlich wie in 1b) durch.

Satz 13. *R ist ein totaler Ring im Körper F, $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0, t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$.*

Beweis. 1. R ist ein Ring: Es sei $t_1, t_2 \in R$. Dann ist $t_1 y, t_2 y \in W$. Nach dem Satz 11 ist $t_1 y + t_2 y = (t_1 + t_2)\, y \in W$ und daher ist $t_1 + t_2 \in R$. Nachdem $t_1 y \in W$, $t_2 \in R$ ist, ist nach dem Satz 12 $t_2(t_1 y) = (t_1 t_2)\, y \in W$ und daher ist $t_1 t_2 \in R$.

2. R ist ein totaler Ring in F: Es sei $t \in F \setminus R$ gegeben. Dann ist $ty \notin W$ und ebenfalls $tx \notin W$. Dieses bedeutet, dass $[F(y - tx)]^* = [F(x - t^{-1}y)]^* = (Fx)^*$ gilt. Daher folgt $t^{-1}y \in W_0$ und $t^{-1} \in R_0$. Es sei ein beliebiges Element $t \in R_0$, $t \neq 0$ gegeben. Dann ist $ty \in W_0$ und nach dem Satz 12 auch $tx \in W_0$. Darum ist $[F(y - tx)]^* = (Fy)^*$. Es ist aber $[F(y - tx)]^* = [F(x - t^{-1}y)]^* = (Fy)^* = (Ft^{-1}y)^*$. Daher ist dann $t^{-1}y \notin W$ und $t^{-1} \notin R$.

Bemerkung 6. Nach dem Satz 1 ist R_0 ein Maximalideal in R und $R \setminus R_0$ ist ein Körper. Nach dem Satz 12 ist $tu \in W$ für alle $t \in R$, $u \in W$. Nach der Einführung dieser äusseren Operation ist W ein Modul über dem Ring R und W_0 ist ein Untermodul des Moduls W.

Satz 14. *Es sei $a, b \in W$; $a, b \neq 0$ und sei*

1. $(Fx)^* \nsubseteq (Fa)^* + (Fb)^*$ *im Falle* $(Fa)^* \neq (Fb)^*$,
2. $(Fx)^* \neq (Fa)^*$ *im Falle* $(Fa)^* = (Fb)^*$.

Dann ist $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

Beweis. Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* \neq (Fb)^*$ ist.

a) Wenn $a, b \in W_0$, dann ist $a \dotplus b \in W_0$ und es gilt $h(x, x', a) = h(x, x', b) = h(x, x', a + b) = 0$ und also ist $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

b) Es sei $a \in W^*$, $b \in W^*$. Setzen wir $a' = h(x, x', a)$, $b' = h(x, x', b)$. Dann ist nach dem Satz 6 $(Fa)^* = Ga'$, $(Fb)^* = Gb'$, $[F(x - a)]^* = G(x' - a')$, $[F(x - b)]^* = G(x' - b')$, wobei $[F(x - a)]^* \neq (Fx)^*, (Fa)^*$ ist. Die Elemente x', a', b', sind in B linear unabhängig und die Elemente x, a, b sind linear unabhängig in A. Nach dem Satz 3b) ist $F(x - a - b) = [F(x - a) + Fb] \cap [F(x - b) + Fa]$. Es gilt $[F(x - a)]^* \neq (Fb)^*$, $[F(x - b)]^* \neq (Fa)^*$. Nachdem $[F(x - a)]^* \neq (Fx)^*, (Fb)^*$ ist, gilt $[F(x - a)]^* + (Fb)^* \neq [F(x - b)]^* + (Fa)^*$ und demzufolge ist $[F(x - a - b)]^* = [(F(x - a))^* + (Fb)^*] \cap [(F(x - b))^* + (Fa)^*] = [G(x' - a') + Gb'] \cap [G(x' - b') + Ga'] = G(x' - a' - b')$. Nach dem Satz 3c) ist $F(a + b) = (Fa + Fb) \cap [F(x - a - b) + Fx]$. Es gilt $(Fa)^* \neq (Fb)^*$. Nach dem Teil II, 2, b) des Beweises des Satzes 11 ist $a + b \in W^*$ und demzufolge ist $[F(x - (a + b))]^* \neq (Fx)^*$. Offenbar ist $(Fa)^* + (Fb)^* \neq [F(x - a - b)]^* + (Fx)^*$ und deswegen $[F(a + b)]^* = [(Fa)^* + (Fb)^*] \cap [(F(x - a - b))^* + (Fx)^*] = (Ga' + Gb') \cap [G(x' - a' - b') + Gx'] = G(a' + b')$. Es gilt also $(Fx)^* = Gx'$, $[F(a + b)]^* = G(a' + b')$, $[F(x - (a + b))]^* = G(x' - (a' + b'))$. Nach dem Satz 6 ist dann $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b) = a' + b'$.

c) Es sei $a \in W^*$, $b \in W_0$. Dann ist $(Fa)^* = Ga'$, $[F(x - a)]^* = G(x' - a')$, $[F(x - b)]^* = (Fx)^*$, $b' = 0$. Setzen wir $q = x - (a + b)$. Nach dem Satz 3 gilt dann $(Fq)^* \subseteqq (Fa)^* + [F(x - b)]^* = (Fa)^* + (Fx)^* = (Fa)^* + [F(x - a)]^*$ und $(Fq)^* \subseteqq (Fb)^* + [F(x - a)]^*$. Daher ist $(Fq)^* = [F(x - a)]^* = G(x' - a') = [F(x - (a + b))]^*$. Ferner ist nach dem Satz 3 $[F(a + b)]^* \subseteqq (Fa)^* + (Fb)^*$, $[F(a + b)]^* \subseteqq (Fq)^* + (Fx)^* = [F(x - a)]^* + (Fx)^* = (Fa)^* + (Fx)^*$. Daher ist $[F(a + b)]^* = (Fa)^* = Ga'$. Nach dem Satz 6 ist dann $h(x, x', a + b) = h(x, x', a)$. Nachdem $h(x, x', b) = 0$ ist, gilt $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

2. Setzen wir voraus, dass $(Fa)^* = (Fb)^*$. Für zumindest einen der Punkte Fy, Fz — sei es der Punkt Fy — gilt $(Fa)^* \neq (Fy)^*$. Dann liegt der Punkt $(Fx)^*$ nicht auf der Geraden $(Fa)^* + (Fy)^*$ und nach dem Fall 1 ist $h(x, x', a + y) = h(x, x', y) + h(x, x', a)$. Nachdem $-a \in W$ ist, gilt $[F(a + y)]^* \neq (Fa)^*$. Der Punkt $(Fx)^*$ liegt nicht auf der Geraden $(Fb)^* + [F(a + y)]^*$ und deswegen ist wieder nach dem Fall 1 $h(x, x', b) + h(x, x', a + y) = h(x, x', a + b + y)$.

a) Es sei $a + b = 0$. Dann ist nach dem vorherigen $h(x, x', a) + h(x, x', b) + h(x, x', y) = h(x, x', a + b + y) = h(x, x', y)$. Daher ist $h(x, x', a) + h(x, x', b) = 0 = h(x, x', a + b)$.

b) Es sei $a + b \neq 0$. Nachdem $[F(a + b)]^* \neq (Fy)^*$ ist, gilt nach dem Fall 1 $h(x, x', y) + h(x, x', a + b) = h(x, x', a + b + y)$. Nach dem Einsetzen von den vorangehenden Beziehungen ergibt sich $h(x, x', y) + h(x, x', a + b) = h(x, x', y) + h(x, x', a) + h(x, x', b)$. Es gilt also $h(x, x', a) + h(x, x', b) = h(x, x', a + b)$.

Bemerkung 7. Der Satz 14 gilt auch für $q = 0$. Dann ist $h(x, x', a) = 0$ und $h(x, x', a + b) = h(x, x', b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$. Ähnlicherweise auch für den

Fall $b = 0$. Wenn der Punkt Fy bzw. Fz den Forderungen des Satzes 14 für Fx genügt, dann beweist man ähnlich, dass $h(y, y', a + b) = h(y, y', a) + h(y, y', b)$ bzw. $h(z, z', a + b) = h(z, z', a) + h(z, z', b)$ gilt.

Für ein beliebiges Element $u \in W$ sind nach der Bemerkung 5 zumindest zwei der Werte $h(x, x', u)$, $h(y, y', u)$, $h(z, z', u)$ definiert und diese sind einander gleich. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir mit u^σ. σ ist eine Abbildung der Menge W in B und für $u \in W^*$ gilt nach dem Satz 6 die Beziehung $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma$.

a) Es gilt $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, $\forall a, b \in W$: Zwischen den Punkten Fx, Fy, Fz existiert zumindest einer, z. B. Fy, für welchen $(Fy)^\varkappa \nsubseteq (Fa)^\varkappa + (Fb)^\varkappa$ im Falle $(Fa)^\varkappa \neq (Fb)^\varkappa$ und $(Fy)^\varkappa \neq (Fa)^\varkappa$ im Falle $(Fa)^\varkappa = (Fb)^\varkappa$ gilt. Nach dem Satz 14 und der Bemerkung 7 ist $h(y, y', a + b) = h(y, y', a) + h(y, y', b)$, d. h. $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$.

b) Es seien $u \in W^*$, $t \in R^*$ beliebige Elemente. Dann ist $tu \in W^*$ und es gilt $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma = (Ftu)^\varkappa = G(tu)^\sigma$. Es existiert ein einziges Element $g(t, u) \in G$, $g(t, u) \neq 0$ derart, dass $(tu)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma$ ist. Wenn $t \in R_0$ ist, dann setzen wir $g(t, u) = 0$ für ein beliebiges $u \in W^*$. Nachdem dann $tu \in W_0$ ist, gilt $(tu)^\sigma = 0$, $g(t, u)\, u^\sigma = 0$ d. h. $(tu)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma$.

Für beliebige $t \in R$ und $u, v \in W^*$ gilt $g(t, u) = g(t, v)$: Wenn $t \in R_0$ ist, dann ist $g(t, u) = g(t, v) = 0$. Sei $t \in R^*$. Setzen wir zuerst voraus, dass $(Fu)^\varkappa \neq (Fv)^\varkappa$ ist. Nach dem Teil II 2 a) des Beweises des Satzes 11 ist $u + v \in W^*$ und $g(t, u + v)\, u^\sigma + g(t, u + v)\, v^\sigma = g(t, u + v)\,(u^\sigma + v^\sigma) = g(t, u + v)\,(u + v)^\sigma = [t(u + v)]^\sigma = (tu + tv)^\sigma = (tu)^\sigma + (tv)^\sigma = g(t, u)\, u^\sigma + g(t, v)\, v^\sigma$. So bekommen wir $[g(t, u + v) - g(t, u)]\, u^\sigma = [g(t, v) - g(t, u + v)]\, v^\sigma$. Da $Gu^\sigma \neq Gv^\sigma$ ist, gilt $g(t, u) = g(t, u + v) = g(t, v)$. Es sei $(Fu)^\varkappa = (Fv)^\varkappa$. Es existiert ein Punkt, z. B. Fx derart, dass $(Fu)^\varkappa \neq (Fx)^\varkappa$ ist. Nach dem obigen ist dann $g(t, u) = g(t, x) = g(t, v)$. Für jedes $t \in R$ bezeichnen wir $t^\varphi = g(t, u)$, wo $u \in W^*$ ist. Dann ist φ eine Abbildung von R in G und $t^\varphi = 0$ genau dann, wenn $t \in R_0$ ist. Nach dem Vorangehendem ist $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W^*$. Es sei $t \in R$, $u \in W_0$. Dann ist $tu \in W_0$ und $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma = 0$. Es gilt also $(tu)^\sigma = t^\varphi u^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall u \in W$.

Das Paar (φ, σ) ist eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume A, B mit Rücksicht auf den Modul W: Nach dem Satz 13 und der Bemerkung 6 ist W ein Modul über dem totalen Ring R im Körper F, $W \subseteqq A$ und $R_0 = \{t \in R \mid t \neq 0, t^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$. σ ist eine Abbildung von W in B und φ ist eine Abbildung von R in G. Nach a) ist $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, $\forall a, b \in W$, nach b) gilt $(tx)^\sigma = t^\varphi x^\sigma$, $\forall t \in R$, $\forall x \in W$ und $t^\varphi = 0 \Leftrightarrow t \in R_0$. Vom Satz 9 folgt die Bedingung 4 von der Definition 2. Jede Gerade von $P(A)$ ist ein Unterraum der Dimension 2 in A. Von der Forderung 2 der Definition 3 folgt deswegen die Bedingung 5 der Definition 2 und nach 3 von der Definition 3 gilt 6 von der Definition 2.

Die verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) induziert den gegebenen Homomorphismus $\varkappa$ der projektiven Räume $P(A)$, $P(B)$, nachdem $(Fu)^\varkappa = Gu^\sigma$, $\forall u \in W^*$ gilt. Damit ist unser Theorem bewiesen.

Literatur

[1] *Baer, R.:* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.
[2] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann., *132*, 180—200, 1956.
[3] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford: Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry, 99—107, 1962.
[4] *Lüneburg, H.:* Über die Struktursätze der projektiven Geometrie, Arch. Math., *17*, 206—209, 1966.
[5] *Radó, F.:* Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations, Aequat. Math., *4*, 307—321, 1970.
[6] *Radó, F.:* Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen, Math. Zeitschr., *110*, 153—170, 1969.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).